Национална студентска олимпиада по математика, к.к. Пампорово, 19-21 май 2017 г.

Задачи и решения

Национална студентска олимпиада по математика, к.к. Пампорово, 19-21 май 2017 г.

Национална комисия за НСОМ 2017

Председател:

проф. дпн Сава Иванов Гроздев, ВУЗФ – София

Членове:

1. доц. д-р Асен Иванов Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“– София
2. доц. д-р Димитринка Иванова Владева-Трендафилова, Лесотехнически университет – София
3. гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“– Пловдив
4. доц. д-р Веселин Ненков Ненков, ТУ – Габрово
5. доц. д-р Росен Николаев Николаев, ИУ – Варна
6. гл. ас. д-р Илияна Петрова Раева, РУ „Ангел Кънчев“– Русе
7. доц. д-р Станислава Славчева Стоилова, УАСГ – София
8. проф. д-р Иван Димитров Трендафилов, ТУ – София

Жури на НСОМ 2017

Председател:

доц. д-р Боян Златанов, ПУ „Паисий Хилендарски“– Пловдив

Членове:

1. проф. дпн Сава Гроздев, ВУЗФ – София
2. доц. д-р Асен Божилов, СУ „Св. Климент Охридски“
3. доц. д-р Димитринка Владева-Трендафилова, Лесотехнически университет – София
4. гл. ас. д-р Петър Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“

5. доц. д-р Веселин Ненков, ТУ – Габрово
6. доц. д-р Росен Николаев, ИУ – Варна
7. доц. д-р Илияна Раева, РУ „Ангел Кънчев“
8. доц. д-р Станислава Славчева Стоилова, УАСГ – София
9. проф. д-р Иван Трендафилов, ТУ – София
10. доц. д-р Владимир Бабев, СУ „Св. Климент Охридски“
11. ас. Петър Стоев, Университет по архитектура, строителство и геодезия – София

Организационен комитет на НСОМ 2017

Председател:

гл. ас. д-р Петър Иванов Копанов, ПУ „Паисий Хилендарски“

Членове:

1. доц. д-р Дойчин Бояджиев, ПУ „Паисий Хилендарски“
2. доц. д-р Теменужка Пенева, ПУ „Паисий Хилендарски“
3. доц. д-р Марта Теофилова, ПУ „Паисий Хилендарски“
4. гл. ас. д-р Десислава Войникова, ПУ „Паисий Хилендарски“
5. гл. ас. д-р Кремена Стефанова, ПУ „Паисий Хилендарски“
6. Росен Христев, ПУ „Паисий Хилендарски“
7. Хасан Гюлюстан, ПУ „Паисий Хилендарски“
8. Надя Милева, ПУ „Паисий Хилендарски“
9. Гергана Колев, ПУ „Паисий Хилендарски“

Задачи на група А

Задача 1. Колко са обратимите матрици A с размер $n \times n$, така че всички елементи на A и A^{-1} да са равни на 0 или 1, ако:

а) $n = 2$;

б) $n = 3$;

в) $n = 2017$.

Решение:

Решението е за произволно естествено число n. Нека $A = (a_{ij})$ и $A^{-1} = (b_{ij})$. Тъй като и двете матрици са обратими, трябва на всяка колона и на всеки ред да има поне една единица и за двете матрици. За произволно $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ имаме $1 = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.b_{jk}$. Следователно, имаме единствен индекс $m : a_{km} = b_{mk} = 1$. Ако $s \neq k$, имаме

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}.b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.b_{js},$$

т.е. $a_{sm} = b_{ms} = 0$

Следователно, имаме биекция $k \leftrightarrow m$ и всеки ред и всяка колона на A и A^{-1} съдържа точно една 1, но това означава, че A и A^{-1} са матрици на пермутации на n елемента и съществува точно $n!$ такива матрици.

