ТРАДИЦИИ, ПОСОКИ, ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА
Юбилейна национална научна конференция с международно участие
Смолян, 19–21 октомври, 2012

МЕТОДИЧЕСКИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НА ИЗУЧАВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СРЕДНИ

Димитър Френкев

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”, Филиал Смолян, България
d_frenkev@abv.bg

METHODOLOGICAL INTERPRETATIONS OF LEARNING INEQUALITIES BETWEEN MEANS

Dimitar Frenkev

Plovdiv University “Paisii Hilendarski”, Branch Smolyan, Bulgaria
d_frenkev@abv.bg

Abstract. *In [С. П. Актершев, 2005] we find ideas about solving problems for “searching for the best” in the context of the principle “The best is what is impossible to improve”. The same ideas have been used here in order to work out approaches that can stimulate research work in the process of learning inequalities between means and their applied aspects. The publication can be used for work with university students who study elective and/or optional subjects, related to ideas and methods of solving problems from the school mathematics course, but it can be used by teachers as well.*

Key words: *function, extreme value of a function at certain conditions for the variables, inequalities between means*

В [С. П. Актершев, 2005, с. 45-86] въз основа на принципа „Най-доброто е това, което е невъзможно да се подобри“ са разработени идеи за решаване на алгебрични и геометрични задачи за намиране на екстремални стойности, едно от предимствата на които е, че са сравнително достъпни за учениците и допринасят за развиване на причинно-следственото им мислене. Тези идеи могат да се използват и за разработване на системи от задачи и методи за тяхното решаване с цел запознаване с неравенства между средни и с техни практико-приложни аспекти без да се използва допълнителна теория, като Неравенството на Йенсен, Методът на ретроградната индукция и др. Тук поради ограничения обем са представени само някои по-важни елементи на една такава примерна система от задачи със съответни методически акценти.

Задача 1. *Променливите $x_1, x_2, ..., x_n$ приемат само неотрицателни стойности. Ако сумата $x_1 + x_2 + ..., + x_n$ е постоянна, да се изследва при какво условие за променливите, произведението $P_n = x_1 x_2 ... x_n$ достига най-голямата си стойност и да се намери тази стойност.*

“*Без знания няма размишления, без размишления няма знания* (*Японска пословица*)”

Решение: За краткост често вместо израза „неотрицателните стойности на променливите $x_1, x_2, ..., x_n$” ще казваме ”неотрицателните числа $x_1, x_2, ..., x_n$”. В общия случай измежду тези числа има поне две различни и нека например $x_1 \neq x_2$.

Прилагайки евристичния „Метод на малките изменения”, изследваме как се променят стойностите на произведението $P_n = x_1\, x_2\, ...\, x_n$, при сближаване стойностите на променливите x_1 и x_2, но като се запазят стойностите на $x_3, x_4, …, x_n$ и сумата $x_1 + x_2 + ..., + x_n = c$. За определеност приемаме, че $0 \le x_1 < x_2$, а ε_1 и ε_2 са числа между 0 и $x_2 - x_1$. Поради $(x_1+\varepsilon_1) + (x_2-\varepsilon_2) + x_3 + … + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + … + x_n = const$ получаваме $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Тъй като стойностите на $x_3, x_4, …, x_n$ се запазват, то изменението на стойностите на произведението $P_n = x_1\, x_2\, ...\, x_n$ зависи от промяната на стойностите на произведението $P_2 = x_1.x_2$. Очевидно сближаването на стойностите на променливите x_1 и x_2 е равносилно на намаляване стойността на израза $|x_2 - x_1|$. Разглеждаме случаите:

а) $0 < \varepsilon < \dfrac{x_2 - x_1}{2}$. Тогава $|(x_2-\varepsilon)-(x_1+\varepsilon)| = x_2 - x_1 - 2\varepsilon < x_2 - x_1$.

б) $\dfrac{x_2 - x_1}{2} \le \varepsilon < x_2 - x_1$. Тогава $x_2 - x_1 \le 2\varepsilon < 2x_2 - 2x_1$, от което следва

$$0 \le 2\varepsilon + x_1 - x_2 = |(x_2-\varepsilon)-(x_1+\varepsilon)| < x_2 - x_1$$

Следователно във всички случаи числата $x_1+\varepsilon$ и $x_2-\varepsilon$ са по-близки едно до друго в сравнение с числата x_1 и x_2.

Поради $(x_1+\varepsilon)(x_2-\varepsilon) = x_1x_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) > x_1x_2 = P_2$ получаваме следния резултат: ако се сближават стойностите на променливите x_1 и x_2 (без да се променя сумата $x_1 + x_2$, респ. $x_1 + x_2 + ..., + x_n$), то стойността на произведението $P_2 = x_1.x_2$, а следователно (при запазване стойностите на $x_3, x_4, …, x_n$) и стойността на произведението $P_n = x_1\, x_2\, ...\, x_n$, се увеличава.

