ТРАДИЦИИ, ПОСОКИ, ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА
Юбилейна национална научна конференция с международно участие
Смолян, 19–21 октомври, 2012

ФОРМУЛИ С ПРОИЗВОЛНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗА НАМИРАНЕ СИЛАТА НА ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОТО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ДВЕ ЗАРЕДЕНИ ПРОВОДЯЩИ СФЕРИ

Драгия Иванов[1], Стефан Божков[2], Кирил Коликов[3]

[1, 2, 3] Пловдивски Университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив, България
[2] bozhkov@uni-plovdiv.bg

FORMULAS WITH ARBITRARY APPROXIMATIONS FOR FINDING THE FORCE OF THE ELECTROSTATIC INTERACTION BETWEEN TWO CHARGED CONDUCTIVE SPHERES

Dragia Ivanov[1], Stefan Bozhkov[2], Kiril Kolikov[3]

[1, 2, 3] Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Plovdiv, Bulgaria
[2] bozhkov@uni-plovdiv.bg

Abstract. *In the present work we derive foreseeable formulas for finding out the force of the electrostatic interaction between two charged conducting spheres of arbitrary non-zero electric charges and radii. They are obtained based on the exact analytical formula, expressed by infinite sums and presented in our previous work. Approximate formulas can be easily derived to previously request finite order and sometimes it's more appropriate to use them instead of the exact formula. Furthermore, we find the inaccuracies (errors) of the values obtained by given approximate formulas to the exact formula.*

Key words: *conductive spheres; electrostatic interaction; image charges*

1. Въведение

Проблемът за извеждане на точна формула за силата на електростатичното взаимодействие между две проводящи сфери с произволни радиуси и наелектризирани с произволни заряди е занимавал учените столетия наред. Още Поасон и Максуел (Maxwell, 1954) са намерили начин за решаване на тази задача, но той е бил твърде сложен, за да може да се използва в общия случай. По-късно чрез метода на зарядовите образи редица автори извеждат по-прости, но приближени формули за силата на взаимодействие между две заредени проводящи сфери, и то в частния случай, когато те са с равни радиуси и заряди (Soules, 1990), (Larson, Goss, 1970), (Slisko, Brito-Orta, 1998).

В предишна наша работа (Kolikov, Ivanov, Krastev, Epitropov, Bozhkov, 2012) ние представяме точни аналитични формули, изразени с безкрайни суми, за намиране силата F и енергията W на електростатичното взаимодействие между две сфери с произволни заряди и радиуси, както и потенциала V в дадена точка от полето, породено от тях. Тези формули обаче, макар и точни, не винаги са лесно приложими за качествен анализ и за решаване на някои видове задачи по електростатика. Във физиката често се използват приближени формули за по-лесно решаване и анализиране на различни проблеми. Например формулата за периода на математично махало, формулата на Томсън за електрически трептящ кръг и други.

Поради това в настоящата работа представяме формули, приближени до произволен избран краен ред, за намиране силата на електростатично взаимодействие между две заредени проводящи сфери.

2. Метод за намиране на електростатичното взаимодействие между две заредени проводящи сфери

Ще представим основна част от метода ни от (Kolikov, Ivanov, Krastev, Epitropov, Bozhkov, 2012) за намиране силата и енергията на електростатичното взаимодействие между две сфери.

Нека S_1 и S_2 са две незаземени наелектризирани проводящи сфери, съответно, със заряди Q_1, Q_2 и радиуси r_1, r_2. Да означим с R разстоянието между центровете им O_1, O_2 в инерциална система J. Тъй като зарядите Q_1 и Q_2 са равномерно разпределени по повърхнините на S_1 и S_2 приемаме, че преди взаимодействието между сферите те са съсредоточени съответно в центровете O_1 и O_2.

В резултат на електростатичното взаимодействие между S_1 и S_2, по техните повърхнини се появяват индуцирани заряди $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$, които са свързани помежду си. Формално можем да считаме, че тези заряди са разположени върху отсечката O_1O_2. По повърхнините на S_1 и S_2 се получават равномерно разпределени заряди $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$, които можем да приемем, че са съсредоточени в центровете им O_1 и O_2.

От закона за съхранение на електричния заряд са в сила равенствата

$$\overline{Q}_1 = Q_1 - \tilde{Q}_1 \quad \text{и} \quad \overline{Q}_2 = Q_2 - \tilde{Q}_2 . \tag{1}$$

Ще определим зарядите $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$, а оттам зарядите $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$. Нека вследствие на Q_1 се пораждат зарядите-образи $Q_{1,j}$ ($j = 1,2,3,...$). Понеже всеки заряд $Q_{1,j}$ поражда $Q_{1,j+1}$, то зарядите с нечетен индекс $Q_{1,2m-1}$ ($m = 1,2,3,...$) са разположени в сферата S_2, а зарядите с четен индекс $Q_{1,2m}$ – в сферата S_1. Аналогично се определят и зарядите-образи $Q_{2,j}$ ($j = 1,2,3,...$), породени вследствие заряда Q_2. Зарядите с нечетен индекс $Q_{2,2m-1}$ ($m = 1,2,3,...$) са разположени в сфера S_1, а зарядите с четен индекс $Q_{2,2m}$ – в сферата S_2.