$\square$

Задача 2. Да се докаже, че координатите x и y на всяка точка от окръжността

$$x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

удовлетворяват неравенството:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & x & 1 \\ 1 & y & x \end{vmatrix} \leq \frac{125}{27}.$$

Решение:

Ако a, b и c са вектори, тъй като смесеното им произведение е $abc = (a \times b).c$, то

$$|abc| = |(a \times b).c| \leq |(a \times b)|\,|c| \leq |a|\,|b|\,|c|\,.$$

За векторите $a = (x,\, y,\, 1)$, $b = (y,\, x,\, 1)$ и $c = (1,\, y,\, x)$ от горното неравенство следва

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & x & 1 \\ 1 & y & x \end{vmatrix} \leq \left(\sqrt{x^2+y^2+1}\right)^3 = \frac{125}{27}.$$

$\square$

Задача 3. Нека $P_N = \max\limits_{1 \leq n \leq N} \{\sqrt[2017]{n}\}$, където с $\{x\}$ е означена дробната част на числото x, т.е. $0 \leq \{x\} < 1$ и $x - \{x\}$ е цяло число.

а) Да се докаже, че $\lim\limits_{k\to\infty} P_{(k+1)^{2017}-1} = 1$.

б) Да се докаже, че $\lim\limits_{N\to\infty} P_N = 1$.

в) Да се пресметне границата $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt[2017]{N^{2016}}\big(1 - P_N\big)$.

Решение:

а) Ако $k^{2017} \leq n < (k+1)^{2017}$ за $k \in \mathbb{N}$, то $k \leq \sqrt[2017]{n} < k+1$. Тогава

$$\left\{\sqrt[2017]{n}\right\} = \sqrt[2016]{n} - k \leq \sqrt[2017]{(k+1)^{2017} - 1} - k\,,$$

като равенство се достига за $n = (k+1)^{2017} - 1$. Следователно,

$$P_{(k+1)^{2017}-1} = \sqrt[2017]{(k+1)^{2017} - 1} - k\,.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} P_{(k+1)^{2017}-1} &= \lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[2017]{(k+1)^{2017} - 1} - k\right) = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[2017]{(1+x)^{2017} - x^{2017}} - 1}{x} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

б) От дефиницията на P_N следва, че $P_N \leq P_{N+1}$. Понеже редицата $\{P_N\}_1^{\infty}$ е подредица на редицата $\{P_N\}_1^{\infty}$, то $\lim\limits_{N\to\infty} P_N = 1$.

в) За пресмятане на исканата граница да положим $k = \left[\sqrt[2017]{N}\right]$ (цяла част). Тогава $k \leq \sqrt[2017]{N} < k+1$, откъдето $1 - P_{(k+1)^{2017}-1} \leq 1 - P_N \leq 1 - P_{k^{2017}-1}$.

Следователно,

$$k^{2016}\left(1-P_{(k+1)^{2017}-1}\right) \;\leq\; \sqrt[2017]{N^{2016}}\,(1-P_N) \;\leq\; (k+1)^{2016}\,(1-P_{k^{2017}-1}) \;.$$

Имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} k^{2016}\left(1-P_{(k+1)^{2017}-1}\right) &= \lim_{k\to\infty} k^{2016}\left(k+1-\sqrt[2017]{(k+1)^{2017}-1}\right) = \\
&= \lim_{k\to\infty} (k+1)^{2016}\left(k+1-\sqrt[2017]{(k+1)^{2017}-1}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[2017]{1-x^{2017}}}{x^{2017}} = \\
&= \frac{1}{2017}
\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} (k+1)^{2016}\,(1-P_{k^{2016}-1}) &= \lim_{k\to\infty} (k+1)^{2016}\left(k-\sqrt[2017]{k^{2017}-1}\right) = \\
&= \lim_{k\to\infty} k^{2016}\left(k-\sqrt[2017]{k^{2017}-1}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[2017]{1-x^{2017}}}{x^{2017}} = \\
&= \frac{1}{2017}\;.
\end{aligned}$$

Понеже $\lim\limits_{N\to\infty}\left[\sqrt[2017]{N}\right] = \infty$, от теоремата за междинната редица намираме

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[2017]{N^{2016}}\,(1-P_N) \;=\; \frac{1}{2017}\;.$$

$\square$

Задачи на група Б

Задача 1. Даден е интегралът

$$I(a) = \int_0^1 \operatorname{arctg}(ax)dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

а) Да се пресметне $I(a)$. Непрекъсната ли е тази функция в точката $a = 0$?

б) Да се пресметне $\lim\limits_{a \to -\infty} I(a)$.

