

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”

СИНТЕТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Боян Златанов и Бистра Царева

ПЛОВДИВ 2014

Синтетичната геометрия е геометрична дисциплина, която изучава свойствата на фигурите само с методите на геометрията - без да използва апарата на алгебрата, както е в аналитичната геометрия или апарата на диференциалното и интегралното смятане, както е в диференциалната геометрия.

Настоящият учебник предлага интерактивно обучение по геометрия в динамична среда. Чертежите са изработени с помощта на специализирания динамичен геометричен софтуер Sam и се съдържат в Библиотеката, която е част от учебника. Студентите могат да експериментират върху чертежите, да проследяват последователността на построенията, да творят, използвайки възможностите на софтуера. Кадри от динамичните чертежи присъстват в текстовата част на учебника, за да подпомагат читателя при началния прочит.

Упражненията със задачи, касаещи разглеждания теоретичен материал, го следват непосредствено. Изборът на задачите осъществява вертикална интеграция на обучението във висшите и средни училища.

Учебникът е структуриран в две части: проективна геометрия и дескриптивна геометрия.

В първата част на настоящия учебник е изградено аксиоматично проективното пространство на базата на трите групи аксиоми: аксиоми на инцидентността, аксиоми на наредбата и аксиома на непрекъснатостта.

Въведени са:

Едноизмеримите фигури и са изучени проективностите (в частност – перспективност и инволюция);

Двуизмеримите фигури и са изучени колинеациите и корелациите (в частност – хомология и полярност, афинитет, афинна хомология, подобност).

Теорията на коничните сечения е изградена чрез подхода на Щаут, т.е. дефиницията им се основава на понятието полярност.

Проективните, афинните и метричните свойства на коничните сечения са подробно изложени и представени като инвариантни свойства съответно на проективната, афинната и метричната групи преобразования.

Дадена е проективна трактовка на афинната и евклидовата геометрии. Представянето на проективната форма на евклидовата метрика позволява естествено, по синтетичен път да се посочат и други метрики, различни от евклидовата.

Основната част на съдържанието на втората част е върху **аксонометрия**: видове аксонометрични проекции, изобразяване на фигури, възможности за оптимизиране на чертожната работа в учебните часове и часовете за самостоятелна работа по геометрия.

Темата „Взаимно пресичане на призми и пирамиди” се изучава с помощта на специализиран софтуер Sam-full, позволяващ проследяване на всички стъпки в решението и възможности за импровизации върху поставена тема.

Аксонометрията се предхожда от параграф, в който се разглеждат от стереометрична гледна точка свойствата на обекти, изобразявани при успоредно проектиране (валидни както за Монжова проекция така и за аксонометрия), което позволява по-бързо запознаване с основните операции и в Монжова проекция.

Предлаганите лекционни записки са написани въз основа на четените лекции по Синтетична геометрия в динамична среда от единия от авторите Бистра Царева пред студенти от специалностите „Математика”, „Математика и информатика” (Факултет по математика, информатика и информационни технологии), „Физика и математика” (Факултет по Физика и инженерни технологии), като са разширени и адаптирани за нуждите на проекта BG051PO001-4.3.04-0064 „Пловдивски електронен университет (ПеУ): национален еталон за провеждане на качествено е-обучение в системата на висшето образование.”

Авторите

1 Динамични геометрични софтуери

Важен аспект в уменията и практиката на добрия учител по математика е да представи пред своите ученици предизвикателството на конкретната задача така, че те да могат да покажат собствените си идеи за решаването на проблема. Използването на технологичните средства предлага добро решение за осъществяването и развитието на тази компонента в образователния процес. Значителни постижения в тази насока са направени в чужбина през последните двадесет години чрез прилагане на компютърните алгебрични системи (КАС) в обучението по математика в училищата и университетите. Има няколко вида КАС, които се използват в учебните зали. Първият тип системи (Mathematica, Maple, Mathlab) е общ и включва много инструменти за решаване на разнообразни математически задачи. Втори тип са динамичните геометрични софтуери (ДГС), разработени най-вече да удовлетворят нуждите на занятията по геометрия. Прилагането на ДГС има доказани безспорни предимства. Някои от тях са:

1) Спестяване на много чертожно време, защото движението на свободните обекти корегира веднага чертежа в желаната посока. Тук е важно да се отбележи съществената роля на избора на свободните обекти. Той се определя от целите на поставената задача. Ето защо по-високият етап при работа с ДГС изисква и формиране на стратегически умения на обучаваните при избора на свободните обекти;

2) Възможност на обучаваните да експериментират върху чертежа. Това ги прави активни участници в учебния процес;

3) Създаване на среда за развиване на евристичен момент в обучението, което повишава интереса на обучаваните към разглежданата тема и създава у тях самочувствие на откриватели. Така прилагането на ДГС реализира един от подходите на дидактическия инструментариум за експериментален достъп към математиката - учене чрез преоткриване;

4) Подпомагане на творческите усилия на изследователите, защото облекчават откриването на инвариантни релации между разглежданите обекти и формулирането на хипотези, които после трябва да се доказват.

Най-разпространените ДГС са Cinderella, GeoGebra, GeoNext, Sketchpad. Те са много силни системи за моделиране на задачите и предлагане на решения. GeoGebra представя не само геометричното решение на задачата, но прави възможна и аналитичната визуализация на формулите и изчисленията. Cinderella е направила значителна крачка напред, като предлага изпълнение на чертежите и в сферична и хиперболична геометрии.

Друг тип системи са специализираните, които са развити, за да подпомогнат процеса на обучение на специфични математически курсове. Такива са например Interactive Platform for Learning Calculus (PIAC), ДГС Sam [9, 10].

2 Динамичен геометричен софтуер Sam

ДГС Sam бе създаден за нуждите на курса по Синтетична геометрия на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" от авторите на настоящия учебник и студента Самет Караибрямов, който понастоящем работи като програмист. ДГС Sam е написан на C#, използвайки .NET в средата на Framework 4. Ето защо ползвателят трябва да инсталира .NET Framework 4 преди да стартира програмата Sam. Основната част на програмата се съдържа в двете дипломни работи на С. Караибрямов „Едно приложение на

информатиката в дескриптивната геометрия” (за получаване на степен бакалавър по математика - 2010) и „Програма Sam за интерактивно компютърно обучение по темата - Взаимно пресичане на призми и пирамиди (за получаване на степен магистър по софтуерни технологии - 2011).

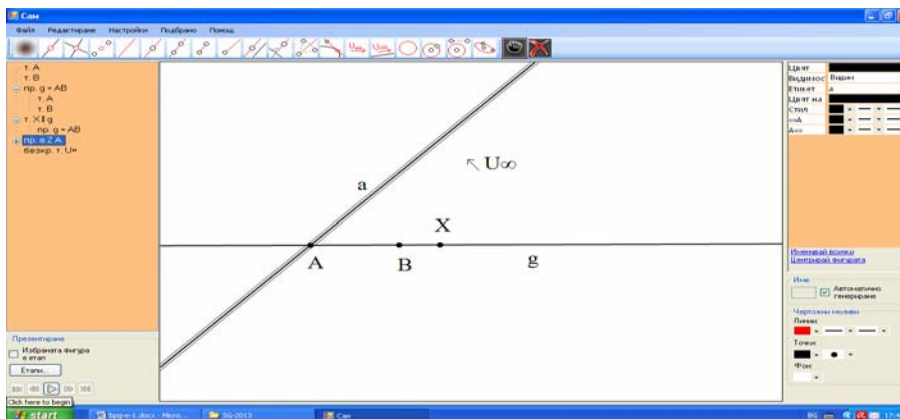
Наличието на два нови елемента в ДГС Sam, а именно: инструментите "произволна безкрайна точка (произволно направление)," "безкрайна точка на права" и функцията "Размяна на крайна и безкрайна точки" помага да се преодолеят обичайните трудности, свързани с изучаването на синтетичната геометрия, да се оптимизира учебния процес и да се осъществи вертикална интеграция на обучението в университета и училище.

Всеки начертан обект се появява в списъка (дървото диаграма) от лявата страна на чертежа с кратко описание, съдържайки етикет (или <няма име>, ако няма такъв) и списък на неговите родители.

Зависимите обекти са определени чрез други обекти, наричани техни родители. Техните етикети се предхождат от знака "+". Кликване върху знака "+" води до появата на под-списък с техните родители.

Свободните обекти нямат родители, поради което те не зависят от други обекти. Пред техните етикети няма какъвто и да е знак в дървото диаграма.