Да означим $\delta_1 = \dfrac{r_1}{R}$ и $\delta_2 = \dfrac{r_2}{R}$. Въвеждаме за $j = 1,2,3,...$ следните означения:

$$\begin{aligned}
A_{1,j} &= 1 + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \sum_{s=0}^{k} \binom{j-1-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2(k-s)} \delta_2^{2s} , \\
A_{2,j} &= 1 + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \sum_{s=0}^{k} \binom{j-1-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2s} \delta_2^{2(k-s)} , \\
B_{1,j} &= 1 + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \sum_{s=0}^{k} \binom{j-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2(k-s)} \delta_2^{2s} ,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$B_{2,j}=1+\sum_{k=1}^{j}(-1)^k\sum_{s=0}^{k}\binom{j-s}{k-s}\binom{j-k+s}{s}\delta_1^{2s}\delta_2^{2(k-s)}\,.$$

Ако $d_{i,j}$ $(i=1,2;\ j=1,2,3,...)$ са разстоянията на зарядите-образи $Q_{i,j}$, съответно до центровете на сферите O_i, то в (Kolikov, Ivanov, Krastev, Epitropov, Bozhkov, 2012) получаваме, че:

$$d_{1,2m-1}=\delta_2^2\,R\frac{A_{1,m-1}}{B_{1,m-1}},\ \ d_{1,2m}=\delta_1^2\,R\frac{B_{1,m-1}}{A_{1,m}},\ \ d_{2,2m-1}=\delta_1^2\,R\frac{A_{2,m-1}}{B_{2,m-1}},\ \ d_{2,2m}=\delta_2^2\,R\frac{B_{2,m-1}}{A_{2,m}}\,. \quad (3)$$

Установяваме още, че:

$$Q_{1,2m-1}=-\frac{\delta_1^{m-1}\delta_2^m}{B_{1,m-1}}\overline{Q}_1,\ \ Q_{1,2m}=\frac{\delta_1^m\delta_2^m}{A_{1,m}}\overline{Q}_1,\ \ Q_{2,2m-1}=-\frac{\delta_1^m\delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}}\overline{Q}_2,\ \ Q_{2,2m}=\frac{\delta_1^m\delta_2^m}{A_{2,m}}\overline{Q}_2\,. \quad (4)$$

Нека

$$X_1=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_1^m\delta_2^m}{A_{1,m}},\ \ X_2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_1^m\delta_2^m}{A_{2,m}},\ \ Y_1=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_1^{m-1}\delta_2^m}{B_{1,m-1}},\ \ Y_2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_1^m\delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}}, \quad (5)$$

където $\delta_i^0=1$ при $\delta_i=0$ ($i=1,2$).

Тъй като зарядите $\tilde{Q}_1$ и $\tilde{Q}_2$ са суми от всички заряди-образи, разположени съответно в сферите S_1 и S_2, то $\tilde{Q}_1=\sum_{m=1}^{\infty}Q_{1,2m}+\sum_{m=1}^{\infty}Q_{2,2m-1}$ и $\tilde{Q}_2=\sum_{m=1}^{\infty}Q_{1,2m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}Q_{2,2m}$. Оттук и от равенствата (4) и (5) следва, че

$$\tilde{Q}_1=\overline{Q}_1X_1-\overline{Q}_2Y_2 \quad \text{и} \quad \tilde{Q}_2=-\overline{Q}_1Y_1+\overline{Q}_2X_2\,.$$

Тогава, замествайки тези изрази в (1), получаваме:

$$\overline{Q}_1=\frac{Q_1(1+X_2)+Q_2Y_2}{(1+X_1)(1+X_2)-Y_1Y_2},\qquad \overline{Q}_2=\frac{Q_2(1+X_1)+Q_1Y_1}{(1+X_1)(1+X_2)-Y_1Y_2}\,. \quad (6)$$

Означаваме зарядите от (4) и (6), които са разположени в сферата S_1 с Q'_j, а тези които са разположени в сферата S_2 с Q''_j ($j=0,1,2,...$). При това $Q_{1,0}=\overline{Q}_1=Q'_0$ и $Q_{2,0}=\overline{Q}_2=Q''_0$, а за $m=1,2,3,...$, $Q_{2,2m-1}=Q'_{2m-1}$, $Q_{1,2m}=Q'_{2m}$ и $Q_{1,2m-1}=Q''_{2m-1}$, $Q_{2,2m}=Q''_{2m}$. Съответните им разстояния до центровете на сферите, в които лежат означаваме с d'_j и d''_j ($j=0,1,2,...$), където $d'_0=d''_0=0$.