в) Кое от числата π и $3\sqrt{3}\ln\dfrac{4}{3}$ е по-голямо? (Отговорът да се обоснове!)

Решение:

а) За $a \neq 0$ след интегриране по части се получава

$$I(a) = \operatorname{arctg} a - \frac{\ln(1+a^2)}{2a}.$$

Сега следва $I(0) = 0 = \lim\limits_{a \to 0} I(a)$ (използваме правилото на Лопитал), т.е. тази функция е непрекъсната в точката 0.

б) Търсената граница е $-\dfrac{\pi}{2}$. (Отново използваме правилото на Лопитал).

в) При $a > 0$ в неравенството $I(a) > 0$ заместваме a с $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\square$

Задача 2. Дадена е функцията $f(x) = e^x$.

а) Да се намери уравнението на права t_1, която е допирателна към графиката на $f(x)$ в точката с абсциса $x = 0$.

б) Да се докаже, че правата $t_2:\ y = e\,x$ е допирателна към графиката на $f(x)$.

в) Да се намери лицето на фигурата, ограничена от правите t_1 и t_2 и от графиката на $f(x)$.

Решение:

а) Тъй като $f(0) = 1$ и $f'(x) = e^x$, то t_1 има уравнение $y - 1 = 1.(x - 0)$ или $t_1: \ y = x + 1$.

б) Равенството $e^x = ex$ е изпълнено за $x = 1$ и тогава допирателната към графиката на $f(x)$ в точката с абциса 1 е $y - e = e(x - 1)$, т.е. t_2.

в) Ще използваме точките O, $A(1,0)$, $B(1,e)$, $C(0,\ 1)$ и пресечната точка $D\left(\dfrac{1}{e-1}, \dfrac{e}{e-1}\right)$ на t_1 и t_2.

Нека S_0 е лицето на криволинейния трапец $\left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le e^x \end{array} \right.$.

Тогава търсеното лице е $S = S_0 - S_{\triangle OAB} - S_{\triangle COD}$. Следователно получаваме

$$S_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1, \qquad S_{OAB} = \frac{e}{2}, \qquad S_{COD} = \frac{1}{2(e-1)}.$$

Сега $S = \dfrac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)}$.

$\square$

Задача 3. Дадена е детерминантата от ред n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

а) Да се пресметнат Δ_2 и Δ_3.

б) Да се докаже, че $\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}$ за $n \ge 3$.

в) Да се пресметне Δ_n, ако a и b са корени на уравнението $x^{n+1} - x + 1 = 0$.

Решение:

а) Непосредствено се пресмята

$$\Delta_2 = a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b} \ ;$$

$$\Delta_3 = a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3 = \frac{a^4 - b^4}{a - b}\ .$$

б) Получава се като се развие Δ_n по първия стълб.

в) На базата на а) естествено възниква хипотезата

$$\Delta_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \quad \text{за} \ \ n \geq 1.$$

Нейната проверка по индукция е непосредствена, като се използва б).

Един друг начин е да се използва характеристичното уравнение на редицата $\Delta_n : x^2 = (a+b)x - ab$, което има корени a и b. Сега $\Delta_n = c_1 a^n + c_2 b^n$, като за константите c_1 и c_2 се получава системата:

$$\left| \begin{array}{l} c_1 a + c_2 b = a + b \\ c_1 a^2 + c_2 b^2 = a^2 + ab + b^2 \end{array} \right. .$$

Естествено крайният резултат е същият. Накрая, като използваме даденото за a и b, получаваме

$$\Delta_n = \frac{a - 1 - (b - 1)}{a - b} = 1.$$

Забележка: В решението до тук негласно се предполага, че $a \neq b$, което донякъде се съгласува с факта, че уравнението $x^{n+1} - x + 1 = 0$ няма кратни корени. Ако обаче $a = b$, лесно се получава

$$\Delta_n = (n+1)a^n.$$

$\square$

Задачи на група B

Задача 1. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$, където x и y са реални числа.

а) Да се намери детерминантата D на матрицата $A.B$.

б) Да се докаже, че точките $M(x, y)$, за които уравнението $3D.u^2+D.u+3 = 0$ няма реални корени, лежат във вътрешността на елипса. Да се определят дължините на осите на елипсата.