Съществуват и обекти с лимитирано движение (произволна точка върху дадена линия или произволна линия през дадена точка).



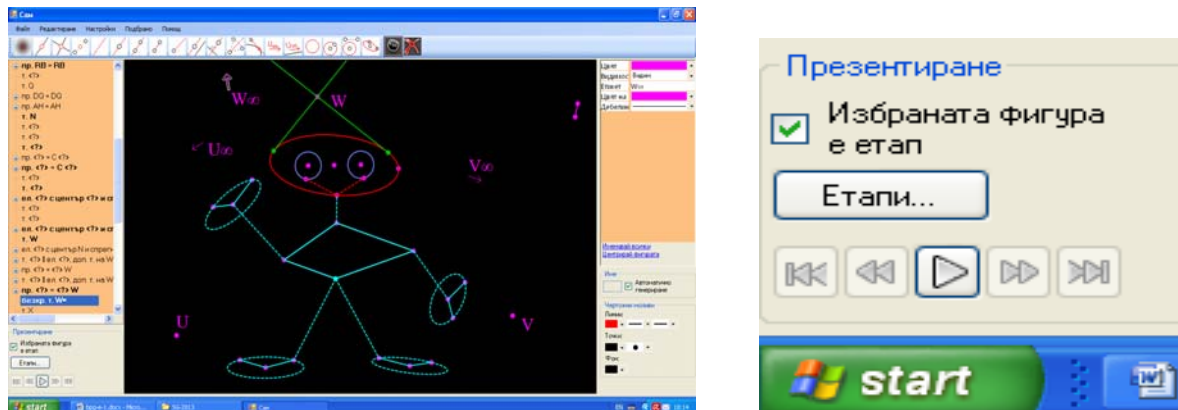
Фигура 2.1

Пример Точките A , B и U_{∞} са свободни (Фигура 2.1). Правата $g = AB$ е зависима и нейните родители са точките A и B . Точката $X \in g$ има единствен родител, така както и правата a , минаваща през точката A . След маркиране на правата a ползвателят може да я върти около точката A , използвайки десния бутон на мишката. По аналогичен начин ползвателят може да променя и направлението на свободната безкрайна точка U_{∞} чрез ротация.

Добре известно е как се чертае права през две точки: избира се инструмента "линия през две точки" и се посочва двойката точки. Редът на избраните точки не е важен, т.е. няма значение коя от точките е първа. Процедурата е една и съща, когато двете точки са крайни или едната е крайна, а другата е безкрайна. Нека отбележим, че в настоящата версия на ДГС Sam не може да се конструира права през две безкрайни точки.

ДГС Sam дава възможност за презентиране на решението на задачата "стъпка по

стъпка" или на етапи, избрани от ползвателя с придружаващ ги коментар, подготвен от него. Това удобство за преподавателя при провеждане на учебния час и за студента при неговата самоподготовка се осъществява чрез панела за презентация, разположен в долния ляв ъгъл на екрана (Фигура 2.2).

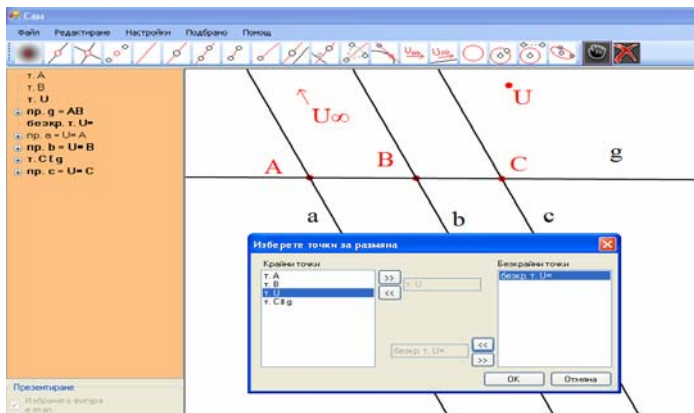


Фигура 2.2

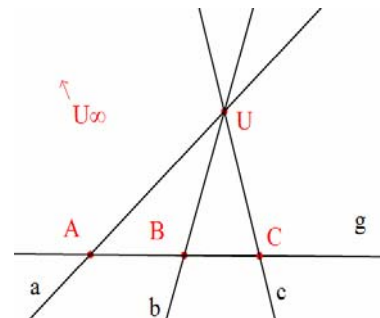
Подготовката на динамичен чертеж за презентация включва маркиране на обект по избор от списъка (дървото диаграма) и кликуване върху бутона "Избраната фигура е етап". Учителят решава колко детайли (стъпки от конструкцията) ще представи пред аудиторията. Той може също така да напише коментар за всеки от етапите през прозореца "Преглед и редакция на стъпките," достъпен чрез бутона "Етапи". Презентацията се контролира чрез "play" бутоните, които позволяват движение етап напред или назад през стъпките на конструкцията. Крайните ляв и десен бутони могат да отведат директно съответно в началото или в края на построенията.

Важно значение за оптимизиране на чертожната работа и стимулиране на творческото мислене на студентите има функцията "Размяна на крайна и безкрайна точки," достъпна в менюто като "Подбрано". Появява се прозорец с два списъка на всички свободни крайни точки и всички свободни безкрайни точки (Фигура 2.3). Чрез двойно кликуване или използвайки бутоните ">>" и "<<," ползвателят избира кои две точки (една крайна и една безкрайна) да бъдат разменени. Размяната се финализира чрез кликуване върху бутона "ОК". Понякога в текста функцията "Размяна на крайна и безкрайна точки" ще записваме накратко РКБТ.

Например, Фигура 2.3 представя свободните крайни точки U, A, B , свободната безкрайна точка U_{∞} и правите $g = AB$, $a = AU_{\infty}$, $b = BU_{\infty}$, $c = CU_{\infty}$, където C е произволна точка върху правата g . След прилагане на функцията РКБТ за точките U_{∞} и U от Фигура 2.3 всички обекти, зависещи от U_{∞} ще се предефинират така, че да зависят от U .



Фигура 2.3



Фигура 2.4

Така се получава Фигурата 2.4, където е видно как правите $a = AU_{\infty}$, $b = BU_{\infty}$, $c = CU_{\infty}$, са се трансформирали съответно в правите $a = AU$, $b = BU$, $c = CU$. Ако функцията РКБТ се приложи за втори път върху същата двойка точки, то ще се получи оригиналната Фигура 2.3.

Нека отбележим, че множеството на успоредните прави от Фигура 2.3 може да бъде построено чрез стандартните процедури за всички ДГС като се използва инструмента "линия, успоредна на друга линия". Ползата от първата конструкция е, че позволява на ползвателя да приложи специалната функция "Размяна на крайна и безкрайна точки".

Забележка 1: За удобство на ползвателя ще споменем, че понякога след прилагане на функцията РКБТ може да се случи:

1.1 Правите, минаващи през една точка да се препокриват. Тогава е необходимо те да се отделят ръчно. Това се постига чрез кликване върху правите и активиране на трансляция чрез левия бутон на мишката, когато общата точка на правите е безкрайна или активиране на ротация чрез десния бутон на мишката, когато общата точка на правите е крайна;

1.2 Някои от точките могат да се появят близо една до друга. Тогава е необходимо те да се отдалечат ръчно. Това се постига чрез: а) кликване върху някоя свободна точка от това множество, използвайки списъка (дървото диаграма) от лявата страна на екрана; б) влачене (плъзгане) на избраната точка.

Забележка 2: След прилагане на функцията РКБТ е възможно някои обекти да бъдат невидими за екрана. Това зависи от разположението на свободните обекти. В такъв случай е достатъчно да изберем липсващия обект в "дървото диаграма" и да изберем функцията "Центрирай фигурата," разписана от дясната страна на екрана (Фигура 2.1). За предпочитане е да се маркира свободен обект, защото ползвателят ще може да го движи до позиция, при която целият чертеж да се впише на екрана.

За удобство на ползвателя в Библиотеката към учебника сме приложили два варианта на програмата *Sam School* и *Sam full*. В *Sam full* е включен и модул за интерактивно обучение по темата „Взаимно пресичане на призми и пирамиди в аксонометрия”.

3 Аксиоми на инцидентността на двумерната проективна равнина

Основни понятия: **точка и права**.

Основна релация: **инцидентност**.

Когато точка и права са инцидентни, ще казваме още, че точката лежи върху правата или правата минава през точката. Права, минаваща през две точки се нарича тяхна съединителна права. Точка, лежаща върху две прави, се нарича тяхна пресечна точка.

