НСОМ, Велико Търново,
13 май 2006

Група А

Задача 1: Нека A е квадратна матрица от ред n с елементи $a_{ij} = i.j$, а $f(x) = det(Ax+E)$ е функция на реалната променлива x.

(а) Пресметнете $f'(0)$ при $n = 4$.

(б) Пресметнете $f'(0)$ за произволно $n \in \mathbb{N}$.

Решение:

$$f(x) = det(Ax+E) = \begin{vmatrix} 1^2x+1 & 1.2x & \dots & 1.nx \\ 2x & 2^2x+1 & \dots & 2.nx \\ & \dots & \dots & \\ n.1x & n.2x & \dots & n^2x+1 \end{vmatrix}$$

Тогава

$$f'(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x) + \dots + \Delta_n(x),$$

където $\Delta_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ е детерминанта от n-ти ред, на която елементите на i-тия ред са производните на елементите от i-тия ред на $det(Ax+E)$, а всички други редове съвпадат със съответните редове на $det(Ax+E)$.

Оттук получаваме

$$f'(0) = \Delta_1(0) + \Delta_2(0) + \dots + \Delta_n(0)$$

Но $\Delta_i(0), i = 1, 2, \dots, n$ има вида

$$\Delta_i(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \dots & \\ i.1 & i.2 & i.3 & \dots & i^2 & i.(i+1) & \dots & i.n \\ & & & \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

стойността на която е i^2. Следователно

$$f'(0) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задача 2: Нека множеството $\mathbb{N}$ от естествените числа е записано по някакъв начин като редица: $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

(а) Докажете, че съществува границата

$$g(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{na_n} \right).$$

(б) Докажете, че $\inf\limits_{\alpha} g(\alpha) = 0$ и $\max\limits_{\alpha} g(\alpha) = g(\iota)$, където $\iota = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Решение:

(а) Очевидно редицата $\beta_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{na_n}$ е растяща. От неравенството на Коши следва, че

($\star$)

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{na_n} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \right)\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right).$$

За да докажем, че β_n е ограничена е достатъчно да се съобрази, че изразът $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{p^2}$ е ограничен. Това е лесно:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{p\cdot(p-1)}$$
$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \pm \cdots + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = 2 - \frac{1}{p} < 2.$$

Нека след това $p = \max\limits_{k\leq n} a_k$. Очевидно $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{p^2}$ и значи за всяко n е изпълнено неравенството $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{na_n} < 2$.

(б) В ($\star$) се достига равенство само когато $a_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Оттук за всяко n имаме $\alpha_n \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, което означава, че за всяка редица α имаме $g(\alpha) \leq g(\iota)$.

Нека след това n е фиксирано и $\gamma^{(n)}$ е редицата

$$\left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, 1, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots \right\}.$$

Ясно е, че $g(\gamma^{(n)})$ е граница на редицата с общ член

$$a_{n+p} = \frac{1}{n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot 2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} = b_n+c_p.$$

Лесно се вижда, че

$$c_p = \frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)}+\cdots\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\pm\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}.$$

Значи когато n е голямо, c_p става произволно малко.

За израза b_n получаваме

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Сравняваме сумата с $\int\limits_1^n \frac{dx}{x}$ и получаваме, че $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1+\ln n$. Това означава, че $a_n < \frac{2(1+\ln n)}{n+1}$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тоест при голямо n, a_n става произволно малко. Ще отбележим, че $g(\alpha)>0$ за всяко α, защото $g(\alpha)$ е граница на растяща редица от положителни числа.

Задача 3: Нека $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ е непрекъсната функция, за която $f(0)=f(1)$.

(а) Докажете, че за всяко естествено n съществува хорда на графиката на f, успоредна на оста Ox, която има дължина $\frac{1}{n}$.

(б) Съществува ли непрекъсната функция $f:[0,1]\to[0,1]$, за която $f(0)=f(1)$ и всяка хорда, успоредна на оста Ox, има дължина, различна от $\frac{2}{3}$?

(в) Съществува ли непрекъсната функция $f:[0,1]\to[0,1]$, за която $f(0)=f(1)$ и всяка хорда, успоредна на оста Ox, има дължина, различна от $\frac{2}{5}$?

Забележка: Изобщо може да се докаже, че ако $\epsilon>0$ има следното свойство: *за всяка* непрекъсната функция $f:[0,1]\to[0,1]$ с $f(0)=f(1)$ съществуват точки x и y, за които $|x-y|=\epsilon$ и $f(x)=f(y)$, то $\frac{1}{\epsilon}$ е естествено число.

Решение.

(а) Можем да предполагаме, че $f(0) = f(1) = 0$. Разглеждаме функцията

$$\varphi(x) = f(x + 1/n) - f(x).$$

За да докажем твърдението, е достатъчно да покажем, че функцията $\varphi(x)$ има противоположни знаци в краищата на някой интервал от вида $[k/n, (k+1)/n]$. Наистина, тогава е ясно, че $\varphi(x_0) = 0$ за някое x_0 от този интервал, което доказва задачата. Да допуснем, че $\varphi(x)$ има еднакви знаци във всяка точка от вида k/n , $k = 0, 1, ..., n-1$; нека например

$$\begin{gathered}\varphi(0) = f(1/n) - 0 > 0 \\ \varphi(1/n) = f(2/n) - f(1/n) > 0 \\ ..... \\ \varphi((n-1)/n) = 0 - f((n-1)/n) > 0\end{gathered}$$

Но тези неравенства са очевидно противоречиви - от първите $n-1$ от тях следва

$$f\left(\frac{n-1}{n}\right) > f\left(\frac{n-2}{n}\right) > \ ... > \ f\left(\frac{1}{n}\right) > 0,$$

което противоречи на последното. По същия начин се разсъждава и ако допуснем, че числата $\varphi(k/n)$ са отрицателни. (Да отбележим, че ако някое от тях е 0, то твърдението очевидно е изпълнено.)

(б) Да. Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} & 0 \le x \le 1/4 \\ 1 - x & 1/4 \le x \le 3/4 \\ x - \dfrac{1}{2} & 3/4 \le x \le 1 \end{cases}$$

(в) Да. Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 0,25 \\ x - 0,25 & 0,25 \le x \le 0,40 \\ -1,3x + 0,67 & 0,40 \le x \le 0,5 \\ 0,015x + 0,0125 & 0,5 \le x \le 0,70 \\ -x + 0,7255 & 0,70 \le x \le 0,7255 \\ 0 & 0,7255 \le x \le 1 \end{cases}$$