Ако $\delta'_j=\frac{d'_j}{R}$, а $\delta''_j=\frac{d''_j}{R}$ то, съгласно закона на Кулон, за големината F на проекцията на силата на взаимодействие върху O_1O_2, действаща на сфери S_1 и S_2, в (Kolikov, Ivanov, Krastev, Epitropov, Bozhkov, 2012) получаваме

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{Q'_jQ''_t}{\left(1-\delta'_j-\delta''_t\right)^2}\,. \quad (7)$$

А за потенциалната енергия на взаимодействие между сферите S_1 и S_2, в (Kolikov, Ivanov, Krastev, Epitropov, Bozhkov, 2012) получаваме

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{Q'_jQ''_t}{1-\delta'_j-\delta''_t}\,. \quad (8)$$

3. Приближени формули за намиране на електростатичната сила на взаимодействие между две заредени проводящи сфери

Нека сферите S_1 и S_2 са с ненулеви заряди $Q_1 \neq 0$ и $Q_2 \neq 0$ и $\dfrac{Q_2}{Q_1} = k$. Тогава от формула (6) следва, че $\overline{Q}_1 = Q_1 \overline{L}_1$, $\overline{Q}_2 = Q_2 \overline{L}_2$, където

$$\overline{L}_1 = \frac{1 + X_2 + kY_2}{(1+X_1)(1+X_2) - Y_1Y_2}, \qquad \overline{L}_2 = \frac{1 + X_1 + k^{-1}Y_1}{(1+X_1)(1+X_2) - Y_1Y_2}.$$

От равенствата (4) и (6) следва, че $Q_{i,j} = Q_i L_{i,j}$ за $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, \dots$, където за $m = 1, 2, 3, \dots$ имаме

$$L_{1,2m-1} = -\frac{\delta_1^{m-1}\delta_2^m}{B_{1,m-1}}\overline{L}_1, \quad L_{1,2m} = \frac{\delta_1^m\delta_2^m}{A_{1,m}}\overline{L}_1, \quad L_{2,2m-1} = -\frac{\delta_1^m\delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}}k\overline{L}_2, \quad L_{2,2m} = \frac{\delta_1^m\delta_2^m}{A_{2,m}}k\overline{L}_2.$$

Да означим

$$L'_0 = \overline{L}_1,\ L'_{2m-1} = L_{2,2m-1},\ L'_{2m} = L_{1,2m} \text{ и } L''_0 = \overline{L}_2,\ L''_{2m-1} = k^{-1}L_{1,2m-1},\ L''_{2m} = k^{-1}L_{2,2m}.$$

Тогава формула (7) можем да запишем във вида

$$F = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{L'_jL''_i}{\left(1 - \delta'_j - \delta''_i\right)^2}, \quad \text{т.е. } F = F_C L, \tag{9}$$

където коефициентът

$$L = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{L'_jL''_i}{\left(1 - \delta'_j - \delta''_i\right)^2}. \tag{10}$$

се дължи на геометрията на двете сфери. Така, ако $L = 1$, то силата F съвпада с кулоновата сила $F_C = \dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

Да въведем следните означения: $l = \dfrac{r_2}{r_1}$ и $\delta = \delta_1 = \dfrac{r_1}{R}$. Коефициента L развиваме в степенен ред по степените на δ и получаваме

$$\begin{aligned} L = k &- 2\left(k^2 + l^3\right)\delta^3 - 3\left(k^2 + l^5\right)\delta^5 + 14kl^3\delta^6 - 4\left(k^2 + l^7\right)\delta^7 + 27kl^3\left(1 + l^2\right)\delta^8 - \\ &- 5\left(k^2 + 4k^2l^3 + 4l^6 + l^9\right)\delta^9 + 22kl^3\left(2 + 3l^2 + 2l^4\right)\delta^{10} + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

В зависимост от конкретния случай, може да се изчислява коефициент L до определен краен брой членове от реда (11), като останалите членове не се отчитат, поради пренебрежимо малкото си влияние върху крайния резултат. Тогава за силата на електростатично взаимодействие от формула (9) получаваме приближението

$$F_A = F_C L_A. \tag{12}$$

Приближението F_A може да се направи произволно близко до точната стойност на F, като се вземат достатъчно голям брой членове от безкрайния ред (11).

Аналогично с помоща на формула (8), могат да се намерят приближени формули W_A за потенциалната енергия W на взаимодействие между две заредени сфери.