Три точки, инцидентни (неинцидентни) с една права, се наричат колинеарни (неколинеарни).

Три прави, инцидентни (неинцидентни) с една точка, се наричат конкурантни (неконкурантни).

Аксиома A_1 . Съществуват точка и права, които не са инцидентни.

Аксиома A_2 . С всяка права са инцидентни поне три различни точки.

Аксиома A_3 . Всеки две различни точки са инцидентни точно с една обща права.

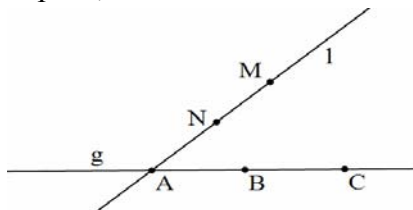
Аксиома A_4 . Всеки две прави са инцидентни поне с една обща точка.

Определение 3.1 Множеството на точките и правите, удовлетворяващи аксиомите A_1 , A_2 , A_3 , A_4 се нарича абстрактна проективна равнина (АПР).

Определение 3.2 Множеството на три неколинеарни точки и техните три съединителни прави се нарича триъгълник.

Теорема 3.1 Съществуват четири точки, никои три от които не са колинеарни.

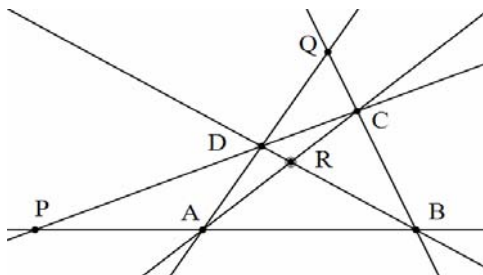
Доказателство: (Фигура 3.1) Съгласно аксиома A_1 съществуват неинцидентни точка и права, които да означим съответно с M и g .



Фигура 3.1

От аксиома A_2 следва, че върху правата g лежат поне три различни точки, които ще означим с A, B, C . Прилагайки последователно аксиоми A_3 и A_2 , можем да разгледаме правата $l = AM$ и точка $N \in l, N \neq A, N \neq M$. Така получихме точките M, N, B, C , никои три от които не са колинеарни.

Определение 3.3 Множеството на четири точки, никои три от които не са колинеарни и техните шест съединителни прави се нарича пълен четириъгълник.



Фигура 3.2

Точките A, B, C, D се наричат върхове, а правите AB, AC, AD, BC, BD, CD се наричат страни на пълния четириъгълник (Фигура 3.2).

Страните, неминаващи през един и същи връх, се наричат срещуположни. Пресечните точки на двойките срещуположни страни $P = AB \cap CD, Q = BC \cap AD, R = AC \cap BD$ се наричат диагонални.

От аксиоми A_1, A_2, A_3, A_4 не следва съществуване на повече от три точки върху всяка права. Нека въведем и следната аксиома:

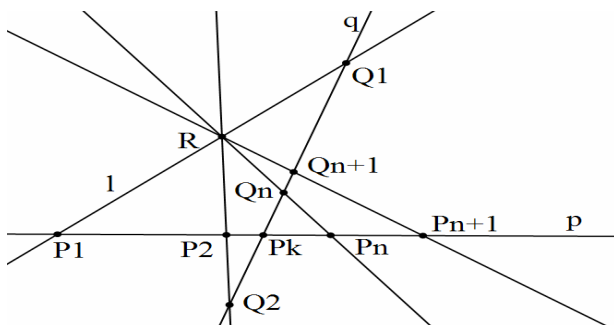
Аксиома А. Съществува права, инцидентна с точно $n+1$ точки, където n е естествено число и $n > 1$.

Абстрактната проективна равнина, удовлетворяваща аксиома А, се нарича крайна абстрактна проективна равнина от ред n (КАПР(n)).

Теорема 3.2

1. Всяка права, принадлежаща на КАПР(n) е инцидентна точно с $n+1$ точки.
2. Всяка точка, принадлежаща на КАПР(n) е инцидентна точно с $n+1$ прави.
3. КАПР(n) съдържа точно $n^2 + n + 1$ точки.
4. КАПР(n) съдържа точно $n^2 + n + 1$ прави.

Доказателство: (Фигура 3.3) 1). Съгласно аксиома А съществува права p , върху която лежат $n+1$ точки: $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$. Нека q е произволна права, която съгласно аксиома A_4 пресича p и нека $p \cap q = P_k$. Аксиома A_2 гарантира съществуването на точка $Q_1 \in q, Q_1 \neq P_k$. Съгласно аксиома A_3 точките P_1 и Q_1 определят правата $l = P_1Q_1$.



Фигура 3.3

Прилагайки отново аксиома A_3 , установяваме съществуването на точка $R \in l, R \neq Q_1, R \neq P_1$.

Съгласно аксиома A_4 всяка от правите $RP_i (i = \overline{1, n+1})$ пресича q в точките Q_i . Така доказахме, че с правата q са инцидентни поне $n+1$ точки.

Да допуснем, че върху q има точка L и $L \neq Q_i$. Тогава поради аксиома A_4 $RL \cap p = P_0, P_0 \neq P_i$ или върху p има $n+2$ точки, което противоречи на условието. Следователно допускането не е вярно и върху q има точно $n+1$ точки.

2). Нека B е произволна точка. С помощта на Теорема 3.1 леко се доказва, че съществува права m , $m \notin B$. Върху правата m има $n+1$ точки M_i , всяка от които с точка B определят правите $BM_i (i = \overline{1, n+1})$. С това показахме, че през точка B минават поне $n+1$ прави.

Ако допуснем, че през точка B минава още една права и приложим аксиома A_4 , ще достигнем до противоречие с доказаното в 1), че върху m има точно $n+1$ точки. Следователно с всяка точка са инцидентни точно $n+1$ прави.

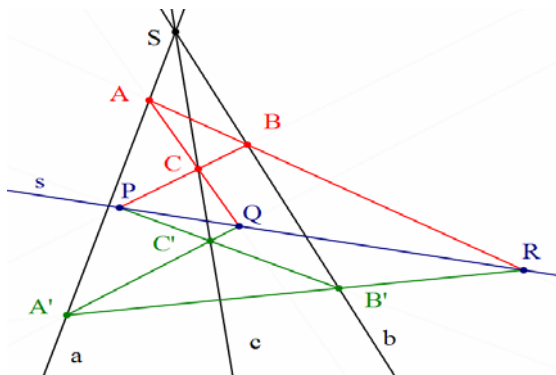
3). Вече доказахме, че през произволна точка B минават $n+1$ прави и върху всяка от тях лежат $n+1$ точки. Следователно, върху правите през точка B лежат $(n+1)n+1 = n^2 + n+1$ точки. Да допуснем, че $\text{КАПР}(n)$ има още една точка, която не е инцидентна с правите, минаващи през точка B . Но тогава следва, че през точка B минават $n+2$ прави, което противоречи на доказаното в 2). Следователно $\text{КАПР}(n)$ притежава точно $n^2 + n+1$ точки.

4). Съгласно доказаното в 1) и 2) върху произволна права q лежат $n+1$ точки и през всяка от тях минават по $n+1$ прави. Следователно правите в $\text{КАПР}(n)$ са поне $(n+1)n+1 = n^2 + n+1$. Допускането, че съществува още една права, води до заключението, че или върху правата q има $n+2$ точки, което противоречи на Твърдение 1), или през точка на q минават $n+2$ прави, което пък противоречи на Твърдение 2). Следователно правите в $\text{КАПР}(n)$ са точно $n^2 + n+1$.

Въпросът за съществуване на крайни абстрактни проективни равнини от произволен ред не е решен.

Нека към аксиомите A_1, A_2, A_3, A_4 на абстрактната проективна равнина прибавим и следните две:

Аксиома A_5 . Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Ако правите AA', BB', CC' са различни и инцидентни с една точка S , то точките $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са различни и лежат на една права s . (Фигура 3.4)



Фигура 3.4

Аксиома A_6 . Трите диагонални точки на пълния четириъгълник не са колинеарни.

Аксиомите $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ се наричат аксиоми на инцидентността на класическата проективна равнина.

Определение 3.4 Абстрактната проективна равнина, чиито точки и прави удовлетворяват (респективно не удовлетворяват) аксиома A_5 , се нарича дезаргова (респективно недезаргова).