в) Ако $x^2 + y^2 \neq 0$ и $A^{2018}.B = B^{2018}.A$, да се докаже, че $A^{2017} = B^{2017}$.

Решение:

а) За детерминантите на A и B имаме съответно $\det \mathrm{A} = 3$ и $\det \mathrm{B} = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}^2$. Следователно $D = 3.(x^2 + 2y^2)$.

б) Дискриминантата на уравнението $3D.u^2 + D.u + 3 = 0$ е

$$D_0 = D^2 - 36.D = 9\big(x^2 + 2y^2\big)\big(x^2 + 2y^2 - 12\big).$$

Разглежданото уравнение няма реални корени, когато $D_0 < 0$. Следователно е изпълнено неравенството $x^2 + 2y^2 - 12 < 0$. Последното неравенство записваме във вида

$$\frac{x^2}{\big(2\sqrt{3}\big)^2} + \frac{y^2}{\big(\sqrt{6}\big)^2} < 1.$$

Следователно, точките $M(x, y)$ лежат вътре в елипсата $\dfrac{x^2}{\big(2\sqrt{3}\big)^2} + \dfrac{y^2}{\big(\sqrt{6}\big)^2} = 1$, полуосите a и b на която имат дължини $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \sqrt{6}$. Следователно, дължините на осите са $2a = 4\sqrt{3}$ и $2b = 2\sqrt{6}$.

в) Равенството $A^{2018}.B = B^{2018}.A$ записваме във вида $A^{2017}.(A.B) = B^{2017}.(B.A)$. Тъй като

$$A.B = B.A = \begin{pmatrix} x + 2y & 2(x - y) \\ -(x - y) & x + 2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то $A^{2017} = B^{2017}$.

$\square$

Задача 2. Дадена е параболата $\pi :\ y^2 = 8.x$. Правата l минава през точката $M(-2, a)$ $(a \in \mathbb{R})$ и е успоредна на оста на π. Параболата π пресича l в точка C и точката A е симетрична на точката $F(2, 0)$ спрямо C.

а) Да се намерят координатите на C.

б) Да се намерят координатите на A.

в) Да се намери броят на общите точки на описаната около $\triangle AMC$ окръжност и параболата π в зависимост от стойностите на a.

Решение:

Тъй като параболата π има канонично уравнение $y^2 = 2.x$ спрямо координатната системa Oxy, то оста на π съвпада с абсцисната ос Ox. Следователно уравнението на l е $y = a$. Системата, образувана от уравненията на l и π, има единствено решение $x = \dfrac{a^2}{8}$ и $y = a$. Затова $l \cap \pi = C\left(\dfrac{a^2}{8}, a\right)$. С това подточка а) е решена.

За координатите на A са изпълнени равенствата

$$x_A = 2x_C - x_F \qquad \text{и} \qquad y_A = 2y_C - y_F.$$

Оттук и резултатът, получен в а), следва, че $A\left(\dfrac{a^2-8}{4}, 2a\right)$. С това е решена подточка б).

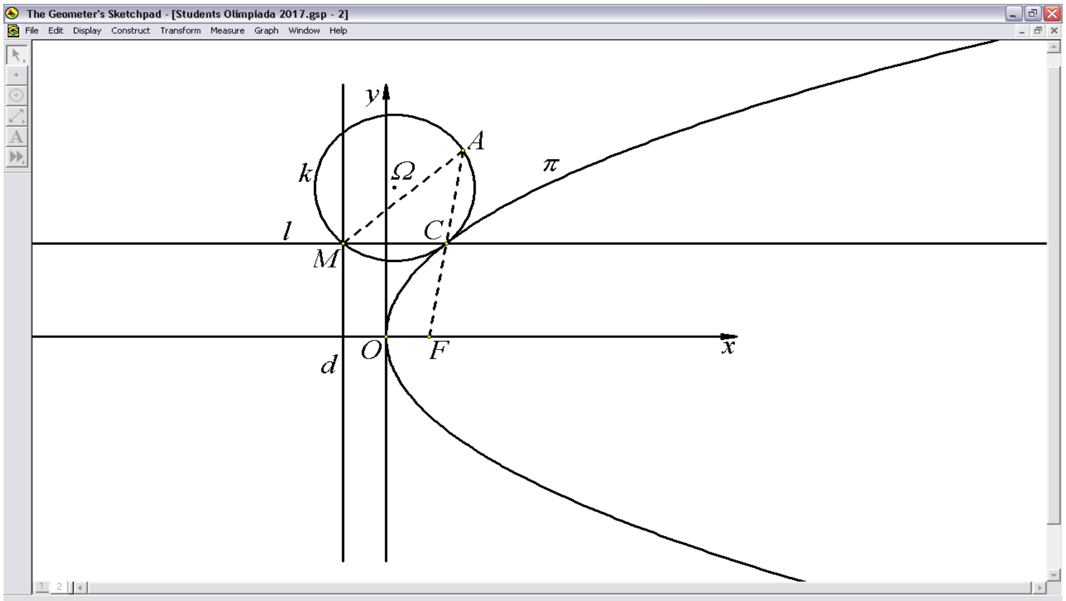
Симетралите S_{CM} и S_{AM} на отсечките CM и AM имат съответно следните уравнения