Сближаването на стойностите на x_1 и x_2 може да се разглежда като причина (признак-фактор), а съответното увеличение на стойността на произведенията $P_2 = x_1.x_2$ и $P_n = x_1\, x_2\, ...\, x_n$ – следствие (резултативен признак). Очевидно „причината” може да се проявява до тогава, докато стойностите на $x_1, x_2, ..., x_n$ станат равни (граничен случай). Но тогава не е възможно повече да се увеличава стойността на произведението P_n и вероятно при $x_1 = x_2 = ... = x_n$ (и $x_1 + x_2 + ... + x_n = const$) стойността му е най-голяма.

Ще докажем, че при всяко друго условие за променливите, произведението P_n не може да достига най-голямата си стойност.

Нека, например, $x_1 \ne x_2$ и да сравним произведенията $(x_1x_2)x_3x_4...x_n$ и $(aa)x_3x_4...x_n$, при условие $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = a + a + x_3 + ... + x_n = c$, т.е. $a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Имаме: $x_1 \ne x_2 \Leftrightarrow 0 < (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1x_2 < \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1x_2)x_3x_4...x_n < \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3x_4...x_n$

Следователно наистина най-голямата стойност на произведението $P = x_1\, x_2\, ...\, x_n$ се получава при $x_1 = x_2 = ... = x_n$ и $x_1 + x_2 + ... + x_n = const$. От друга страна:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n \Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n = nx_1, \Rightarrow\ x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Тогава най-голямата стойност на произведението $P_n = x_1\, x_2\, ...\, x_n$ е:

$$P_{n,\max} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.....\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^n.$$

Задача 2. *Ако числата x_1, x_2 и x_3 са положителни и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = x_1^3x_2^4x_3^2$.*

Решение. За да може да се използва равенството $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, разглеждаме функцията $(x_1^3 x_2^4 x_3^2)$:$(3^3 4^4 2^2)$ = $\frac{x_1}{3}\frac{x_1}{3}\frac{x_1}{3}.\frac{x_2}{4}\frac{x_2}{4}\frac{x_2}{4}\frac{x_2}{4}.\frac{x_3}{2}\frac{x_3}{2}$ със сума на множителите 1. Имаме:

$$\frac{x_1}{3}\frac{x_1}{3}\frac{x_1}{3}.\frac{x_2}{4}\frac{x_2}{4}\frac{x_2}{4}\frac{x_2}{4}.\frac{x_3}{2}\frac{x_3}{2} \le \left(\frac{\frac{x_1}{3}+\frac{x_1}{3}+\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_3}{2}+\frac{x_3}{2}}{9}\right)^9 = \left(\frac{1}{9}\right)^9.$$

Най-голямата стойност на $f(x) = x_1^3 x_2^4 x_3^2$ е равна на $(3^3 4^4 2^2).\left(\frac{1}{9}\right)^9$, като тя се получава при $\frac{x_1}{3}=\frac{x_2}{4}=\frac{x_3}{2}$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, т.е. $x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{4}{9}, x_3=\frac{2}{9}$.

„Бързото натрупване на знания, придобити със съвсем малко самостоятелно участие, не е много плодотворно. Такава ученост може да роди само листа, без да дава плодове (Г. Лихтенберг)“

Следващите задачи са подходящи за самостоятелна работа, като по преценка на обучаващия, могат да се дават и приложените упътвания.

Задача 3. *Променливите x_1, x_2, ..., x_n приемат само неотрицателни стойности. Ако произведението $x_1.x_2. \ldots .x_n = p_n$ е с постоянна стойност, да се изследва при какво условие за променливите, сумата $S_n = x_1 + x_2 + \ldots, + x_n$ достига най-малката си стойност и да се намери тази стойност.*

Упътване. Приемете, че измежду числата x_1, x_2, ..., x_n има поне две различни, например, $x_1 \ne x_2$, и сравнете сумите $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$ и $a+a+x_3+\ldots+x_n$ при $(x_1x_2)x_3x_4\ldots x_n$ = $(aa)x_3x_4\ldots x_n$, т.е. при $a=\sqrt{x_1x_2}$. За целта използвайте твърдението $x_1 \ne x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2 > 2\sqrt{x_1x_2}$ и монотонното свойство на събирането. Преценете как се променя стойността на сумата S_n, ако в нея се извърши замяна на две неравни събираеми, например, x_1 и x_2 с едно и също число *a*, запазвайки произведението p_n. Използвайте, че $x_1=x_2=\ldots=x_n$ и $x_1x_2\ldots x_n = p_n$. Отг. $S_{n,\min} = n\sqrt[n]{p_n}$.