Определение 3.5 Абстрактната проективна равнина, чиито точки и прави не удовлетворяват аксиома A_6 , се нарича равнина на Фано.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
l_1	•			•			•
l_2			•	•		•	
l_3	•	•				•	
l_4					•	•	•
l_5		•		•	•		
l_6	•		•		•		
l_7		•	•				•

Фигура 3.5

Пример на равнина на Фано е КАПР(2), чиито точки и прави са подредени съответно в редове и стълбове на известната фигура на Фано (Фигура 3.5).

Да проверим дали точките и правите на равнината на Фано удовлетворяват аксиомите $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.

Точка P_1 и права l_4 не са инцидентни.

С всяка права l_i ($i=1, \dots, 7$) са инцидентни точно три точки.

Непосредствена проверка установява, че с всеки две различни точки е инцидентна точно една права ($P_1P_2 = P_2P_6 = P_1P_6 = l_3, P_1P_3 = P_1P_5 = P_3P_5 = l_6, \dots, P_1P_7 = P_4P_7 = P_1P_4 = l_1$) и

всеки две прави имат обща точка ($l_1 \cap l_2 = P_4, l_1 \cap l_3 = P_1, \dots, l_6 \cap l_7 = P_3$). В равнината има точно 7 точки.

Така установихме, че аксиомите A_1, A_2, A_3, A_4, A са в сила за равнината на Фано.

Единственият пълен четириъгълник е $P_1P_2P_3P_4$. Неговите диагонални точки са: $P_1P_2 \cap P_3P_4 = l_3 \cap l_2 = P_6, P_1P_3 \cap P_2P_4 = l_6 \cap l_5 = P_5, P_1P_4 \cap P_2P_3 = l_1 \cap l_7 = P_7$. Тъй като точките P_5, P_6, P_7 лежат върху правата l_4 , то следва, че аксиома A_6 не е в сила за равнината на Фано.

Предмет на изучаване в настоящия курс е геометрията на класическата проективна равнина.

4 Принцип за дуалност

Нека във формулировката на аксиомите на инцидентността $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ заменим думите точка и права съответно с думите права и точка. Да проверим верността на получените твърдения, т.е. да проверим дали те са доказуеми въз основа на аксиомите на инцидентността $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ и техните следствия.

A_1' . Съществуват права и точка, които не са инцидентни.

Очевидно A_1' съвпада с A_1 .

A_2' . С всяка точка са инцидентни поне три различни прави.

Доказателство: Нека L е произволна точка. Съгласно Теорема 3.1 съществува права g , неинцидентна с L . От A_2 следва, че съществуват точките A, B, C , които са различни и лежат върху g . Съгласно A_3 съществуват правите $a = AL, b = BL, c = CL$, които са различни. С това твърдението A_2' е доказано.

A_3' . Всеки две различни прави са инцидентни точно с една обща точка.

Доказателство: Нека a и b са две произволни различни прави. От A_4 следва, че те имат поне една обща точка, която ще означим с C . Да допуснем, че правите a и b имат втора обща точка D , различна от C . Но съгласно A_3 през различните точки C и D минава точно една права или правите a и b съвпадат, което противоречи на условието, че a и b са различни прави. Следователно допускането не е вярно.

A_4' . Всеки две точки са инцидентни поне с една обща права.

Верността на A_4' следва непосредствено от аксиома A_3 .

Определение 4.1 *Фигури, чиито определения се получават едно от друго чрез замяната на думите точка и права съответно с думите права и точка, се наричат дуални.*

Определение 4.2 *Множеството на три прави, неминаващи през една точка и техните три пресечни точки се нарича тристранник.*

Очевидно е, че дуалните фигури триъгълник и тристранник са и идентични фигури.

A_5' . Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Ако точките

$P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са различни и колинеарни, то

правите AA', BB', CC' минават през една точка S .

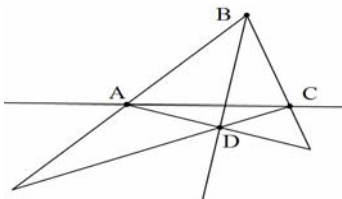
Доказателство: Да разгледаме триъгълниците PBB' и QAA' (Фигура 3.4). Тъй като правите $PQ, BA, B'A'$ са различни и минават през точка R , то можем да приложим аксиома A_5 . Следователно точките $C = PB \cap QA, C' = PB' \cap QA', S = BB' \cap AA'$ са различни и колинеарни, т.е. правите AA', BB', CC' са различни и минават през една точка S .

Определение 4.3 Триъгълниците ABC и $A'B'C'$, за които са изпълнени условията на аксиома A_5 или твърдението A_5' се наричат *перспективни триъгълници с перспективен център* точката S и *перспективна ос* правата s .

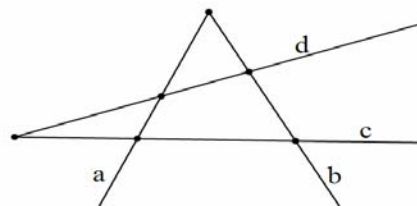
Твърдението A_5' се нарича **теорема на Дезарг за перспективните триъгълници**.

Жерар Дезарг (1591-1662) по професия е архитект и военен инженер. Роден е в Лион. От 1626 год. живее в Париж и се сприятелява с редица забележителни учени, между които и Декарт. Със своя научен труд "Общ метод на изображение на предметите в перспектива" (1636), той за първи път прилага координатния метод за построяване на перспективните мащаби. Изследвайки въпроса за равнинните сечения на конуса, Дезарг за първи път прилага общ метод за изучаване на елипса, парабола и хипербола. Така учението за коничните сечения придобива извънредно проста и изящна форма и води до необходимостта да се разглеждат безкрайните елементи. Съчинението на Дезарг, посветено на тези въпроси е написано през 1639 год., но било загубено. Случайно през 1845 год. Шал открива у парижки букинист ръкописно копие на този забележителен труд. Работите на Дезарг полагат научните основи на проективната геометрия.

Определение 4.4 Множеството на четири прави, никои три от които не минават през една точка и техните шест пресечни точки се нарича *пълнен четиристранник*.



Фигура 4.1 а)



Фигура 4.1 б)

Правите се наричат страни, а точките – върхове на пълния четиристранник. Върховете, нележащи на една и съща страна, се наричат срещуположни. Съединителните прави на двойките срещуположни върхове се наричат диагонални прави.

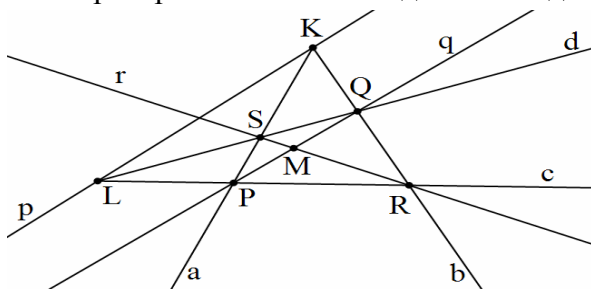
Пълният четириъгълник (Фигура 4.1 а)) и пълният четиристранник (Фигура 4.1 б)) са дуални фигури.

A_6' . Трите диагонални прави на пълния четиристранник не са инцидентни с една точка.

Доказателство: (Фигура 4.2). Нека $abcd$ е произволен пълен четиристранник. Да въведем следните означения:

$a \cap b = K, c \cap d = L, KL = p; a \cap c = P, b \cap d = Q, PQ = q; b \cap c = R, a \cap d = S, RS = r; q \cap r = M$. Ще докажем, че точките $PQRS$ образуват пълен четириъгълник. Да допуснем, че точките P, Q, R са колинеарни. Това означава, че правите $PR = c$ и $RQ = b$ съвпадат. Но тогава

правите b, c, d минават през една точка, което противоречи на условието, че е даден пълният четиристранник $abcd$. Следователно допускането, че точките P, Q, R са



Фигура 4.2

колинеарни не е вярно. По аналогичен начин се доказва, че и тройките точки PQS , QSR , SRP са неколинеарни, от където следва, че $PQRS$ е пълнен четириъгълник.

Да допуснем, че диагоналните прави p, q, r на пълния четиристранник са инцидентни с една точка. Това означава, че точката $M = q \cap r$ лежи върху правата $p = KL$ т.е. диагоналните точки K, L, M на пълния четириъгълник $PQRS$ са колинеарни. Така стигнахме до противоречие с аксиома A_6 . Следователно допускането не е вярно, а Твърдението A_6' е вярно.

