

НСОМ, Созопол,
2 юни 2007

Група А

Задача 1: Нека M е $m \times m$ матрица с елементи 0 и 1, такава че всеки ред на M съдържа точно $k + 1$ единици, и за всеки $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$, съществува единствено p , $1 \leq p \leq m$, за което $a_{ip} = a_{jp} = 1$. Докажете, че:

- а) $m = k^2 + k + 1$;
- б) всеки стълб на M съдържа точно $k + 1$ единици;
- в) съществува такава матрица при $m = 7$.

Решение:

а) Директно се пресмята, че $MM^T = kE + J$ и $MJ = (k + 1)J$, където E е единичната матрица, а J е матрицата, състояща се само от единици, и двете от ред m . Лесно се пресмята, че $J^2 = mJ$, следователно $JMJ = (k + 1)J^2 = (k + 1)mJ$. Тъй като M е неособена,

$$\begin{aligned} JM &= J(kE + J)(M^T)^{-1} \\ &= (kJ + J^2)(M^T)^{-1} \\ &= (k + m)(M^{-1}J)^T \\ &= \frac{k + m}{k + 1}J. \end{aligned}$$

Оттук следва, че $JMJ = \frac{k+m}{k+1}mJ$. Като приравним двата израза за JMJ , получаваме $m = k^2 + k + 1$.

б) $JM = \frac{k+m}{k+1}J = \frac{(k+1)^2}{k+1}J = (k + 1)J$, което показва, че всеки стълб на M съдържа точно $k + 1$ единици.

в) Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2:

а) Да се докаже, че съществува неконстантна непрекъсната периодична функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяваща уравнението

$$(1) \quad f(x+1) + f(x-1) = pf(x)$$

тогава и само тогава, когато $|p| \leq 2$;

б) При $p = \sqrt{2}$, да се намери решение с период цяло число.

Решение:

а) Ще търсим решение на функционалното уравнение от вида $\varphi(x) = \cos \alpha x$. Замествайки, получаваме

$$\cos \alpha(x-1) + \cos \alpha(x+1) = p \cos \alpha x = 2 \cos \alpha \cos \alpha x$$

и след преобразуване на лявата част стигаме до $\cos \alpha = \frac{p}{2}$, т.е. за $\alpha = \arccos \frac{p}{2}$ функцията $\varphi(x) = \cos \alpha x$ е решение на функционалното уравнение (1) за $|p| < 2$. По абсолютно същия начин заключаваме, че функцията $\varphi(x) = \sin \alpha x$ също е решение на (1). Следователно всяка функция от вида

$$\varphi(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

е решение на (1).

Да отбележим, че сега лесно можем да решим условие б); наистина, ако $p = \sqrt{2}$, то $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Ясно е, че при $k = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{4}$ решението $\cos \frac{\pi x}{4}$ има период $T = 8$.

Обратно, ако $|p| > 2$, търсим решение на (1) от вида $\varphi(x) = \lambda^x$, след заместване стигаме до характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$$

от където лесно се вижда, че има два различни положителни корена λ_1, λ_2 и както по-горе заключаваме, че при фиксирано x_0 съществуват константи C_1, C_2 такива че

$$f(x) = C_1 \lambda_1^x + C_2 \lambda_2^x \text{ за всяко } x \in x_0 + \mathbb{Z}.$$

Но понеже C_1, C_2 не са едновременно равни на 0, следва че функцията $f(x)$ е неограничена и следователно не може да бъде периодична.

Остава да разгледаме случаите $p = \pm 2$. Нека $p = 2$ и да разгледаме периодичната функция $f(x)$, която има период 1 и за която $f(x) = |x|$ в интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Очевидно за тази функция $f(x+1) + f(x-1) = 2f(x)$. За $p = -2$ разгледаме периодичната функция $g(x)$, която има период 2 и за която $g(x) = |x| - \frac{1}{2}$ в интервала $[-1, 1]$. Очевидно за тази функция $f(x+1) + f(x-1) = -2f(x)$.

Забележка: Поради техническа грешка в условието на задачата беше пропуснато изискването за непрекъснатост на функцията $f(x)$. \square

Задача 3: Да се докаже, че:

$$\text{а) } \sqrt{1+x} = \cos \frac{\arcsin x}{2} + \sin \frac{\arcsin x}{2} \quad \text{за } x \in [0, 1];$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} f(\sin 2t) \cos t dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 t) \cos t dt$$

за всяка непрекъснатата функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Решение:

а) Да положим $y = \arcsin x$. Тогава $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos \frac{y}{2} + \sin \frac{y}{2} \geq 0$ и

$$1 + \sin y = \cos^2 \frac{y}{2} + 2 \cos \frac{y}{2} \sin \frac{y}{2} + \sin^2 \frac{y}{2} = \left(\cos \frac{y}{2} + \sin \frac{y}{2} \right)^2.$$

б) Сменяйки променливите, получаваме

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(\sin 2t) \cos t dt &= \left\{ t = \frac{u}{2} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\sin u) \cos \frac{u}{2} du = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} f(\sin u) \cos \frac{u}{2} du + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) \cos \frac{u}{2} du \right), \\ \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) \cos \frac{u}{2} du &= \{ u = \pi - v \} = \int_0^{\pi/2} f(\sin v) \sin \frac{v}{2} dv, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin 2t) \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(\sin v) \left(\cos \frac{v}{2} + \sin \frac{v}{2} \right) dv =$$

$$\{v = \arcsin x\} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \left(\cos \frac{\arcsin x}{2} + \sin \frac{\arcsin x}{2} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos^2 t) \cos t dt = \{t = \arccos \sqrt{x}\} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad .$$