Национална студентска олимпиада по математика'2008
07.06.2008 г.
ГРУПА А

Задача 1. Нека G е адитивна изброима абелева група, на която всяка крайно породена подгрупа е безкрайна циклична група. Да се докаже, че G е изоморфна на подгрупа на адитивната група $\mathbb{Q}$ на рационалните числа.

Задача 2. Дадена е функция $f : [0,1] \to [0,1]$.
а) Ако f е непрекъсната, да се докаже, че съществува такова $x_0 \in [0,1]$, че $f(x_0) = x_0$.
б) Ако f е растяща, да се докаже, че съществува такова $x_0 \in [0,1]$, че $f(x_0) = x_0$.
в) Съществува ли намаляваща функция f така, че $f(x) \neq x$ за всяко $x \in [0,1]$?

Задача 3. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява условието $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k^2}{n-k}$ за $n \geq 2$.

а) Ако $a_1 \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{17}-1}$ да се докаже, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

б) Да се докаже, че съществува $c > 0$, за което $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, за произволен избор на $a_1 \in [0, c]$.

Национална студентска олимпиада по математика'2008

07.06.2008 г.

ГРУПА Б

Задача 1. В декартова координатна система точките с координати $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ са върхове на куб. Да се намери сумата от дължините на кривите, получени от пресичането на стените на куба с повърхнината $z = x^2 + y^2 - 2xy$.

Задача 2. Нека $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2008\,x - x^2}$ и $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+2}$.

Задача 3. Квадратната матрица A се нарича *циркуланта*, ако всеки нейн ред се получава посредством преместване с една позиция надясно на елементите на предходния ред, като последният елемент се разполага на първа позиция. Това означава, че всяка циркуланта A се определя от първия си ред $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и се означава така: $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Например, $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_0 \end{pmatrix} .$$

Нека матриците A и B са циркуланти.

а) Ако X е циркулантата $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, а A е $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, да се докаже, че

$$A = a_0 E + a_1 X + \ldots + a_n X^n ,$$

където E е единичната матрица.

б) Ако $Y = AB$, да се докаже, че $Y = BA$ и че матрицата Y също е циркуланта.

Национална студентска олимпиада по математика'2008

07.06.2008 г.

ГРУПА В

Задача 1. Нека

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x & 1 & 1 \\ x & x & x & \dots & x & x & 1 \end{vmatrix} .$$

а) Да се пресметне D_n;

б) Да се реши неравенството $x^{2k+1} + 1 \geq D_{2k+1}$.

Задача 2. Нека $f(x) = \dfrac{1}{x}$ за $x > 0$. В декартова координатна система с начало O точката B лежи върху графиката на $f(x)$, а точката A е върху абсцисната ос така, че $OB = AB$. Да се намери най-голямата стойност на радиуса на вписаната окръжност в триъгълника OAB.

Задача 3. Да се пресметне

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \ldots + 2^{\frac{n}{n}}}{n} .$$