Теорема 4.1 (Принцип на дуалност.) *Ако в едно вярно твърдение T (доказуемо чрез аксиомите на инцидентността) извършим замяната на думите точка и права съответно с думите права и точка, получаваме отново вярно твърдение T' .*

Доказателство: Доказателството на твърдението T' може да се проведе като следваме хода на доказателството на твърдението T , механично заменяйки използваните аксиоми A_i със съответните им твърдения A_i' , ($i=1,2,3,4,5,6$), чиято вярност вече установихме.

Теорема 4.1 е известна като принцип на дуалност. Принциплът на дуалност е открит от Жергон (1771–1859).

Две твърдения, всяко от които се получава от другото със замяна във формулировката му на думите точка и права съответно с думите права и точка, се наричат дуални. Тъй като при доказване на верността на твърденията A_1', A_2', A_3', A_4' използвахме само аксиомите A_1, A_2, A_3, A_4 и техни следствия, то следва, че принципът за дуалност е в сила и за абстрактната проективна равнина.

Понеже твърдението:

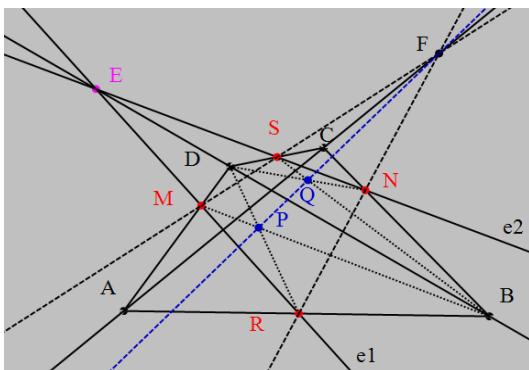
A' . Съществува точка, инцидентна с $n+1$ прави, където n е естествено число и $n > 1$ следва непосредствено от Теорема 3.2, то принципът за дуалност е в сила и в крайната абстрактна проективна равнина от ред n .

Упражнение №1

Аксиома A_5 е инструмент за доказване на колинеарност на три точки. Достатъчно е да посочим подходяща двойка триъгълници, удовлетворяващи условията на аксиома A_5 .

Задача 4.1 Дадени са произволен четириъгълник $ABCD$, произволна точка E върху правата BD и две произволни прави e_1, e_2 през точка E . Нека означим:
 $e_1 \cap AD = M$, $e_1 \cap AB = R$, $e_2 \cap CD = S$, $e_2 \cap BC = N$, $MS \cap NR = F$, $BM \cap DR = P$,
 $BS \cap DN = Q$. Докажете, че:

- Точките A, C, F са колинеарни;
- Точките P, Q, F са колинеарни;



Фигура 4.3

Решение (Фигура 4.3) а) Да разгледаме триъгълниците MSD и RNB . Условието на задачата осигурява конкурантност на правите MR, SN, DB , защото те минават през точката E . Следователно $\triangle MSD$ и $\triangle RNB$ са перспективни с перспективен център E и съгласно Аксиома A_5 пресечните точки на двойките съответни страни, т.е. точките $MS \cap RN = F$, $SD \cap NB = C$ и $MD \cap RB = A$ са колинеарни.

б) Да разгледаме триъгълниците MSB и RND . Те са перспективни с перспективен център точка E . Съгласно Аксиома A_5 пресечните точки на двойките съответни страни, т.е. точките $MS \cap RN = F$, $SB \cap ND = Q$ и $MB \cap RD = P$ са колинеарни.

Твърдение A'_5 (дуално на аксиома A_5), известно още като теорема на Дезарг за перспективните триъгълници е средство, посредством което доказваме конкурантност на три прави.

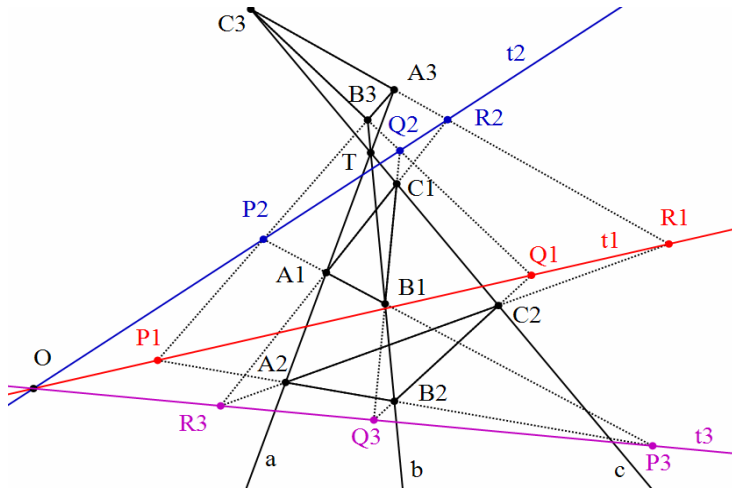
Задача 4.2 Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни с общ перспективен център, то техните три перспективни оси минават през една точка. Да се формулира дуалната задача.

Решение (Фигура 4.4) Да означим трите триъгълника с $A_i B_i C_i$, $i = 1, 2, 3$, а общият им перспективен център - с T . От условието следва колинеарност на четворките точки

$A_1, A_2, A_3, T; B_1, B_2, B_3, T; C_1, C_2, C_3, T; .$ Трите перспективни оси t_1, t_2, t_3 се определят с точките $P_1, Q_1, R_1 \in t_1, P_2, Q_2, R_2 \in t_2, P_3, Q_3, R_3 \in t_3$, където

$$\begin{aligned} A_2B_2 \cap A_3B_3 &= P_1, & A_3B_3 \cap A_1B_1 &= P_2, & A_1B_1 \cap A_2B_2 &= P_3, \\ B_2C_2 \cap B_3C_3 &= Q_1, & B_3C_3 \cap B_1C_1 &= Q_2, & B_1C_1 \cap B_2C_2 &= Q_3, \\ C_2A_2 \cap C_3A_3 &= R_1, & C_3A_3 \cap C_1A_1 &= R_2, & C_1A_1 \cap C_2A_2 &= R_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Да допуснем, че точките P_1, P_2, P_3 са колинеарни. Следователно $P_1P_2 = P_2P_3 \Leftrightarrow A_3B_3 = A_1B_1$, което противоречи на условието, че $\Delta A_3B_3C_3$ и $\Delta A_1B_1C_1$ са перспективни.



Фигура 4.4

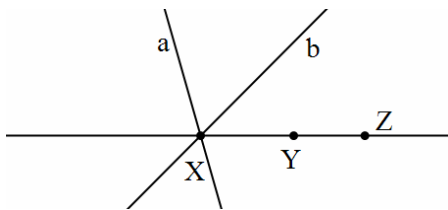
Следователно допускането не е вярно и точките P_1, P_2, P_3 не са колинеарни. Аналогично се доказва, че и тройката точки Q_1, Q_2, Q_3 не са колинеарни. Значи съществуват $\Delta P_1P_2P_3$ и $\Delta Q_1Q_2Q_3$, които ще разгледаме. Тъй като съгласно условието точките

$$\begin{aligned} P_1P_2 \cap Q_1Q_2 &= A_3B_3 \cap B_3C_3 = B_3, \\ P_2P_3 \cap Q_2Q_3 &= A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1, \\ P_3P_1 \cap Q_3Q_1 &= A_2B_2 \cap B_2C_2 = B_2 \end{aligned}$$

са инцидентни с права b , то прилагайки A_5' получаваме, че $\Delta P_1P_2P_3$ и $\Delta Q_1Q_2Q_3$ са перспективни с перспективна ос b и следователно имат перспективен център $O = P_1Q_1 \cap P_2Q_2 \cap P_3Q_3 = t_1 \cap t_2 \cap t_3$. С това доказахме, че трите перспективни оси t_1, t_2, t_3 на дадените в условието триъгълници минават през една точка O .

Дуална задача. Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни с обща перспективна ос, то трите им перспективни центъра лежат на една права.

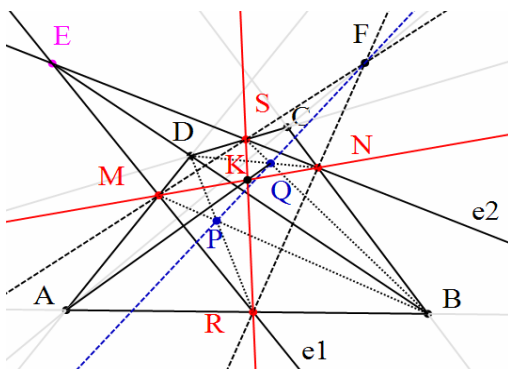
Стандартен подход при доказване на колинеарност на три точки X, Y, Z , където $X = a \cap b$, е замяната на условието колинеарност на точките X, Y и Z с условието за конкурентност на правите a, b и YZ , което изисква прилагане на Твърдението A_5' .