Забележка. Може в системата от задачи, задача 3 да предхожда задача 1, но тогава трябва да се изследва поведението на сумата S_n при сближаване стойностите на две различни събираеми, например, x_1 и x_2, като се запази стойността на произведението p_n. Докажете, че ако $0 \le x_1 < x_2$ и за числото λ е в сила $1<\lambda<\frac{x_2}{x_1}$, то:

$x_1 \ne x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2 > x_1\lambda + x_2\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow (x_1+x_2)+x_3+\ldots+x_n > (x_1\lambda + x_2\frac{1}{\lambda})+x_3+\ldots+x_n$.)

Задача 4. *Да се намери най-малката стойност на функцията:*

а) $f(x)=2x^4+\frac{3}{x^5}$*, при* $x>0$; *б)* $f(x)=ax^n+\frac{b}{x^m}$*, при* $x>0$.

Упътване: а) Представете функцията $f(x)=2x^4+\frac{3}{x^3}$ както следва: $f(x)==\frac{2x^4}{3}+\frac{2x^4}{3}+\frac{2x^4}{3}+\frac{3}{4x^3}+\frac{3}{4x^3}+\frac{3}{4x^3}+\frac{3}{4x^3}$. Тогава произведението на събираемите ще бъде константа. б) Постъпете аналогично.

„Нищо не съществува, докато мисълта не го сътвори (*У. Шекспир*)"

Следствие 1. *(Неравенство на Коши). За всяка* n*-торка неотрицателни числа* $x_1, x_2, \ldots,$ x_n *е в сила* $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, *като равенството се достига при* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Забележка. Следва от фактите, че сумата $x_1 + x_2 + \ldots, + x_n = c$ в условието на задача 1 и произведението $x_1.x_2.\ldots.x_n = p$ в условието на задача 2 са фиксирани произволно.

Следствие 2. *(Неравенство между средното хармонично и средното геометрично на* n *положителни числа). За всяка* n*-торка положителни числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *е в сила неравенството:* $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, *като равенството се достига при* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Забележка. Доказва се като първо се приложи неравенството на Коши за реципрочните стойности на числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}$, след което трябва да се сравнят реципрочните стойности на двете страни на това неравенство.

„Който има знание, но не го прилага, прилича на онзи, който разорава нива, но не хвърля семе (*Саади*)"

Задача 8 в [1. С. П. Актершев, 2005, с. 68] може да се преформулира по следния начин:

Задача 5. *От ламаринен кръг с радиус* R *да се изработи фуния с най-голяма вместимост.*

Решение. Изисква се от ламаринения кръг да се изреже образователна на конус с най-голям обем. Той е равен на V = $\frac{1}{3}\pi.r^2.h$, където r е радиуса на основата на конуса. Тъй като $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, то $V = \frac{1}{3}\pi.r^2\sqrt{R^2 - r^2}$. Тогава обемът на конуса има най-голяма стойност, когато $P = \pi.r^2\sqrt{R^2 - r^2}$, респ. $P^2 = r^4\left(R^2 - r^2\right)$, има най-голяма стойност, зависеща от r. За да използваме неравенството на Коши, преобразуваме последния израз в произведение така, че сборът от множителите да е постоянно число: $\frac{P^2}{4} = \frac{r^2}{2}.\frac{r^2}{2}\left(R^2 - r^2\right)$. Имаме: $\sqrt[3]{\frac{r^2}{2}\frac{r^2}{2}\left(R^2 - r^2\right)} \le \frac{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + R^2 - r^2}{3} = \frac{R^2}{3}$, като равенство настъпва при $\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2 \Leftrightarrow r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

От друга страна, ако α е ъгъла на сектора, който трябва да се изреже от ламаринения кръг, то дължината на дъгата на останалия сектор е равна на $R(2\pi - \alpha)$, а тя се явява дължината на основата на конуса, който пък е равен на $2\pi.r$. От $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $2\pi.r = R(2\pi - \alpha)$ следва $\alpha = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Задача 6. *Какви размери трябва да има кибритена кутия с даден обем V, щото сумата S от лицата на пълните повърхнини на вътрешната и външната част да бъде минимална? ([1., С. П. Актершев, 2005, с. 66-67])*

Упътване. Ако V = abc, то $S = 4ac+3ab+2bc = \frac{4V}{b}+\frac{3V}{c}+\frac{2V}{a}$.

Полезно е учещите да коментират подхода, чрез който се достига до неравенството на Коши. Важно е да се отбележи, че се получават не просто знания за това неравенство, а се овладяват идеи и методи за решаване на определени задачи.