4. Частни случаи

Ще представим някои често срещани частни случаи:

1) Сферите S_1 и S_2 са с равни едноименни заряди $Q_1 = Q_2$ и равни радиуси $r_1 = r_2$, т.е. $k = 1$ и $l = 1$. Тогава формула (9) може да се запише във вида

$$F = F_C(1 - 4\delta^3 - 6\delta^5 + 14\delta^6 - 8\delta^7 + 54\delta^8 - 50\delta^9 + 154\delta^{10} - ...) . \tag{13}$$

Да отбележим, че формула (13) е изведена по друг начин и в (Slisko, Brito-Orta, 1998).

2) Сферите S_1, S_2 са с различни заряди $Q_1 \neq Q_2$ и равни радиуси $r_1 = r_2$, т.е. $k \neq 1$ и $l = 1$. Тогава формула (9) може да се запише във вида

$$\begin{aligned} F = F_C(k - 2\left(1 + k^2\right)\delta^3 - 3\left(1 + k^2\right)\delta^5 + 14k\delta^6 - 4\left(1 + k^2\right)\delta^7 + 54k\delta^8 - \\ - 5\left(5 + 5k^2\right)\delta^9 + 154k\delta^{10} - ...) \end{aligned} . \tag{14}$$

3) Сферите S_1, S_2 са с равни едноименни заряди $Q_1 = Q_2$ и различни радиуси $r_1 \neq r_2$, т.е. $k = 1$ и $l \neq 1$. Тогава формула (9) може да се запише във вида

$$\begin{aligned} F = F_C(1 - 2\left(1 + l^3\right)\delta^3 - 3\left(1 + l^5\right)\delta^5 + 14l^3\delta^6 - 4\left(1 + l^7\right)\delta^7 + 27l^3\left(1 + l^2\right)\delta^8 - \\ - 5\left(1 + 4l^3 + 4l^6 + l^9\right)\delta^9 + 22l^3\left(2 + 3l^2 + 2l^4\right)\delta^{10} - ...) \end{aligned} . \tag{15}$$

Да подчертаем, че формули (11) и (13–15) лесно могат да се запишат с произволен краен брой членове, използвайки компютърни алгоритми или специализиран математически софтуер.

5. Неточност на приближените формули, спрямо точната формула

При $Q_1 \neq 0$ и $Q_2 \neq 0$ от формули (9–12) следва, че *неточността* (*грешката*) ΔF_A на приближената формула (12) относно силата на електростатичното взаимодействие F между проводящите сфери S_1 и S_2 е

$$\Delta F_A = \left|F_A - F\right| = \left|F_C\right|\left|L_A - L\right| . \tag{16}$$

Тогава, съгласно [КЕК], относителната грешка $\dfrac{\Delta F_A}{\left|F_A\right|}$ на F_A относно F е

$$\frac{\Delta F_A}{\left|F_A\right|} = \frac{\Delta L_A}{\left|L_A\right|} = \left|1 - \frac{L}{L_A}\right| . \tag{17}$$

От (17) лесно се вижда, че за да се получи по-малка грешка е необходимо да се вземат повече на брой членове от реда (11).

Заключение

Представянето в степенния ред (11) е доста по-обозримо, отколкото във вида (10), което прави по-лесно прилагането му за решаване на редица задачи.

Така формула (12) за намиране силата на електростатичното взаимодействие между две наелектризирани проводящи сфери с произволни заряди и радиуси, е много подходяща за качествен анализ при изучаване на електростатичните взаимодействия в много конкретни случаи.

Благодарност

Резултатите от настоящите изследвания се публикуват с финансовата подкрепа на Фонд „Научни изследвания” към МОМН по договор № ДТК 02/35.

Литература

Maxwell, J. A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. 1, Dover, 1954.

Soules, Jack Precise calculation of the electrostatic force between charged spheres including induction effects. // American Journal of Physics, 1990, N 58, c. 1195-1199.

Larson, C.O. and Goss, E.W. A Coulumb’s law balance suitable for physics majors and nonscience students. // American Journal of Physics, 1970, N 38, c. 1349–1352.

Slisko, Josip and Brito-Orta, Raul On approximate formulas for the electrostatic force between two conducting spheres. // American Journal of Physic, 1998, N 66, c. 352-355.

Kolikov, Kiril, Ivanov, Dragia, Krastev, Georgi, Epitropov Yordan and Bozhkov Stefan Electrostatic interaction between two conductive spheres. // Journal of Electrostatics, 2012, N 70, c. 91-96.

Kolikov, Kiril, Krastev, Georgi, Epitropov, Yordan and Corlat, Andrei Analytically determining of the relative inaccuracy (error) of indirectly measurable variable and dimensionless scale characterising the quality of the experiment // CSJM, 2012, N 1, c. 314-331.