Фигура 4.5

Задача 4.3 Дадени са произволен четириъгълник $ABCD$, произволна точка E върху правата BD и две произволни прави e_1, e_2 през точка E . Нека означим: $MN \cap RS = K$, $e_1 \cap AD = M$, $e_1 \cap AB = R$, $e_2 \cap CD = S$, $e_2 \cap BC = N$, $BM \cap DR = P$, $BS \cap DN = Q$. Докажете, че точките A, K, Q са колинеарни.

Решение (Фигура 4.6) Разглеждаме триъгълниците MRA и NSQ . Пресечните точки на двойките съответни страни са: $MR \cap NS = E$, $MA \cap NQ = D$, $RA \cap SQ = B$. От условието, че точките B, D, E са колинеарни и Твърдение A_5 ' следва, че правите MN, RS, AQ са конкурантни, т.е. минават през една точка. Това означава, че правата AQ минава през точката $K = MN \cap RS$ или точките A, K, Q са колинеарни.



Фигура 4.6

5 Аксиоми на инцидентността на тримерното проективно пространство P_3 .

Основни понятия: **точка, права, равнина.**

Основни релации: **инцидентност на точка и права, инцидентност на точка и равнина.**

Аксиома B_1 . Съществуват точка и права, които не са инцидентни.

Аксиома B_2 . С всяка права са инцидентни поне три различни точки.

Аксиома B_3 . Всеки две различни точки са инцидентни точно с една обща права.

Аксиома B_4 . Всеки три точки, неинцидентни с една права, са инцидентни точно с една обща равнина.

Аксиома B_5 . С всяка равнина е инцидентна поне една точка.

Аксиома B_6 . За всяка равнина съществува поне една точка, неинцидентна с нея.

Аксиома B_7 . Ако две точки, инцидентни с една права, са инцидентни и с една равнина, то всяка точка, която е инцидентна с правата е инцидентна и с равнината.

Определение 5.1 Права и равнина са инцидентни, когато всяка точка, инцидентна с правата е инцидентна и с равнината.

Аксиома B_8 . Всеки две равнини са инцидентни с една и съща права.

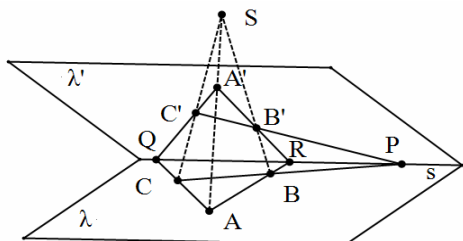
Аксиома B_9 . Всеки две прави, инцидентни с една и съща равнина, са инцидентни и с една и съща точка.

Нека отбележим, че аксиомите B_1, B_2, B_3, B_9 съвпадат с аксиомите на абстрактната проективна равнина A_1, A_2, A_3, A_4 . Твърденията, изказани в аксиомите A_5, A_6 сега се превръщат в теореми, които ще докажем чрез деветте аксиоми на инцидентността, които току-що формулирахме.

Теорема 5.1 (Теорема на Дезарг) Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Ако правите AA', BB', CC' са различни и инцидентни с една точка S , то точките $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са инцидентни с една права s .

Доказателство: Да означим с λ и λ' равнините, в които лежат съответно триъгълниците ABC и $A'B'C'$.

1. Нека равнините λ и λ' са различни. Съгласно аксиома B_8 λ и λ' имат обща права, която ще означим с s . (Фигура 5.1). Да въведем още следните означения: $AA' = a, BB' = b, CC' = c$. Правите AB и $A'B'$ лежат в равнината $\alpha = (a, b)$, BC и $B'C'$ лежат в равнината $\beta = (b, c)$, CA и $C'A'$ лежат в равнината $\gamma = (c, a)$.

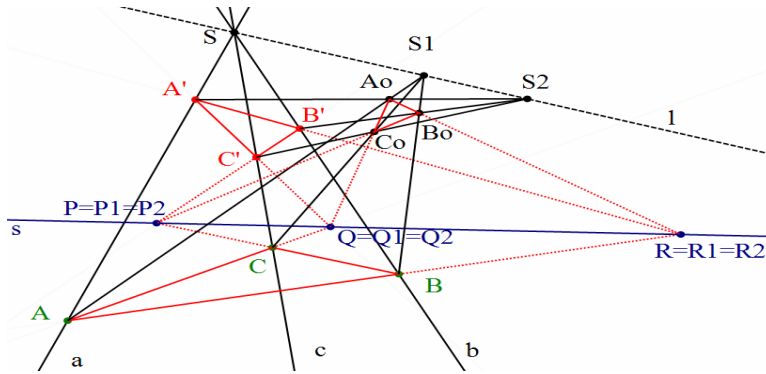


Фигура 5.1

Прилагайки аксиома B_9 , установяваме, че указаните двойки прави се пресичат.

Ако $BC \cap B'C' = P$, поради $BC \in \lambda, B'C' \in \lambda'$ следва, че $P \in \lambda, P \in \lambda'$, т.е. $P \in s$. Аналогично се доказва, че и $Q \in s$, $R \in s$.

2. Нека равнините λ и λ' съвпадат. Да изберем права $l \ni S, l \notin \lambda$ (Фигура 5.1). Върху правата l да изберем различните точки S_1 и S_2 , които са различни и от S . Правите AS_1 и $A'S_2$, BS_1 и $B'S_2$, CS_1 и $C'S_2$ се пресичат, защото лежат съответно в равнините $\alpha_1 = (a, l)$, $\beta_1 = (b, l)$, $\gamma_1 = (c, l)$. Да означим:
 $A^0 = AS_1 \cap A'S_2$, $B^0 = BS_1 \cap B'S_2$, $C^0 = CS_1 \cap C'S_2$.



Фигура 5.2

Точките A^0, B^0, C^0 не са колинеарни. Наистина, да допуснем, че точките A^0, B^0, C^0 лежат на една права, която ще отбележим с u . Но тогава точките A, B, C ще лежат на пресечницата на равнините λ и $\mu = (S_1, u)$, което противоречи на условието, че е даден триъгълник ABC . С това доказахме, че точките A^0, B^0, C^0 образуват триъгълник. С ν да отбележим равнината, в която той лежи. Равнините λ и ν са различни (допускането на обратното води до резултата $A^0 = A = A', B^0 = B = B', C^0 = C = C'$, което противоречи на условието, че са дадени два триъгълника ABC и $A'B'C'$).

Да разгледаме триъгълниците ABC и $A^0B^0C^0$. Те лежат в различни равнини и правите AA^0, BB^0, CC^0 минават през точка S_1 . Изпълнени са условията на теоремата в случая 1. и следователно точките $P_1 = BC \cap B^0C^0, Q_1 = CA \cap C^0A^0, R_1 = AB \cap A^0B^0$ лежат на правата $s_1 = \lambda \cap \nu$. Чрез аналогични разсъждения за триъгълниците $A'B'C'$ и $A^0B^0C^0$ установяваме, че точките $P_2 = B'C' \cap B^0C^0, Q_2 = C'A' \cap C^0A^0, R_2 = A'B' \cap A^0B^0$ лежат на правата $s_2 = \lambda' \cap \nu$. Тъй като $\lambda = \lambda'$, то $P_1 = P_2 = B^0C^0 \cap \lambda, Q_1 = Q_2 = C^0A^0 \cap \lambda, R_1 = R_2 = A^0B^0 \cap \lambda$. Следователно и точките $P = P_1 = P_2, Q = Q_1 = Q_2, R = R_1 = R_2$ също са колинеарни, с което теоремата е доказана.

Теорема 5.1 е причина в редица курсове по проективна геометрия да се обединяват двете твърдения за перспективните триъгълници в следната обща теорема, известна като

Теорема на Дезарг за перспективните триъгълници. Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Правите AA', BB', CC' са различни и инцидентни с една точка S , тогава и само тогава, когато точките $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са различни и инцидентни с една права s .

Тази формулировка е за предпочитане, когато твърдението се прилага при решаване на училищни задачи.

6 Евклидов модел на аксиомите на инцидентността на P_3

Определение 6.1 Множеството на всички прави в E_3 , успоредни на дадена права a , включително и тя самата, се нарича безкрайна точка. Означаваме я с U_a или A_∞ .