„*Вдъхновението е внезапно проникване в истината* (*В. Г. Белински*)“

Добре би било да се сравнят условията, изискванията и решенията на задачите 1. и 3., да се открие съществено сходно в тях, особено в техните задачи-компоненти и в ключовите елементи на тяхната теоретична база, и въз основа на това да се опише накратко общия вид на задачите и съответния алгоритъм за решаване. Например:

За някои функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ намирането на екстремални стойности, при условие $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ на променливите й, може да се осъществява по следния начин:

1) Намира се условие $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ за променливите, при което функцията (при изпълнение на условието $P(x_1, x_2, ..., x_n)$) достига екстремалната си стойност (За целта може да се използва принципа "Ако нещо не е възможно повече да се увеличи (намали), вероятно то е най-голямата (най-малката) стойност").

2) Доказва се, че при всяко друго условие за променливите, функцията не може да приема екстремалната си стойност. (За целта може по-напред да се намери теоретичната база на необходимото и достатъчно условие за неизпълнение на условието $Q(x_1, x_2)$ (но при изпълнение на условието $P(x_1, x_2, ..., x_n)$), след което да се приложи монотонното свойство на съответното аритметично действие.)

3) На базата на условията $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ се определят стойностите на променливите, при които функцията $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ получава екстремалната си стойност и се намира тази стойност.

Полезно е учещите самостоятелно да верифицират описания подход, като го приложат за решаване на следната задача (по възможност е добре да идентифицират функцията $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и условията $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Задача 7. *Условие $P(x_1, x_2, ..., x_n)$: Променливите x_1, x_2, ..., x_n приемат само неотрицателни стойности и стойността на сумата им $x_1 + x_2 + ... + x_n = c$ е постоянна.*

Изискване: При какво условие $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, изразът S_n = $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ = $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ достига най-малката си стойност и коя е тази стойност?

„Което не разбирате, не ви принадлежи (Й. В. Гьоте)“

Упътване. Приемете, че измежду числата x_1, x_2, ..., x_n има поне две различни, например $x_1 \neq x_2$ и сравнете сумите $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2$ и $a^2 + a^2 + x_3^2 + ... + x_n^2$ при условие, че $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ = $a + a + x_3 + ... + x_n$, т.е. при a = $\frac{x_1 + x_2}{2}$. За целта използвайте, че $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 > 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$, както и монотонното свойство на събирането. Изследвайте как се променя стойността на сумата S_n = $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, при извършване на замяна на две неравни събираеми, например x_1 и x_2, с едно и също число *a*, което запазва сумата $x_1 + x_2 + ..., + x_n = c$. Използвайте, че при $x_1 = x_2 = ... = x_n$ (условие $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$) и $x_1 + x_2 + ..., + x_n = c$ имаме $x_i = \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right), i = 1,2,...,n$. Отг. $S_{n,\min} = n\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2$.

След решаването на тази задача е добре да се представят компактно връзките между получените неравенства и да се опишат със съответните термини:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

Задача 8. *Ако числата x_1, x_2 и x_3 са положителни и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, да се намери най-малката стойност на сумата: S =* $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$.

Упътване. За числата $x_1, \frac{x_2}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_3}{2}$ да се приложи неравенството между средното аритметично и средното квадратично в следния вид:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} \ge \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2.$$

Задача 9. *Да се докаже, че ако* $x_i > 0, i = 1,2,...,n; n \ge 2$ *и сумата $x_1 + x_2 + ... + x_n = c$ е постоянна, то е в сила* $\left(x_1 \pm \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 \pm \frac{1}{x_2}\right)^2 + ... + \left(x_n \pm \frac{1}{x_n}\right)^2 \ge \left(\frac{c}{n} \pm \frac{n}{c}\right)^2$.

Упътване. Да се приложи неравенството $\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} \ge \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2$.

Задача 10. *Ако числата x_1, x_2 и x_3 са положителни и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, да се намери най-малката стойност на израза:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \pm \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 \frac{\sqrt{3}}{3} \pm \frac{3\sqrt{3}}{x_2}\right)^2 + \left(x_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{x_3}\right)^2.$$

Упътване. Да се докаже, че

$$\left(x_1 \pm \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 \frac{\sqrt{3}}{3} \pm \frac{3\sqrt{3}}{x_2}\right)^2 + \left(x_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{x_3}\right)^2 \ge \left(\frac{1}{6} \pm \frac{6}{1}\right)^2.$$

В заключение ще отбележа, че запознаването на студенти и ученици с подходи и методи за сравнително достъпно разглеждане на класически твърдения и техни приложни аспекти допринася съществено за повишаване на техния интерес към математиката.

Литература

Актершев, С. П. Задачи на максимум и минимум. Санкт-Петербург, 2005. 188 с.