$$S_{CM} :\ x = \frac{a^2-16}{16} \qquad \text{и} \qquad S_{AM} :\ 8ax + 32y - a\big(a^2+32\big) = 0.$$

Системата, образувана от тези уравнения, има следното решение

$$x_0 = \frac{a^2-16}{16}, \qquad\qquad y_0 = \frac{a\big(a^2+80\big)}{64}.$$

По този начин намерихме координатите (x_0, y_0) на центъра Ω на окръжността k , описана за $\triangle ACM$.



Разстоянието $M\Omega$ е равно на радиуса R на k. От координатите на Ω получаваме равенството

$$R = \left(\frac{a^2+16}{16}\right)^3.$$

Оттук намираме уравнението на окръжността

$$k:\ 32x^2 + 32y^2 - 4(a^2-16)x - a(a^2+80)y + a^2(a^2+40) = 0.$$

От уравненията на k и π получаваме, че ординатите на общите за k и π точки удовлетворяват уравнението

$$(y-a)^2(y^2+2ay+2a^2+80) = 0.$$

За вторият множител в това уравнение имаме

$$y^2+2ay+2a^2+80 = (y+a)^2 + a^2 + 80 > 0.$$

Затова той няма реални корени. Следователно уравнението има един двоен корен $y = a$. Оттук и а) следва, че $C\left(\dfrac{a^2}{8}, a\right)$ е единствената обща точка на k и π при произволно реално число a. Следователно k и π са допирателни за всички реални стойности на a. С това е решена и подточка в).

$\square$

Задача 3. Графиките на функциите $f(x) = x^{2017}$ и $g(x) = a.\ln x \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ имат обща допирателна t в точка T.

а) Да се намерят a и координатите на T.

б) Да се намери уравнението на t.

в) Ако t пресича координатните оси в точките A и B , а O е началото на координатната система, да се намери лицето на $\triangle OAB$.

Решение:

Нека абсцисата на точката T е x_0. Тъй като функциите $f(x)$ и $g(x)$ се допират в T, то $f(x_0) = g(x_0)$ и $f'(x_0) = g'(x_0)$. Затова са изпълнени равенствата

$$x_0^{2017} = a\ln x_0 \qquad \text{и} \qquad 2017x_0^{2016} = \frac{a}{x_0}.$$

Оттук $2017.a\ln x_0 = a$, т.е. $\ln x_0 = \dfrac{1}{2017}$. Следователно $x_0 = \sqrt[2017]{e}$ и $a = 2017e$. Оттук $T\left(\sqrt[2017]{e}, e\right)$. Допирателната t има уравнение

$$y - e = g'\left(\sqrt[2017]{e}\right)\left(x - \sqrt[2017]{e}\right).$$

Оттук следва, че $y = \dfrac{2017e}{\sqrt[2017]{e}}$. Нека $t \cap Ox = A$ и $t \cap Oy = B$. От уравнението на t имаме $A\left(\dfrac{2016}{2017\sqrt[2017]{e}}, 0\right)$ и $B(0, -2016.e)$. Следователно $S_{OAB} = \dfrac{2016^2.e}{4034\sqrt[2017]{e}}$.

□