Правата a или коя да е успоредна на нея права се нарича **представител на U_a** .

От определението непосредствено следва, че две различни прави определят една и съща безкрайна точка тогава и само тогава, когато са успоредни.

Понятието безкрайна точка е въведено от великия немски астроном Кеплер (1571-1630). Дезарг е първият геометър, който стига до необходимостта да се използват безкрайните точки на пространството, с което поставя и началото на неговото проективно представяне.

Определение 6.2 Множеството на всички равнини в E_3 , успоредни на дадена равнина α , включително и тя самата, се нарича безкрайна права. Означаваме я с u_α .

Равнината α или коя да е успоредна на нея равнина се нарича **представител на u_α** .

От определението непосредствено следва, че две различни равнини определят една и съща безкрайна права тогава и само тогава, когато са успоредни.

Понятието безкрайна права е въведено от Понселе.

Определение 6.3 Множеството на всички безкрайни точки и безкрайни прави се нарича безкрайна равнина. Означаваме я с Ω .

Точките, правите и равнините, принадлежащи на E_3 , ще наричаме евклидови или крайни.

Определение 6.4 Множеството на всички евклидови (крайни) точки, прави, равнини и на всички безкрайни точки и прави, както и безкрайната равнина се нарича **разширено евклидово пространство**. Разширеното евклидово пространство ще бележим с E_3^* .

Определение 6.5 Инцидентност на точка и права в E_3^* :

а) Крайните точки и прави в E_3^* са инцидентни тогава и само тогава, когато са инцидентни в евклидов смисъл;

б) Безкрайната точка U_a е инцидентна с крайната права g тогава и само тогава, когато a е успоредна на g или a съвпада с g .

в) Безкрайната точка U_a е инцидентна с безкрайната права u_a тогава и само тогава, когато a е успоредна на α или a лежи в нея.

г) Всяка крайна точка и всяка безкрайна права са неинцидентни.

Определение 6.6 *Инцидентност на точка и равнина в E_3^* :*

а) Крайните точки и равнини в E_3^* са инцидентни тогава и само тогава, когато са инцидентни в евклидов смисъл;

б) Безкрайната точка U_a е инцидентна с крайната равнина α тогава и само тогава, когато a е успоредна на α или a лежи в α .

в) Всяка безкрайната точка е инцидентна с безкрайната равнина Ω .

г) Всяка крайна точка не е инцидентна с безкрайната равнина Ω .

Сега ще установим в какви случаи са инцидентни правите и равнините в E_3^* .

Крайните прави и равнини в E_3^* са инцидентни тогава и само тогава, когато са инцидентни в евклидов смисъл;

Тъй като никоя крайна точка не лежи в безкрайната равнина Ω , то и никоя крайна права не лежи в нея. Всяка безкрайна права лежи в безкрайната равнина Ω .

Нека u_α е безкрайна права, а β е крайна равнина. Съгласно Определение (6.5) в) точки, инцидентни с u_α , са само безкрайните точки, чиито представители са успоредни на α . Това, че тези точки са инцидентни и с β означава, че същите прави са успоредни и на β . Следователно безкрайната права u_α лежи в β тогава и само тогава, когато α е успоредна на β или α съвпада с β .

Сега ще изградим съответствието $\Phi: P_3 \rightarrow E_3^*$.

На точките от P_3 ще съпоставим крайните и безкрайните точки от E_3^* .

На правите от P_3 ще съпоставим крайните и безкрайните прави от E_3^* .

На равнините от P_3 ще съпоставим крайните равнини и безкрайната равнина Ω от E_3^* .

На основните релации инцидентност на точка и права, инцидентност на точка и равнина в P_3 ще съпоставим релациите инцидентност, въведени съответно с определения (6.5), (6.6) в E_3^* .

Точките, правите, равнините и релациите инцидентност в E_3^* ще бележим с точка^{*}, права^{*}, равнина^{*}, инцидентност^{*}.

Предстои да докажем в E_3^* верността на твърденията, които съответстват на аксиомите на инцидентността на P_3 , при установеното вече съответствие Φ .

B_1' . Съществуват точка^{*} и права^{*}, които не са инцидентни^{*}.

Съгласно аксиомите на E_3 съществуват крайна точка и права, които не са инцидентни.

B_2' . С всяка права^{*} са инцидентни^{*} поне три различни точки^{*}.

1) Нека a е произволна крайна права. От аксиомите на E_3 следва, че с a са инцидентни поне две различни точки. Прибавяйки към тях и безкрайната точка U_a , получаваме три различни точки върху a .

2) Нека u_α е произволна безкрайна права. През произволна крайна точка O построяваме три различни прави, успоредни на равнината α . Тези три прави определят три безкрайни точки, които принадлежат на u_α (Определение (6.5) в)).

B_3' . Всеки две различни точки $*$ са инцидентни $*$ точно с една обща права $*$.

Нека $A, B \in E_3^*$ са две произволни точки $*$.

1) A и B са крайни точки. Твърдението съвпада с аксиома на E_3 .

2) A е крайна точка, $B = U_b$ е безкрайна точка. От Аксиомата за успоредността на Евклид следва, че съществува точно една права g , инцидентна с A и успоредна на b . От определение (6.5) б) имаме $U_b \in g$.

3) $A = U_a$ и $B = U_b$ са безкрайни точки. Нека O е произволна крайна точка, а правите a_1 и b_1 минават през точка O и са съответно успоредни на a и b . Крайната равнина α , определена от пресичащите се прави a_1 и b_1 е представител на безкрайната права u_α , която съгласно Определение (6.6) в) е инцидентна с точките U_a и U_b . Правата u_α е единствена. Наистина, ако u_α' също е инцидентна с точките U_a и U_b , то равнината α' , бидейки успоредна на правите a и b , е успоредна на равнината α или $u_\alpha' = u_\alpha$.

B_4' . Всеки три точки $*$, неинцидентни $*$ с една права $*$, са инцидентни $*$ точно с една обща равнина $*$.

Нека $A, B, C \in E_3^*$ са три произволни точки $*$, неинцидентни $*$ с една права $*$.

1) A, B, C са крайни точки. Твърдението съвпада с аксиома на E_3 .

2) A и B са крайни точки, а $C = U_c$ е безкрайна точка. Крайната равнина α , която минава през правата AB и е успоредна на правата c , е единствената равнина, инцидентна с точките A, B, U_c .

3) A е крайна точка, а $B = U_b, C = U_c$ са безкрайни точки. Единствената крайна равнина α , която минава през точката A и е успоредна на правите b и c е търсената.

4) $A = U_a, B = U_b, C = U_c$ са безкрайни точки. С тях е инцидентна безкрайната равнина Ω и само тя.

B_5' . С всяка равнина $*$ е инцидентна $*$ поне една точка $*$.

B_6' . За всяка равнина $*$ съществува поне една точка $*$, неинцидентна $*$ с нея.

B_7' . Ако две точки $*$, инцидентни $*$ с една права $*$, са инцидентни $*$ и с една равнина $*$, то всяка точка $*$, инцидентна $*$ с правата $*$, е инцидентна $*$ с равнината $*$.

Доказателството на твърденията B_5', B_6', B_7' предоставяме на читателя.

B_8' . Всеки две равнини $*$ са инцидентни $*$ с една и съща права $*$.

Нека $\alpha, \beta \in E_3^*$ са две произволни равнини * .

1) α и β са крайни равнини.

1.1) Равнините α и β се пресичат в правата s . Тогава те са инцидентни с една и съща крайна права s .

1.2) Равнините α и β са успоредни. Тогава те са инцидентни с една и съща безкрайна права $u_\alpha = u_\beta$.

2) α е крайна равнина, $\beta = \Omega$ е безкрайната равнина. Тогава безкрайната права u_α е едновременно инцидентна с α и с Ω .

B_9' . Всеки две прави * , инцидентни * с една и съща равнина * , са инцидентни * и с една и съща точка * .

Нека a и b са две произволни прави * , лежащи в равнината * γ .

1) a и b са крайни прави и равнината γ също е крайна.

1.1) Правите a и b се пресичат. Следователно a и b имат обща крайна точка.

1.2) Правите a и b са успоредни. Следователно a и b имат обща безкрайна точка.

2) a е крайна права, $b = u_\beta$ е безкрайна права. Поради $a \in \gamma$, равнината γ е крайна, а от $b = u_\beta \in \gamma$ следва, че равнините γ и β са успоредни. Сега безкрайната точка U_a е обща за правите a и u_β .

3) $a = u_\alpha$ и $b = u_\beta$ са различни безкрайни прави, поради което и равнината γ е безкрайната равнина Ω . Сега правата $s = \alpha \cap \beta$ определя общата безкрайна точка за правите u_α и u_β .

Построеният модел на аксиомите на инцидентността ни позволява да пренесем в проективната геометрия нагледността, с която сме свикнали в евклидовата геометрия.

В някои учебници по проективна геометрия е предпочетен именно този подход за изграждане на проективното пространство - чрез допълване на евклидовото пространство с безкрайните елементи. Така евклидовата права, допълнена с безкрайната си точка е проективната права, евклидовата равнина, допълнена с безкрайната си права е проективната равнина. Но това са само модели на проективната права и проективната равнина, известни в литературата като евклидови модели.

В евклидовия модел на P_3 ще докажем валидността на аксиома A_6 .

Трите диагонални точки * на пълния четириъгълник $ABCD \in E_3^*$ не са инцидентни * с една права * .

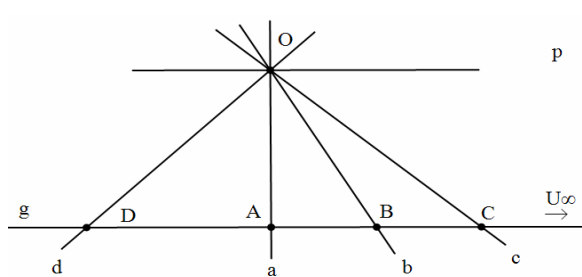
1) Да разгледаме успоредника $ABCD \in \alpha$. Неговите диагонални точки са $P_\infty = AB \cap CD, Q_\infty = AD \cap BC, R = AC \cap BD$. Тъй като правата $P_\infty Q_\infty = u_\alpha$ е безкрайна, то следва че крайната точка $R \notin u_\alpha$ (виж Определение (6.5) г)).

2) Нека сега $ABCD \in \alpha$ е произволен пълен четириъгълник в E_3^* с диагонални точки $P = AB \cap CD, Q = AD \cap BC, R = AC \cap BD$. Да изберем произволна точка $O \notin \alpha$ и произволна равнина β , успоредна на правите OP и OQ . Нека Φ е централно проектиране на α върху β с център O и тогава

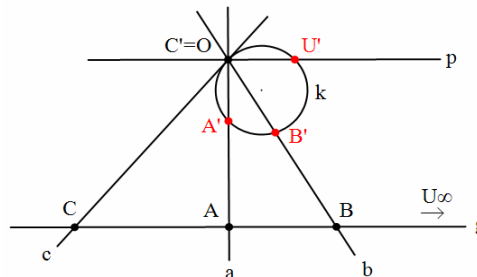
$\Phi(A, B, C, D, P, Q, R) = A', B', C', D', P'_\infty, Q'_\infty, R'$. Четириъгълникът $A'B'C'D'$ е успоредник, защото две от диагоналните му точки са безкрайни. Съгласно 1) точките P'_∞, Q'_∞, R' не са колинеарни. Тъй като централното проектиране запазва инцидентността на точките, то и точките P, Q, R , които са първообрази на точките P'_∞, Q'_∞, R' също не са колинеарни.

На базата на евклидовия модел на проективната права ще изградим още два нейни модела.

Може да се установи биективно изображение φ между точките на евклидовата права g , допълнена с безкрайната си точка U_g и правите на снопа прави $S(O)$, където $O \notin g$. Достатъчно е на всяка точка $X \in g$ да съпоставим правата OX . Тогава имаме $\varphi(A, B, U_g, \dots, C) = a, b, p, \dots, c$ (черт. 22.1). Лесно се съобразява, че φ е биективно изображение. Следователно снопът прави е друг модел на проективната права.



Фигура 6.1



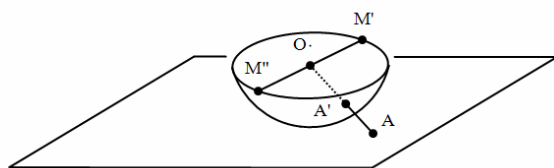
Фигура 6.2

Може да се установи биективно изображение ψ между точките на евклидовата права g , допълнена с безкрайната си точка U_g и точките на една окръжност k . Достатъчно е центърът O на проектиращия сноп прави да лежи върху окръжността k и на всяка точка $X \in g$ да съпоставим втората пресечна точка на правата OX с окръжността k . Така имаме $\psi(A, B, U_g, \dots, C) = A', B', U', \dots, C'$ (Фигура 6.2). Лесно се съобразява, че ψ е биективно изображение. Следователно окръжността е друг модел на проективната права.

Последните два модела подчертават свойството на проективната права да е затворена линия.

На базата на евклидовия модел на проективната равнина ще изградим друг модел на проективната равнина α . Да разгледаме полусфера S с център точка O и допираща се до α (Фигура 6.3). Да означим с k екватора на S – окръжността, която е сечение на сферата с равнина, която е успоредна на α и минава през точката O . Да проектираме точките на α от точка O и с ϕ да отбележим изображението $\phi: \alpha \rightarrow S$, при което $\phi(A) = A'$, където $A' = OA \cap S$. Очевидно е, че всяка крайна точка от α има точно един образ. Не стои така въпросът с безкрайните точки на α . Проектиращите ги прави ще пресичат екватора в две диаметрално противоположни точки M и M' . За да осигурим взаимно-еднозначността на ϕ , ще отъждествим диаметрално противоположните точки на екватора. Така всяка крайна права от α ще се изобразява в голяма полуокръжност на S , двете крайни точки на който,

лежащи върху екватора, съвпадат. По този начин се постига и проективната права да бъде затворена линия. Проективната равнина също е затворена повърхнина, която произволна нейна права не може да раздели на две части.



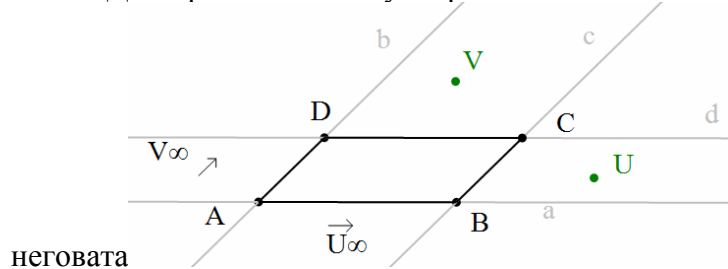
Фигура 6.3

Всички чертежи ще изпълняваме в евклидовия модел на проективната равнина.

Определение 6.7 *Фигурите, които се получават една от друга чрез прилагане на функцията "Размяна на крайна и безкрайна точки", ще наричаме свързани.*

Например, съвкупността на правите a, b, c от Фигура 2.3, които са инцидентни с точка U_{∞} и съвкупността на правите a, b, c от Фигура 2.4, които са инцидентни с точка U са свързани фигури.

Да разгледаме успоредника от Фигура 6.4. Свободните точки в

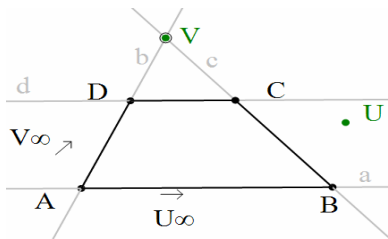


Фигура 6.4

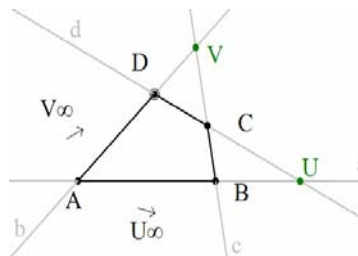
неговата конструкция са: A , U_{∞} и V_{∞} . Точките B и D са произволни точки, лежащи съответно върху правите $a = AU_{\infty}$ и $b = AV_{\infty}$, а C е пресечната точка на правите и $d = DU_{\infty}$ и $c = BV_{\infty}$. На края страните са построени като отсечки. Последователността на построенията може да бъде проследена чрез панела за презентация като се използва динамичния чертеж 6.4 от Библиотеката.

Определение 6.8 *Успоредникът $ABCD$ от Фигура 6.4 ще наричаме универсален успоредник.*

Ако U и V са произволни свободни крайни точки, то функцията РКБТ може да трансформира универсалния успоредник в трапец (чрез размяна на точките V_{∞} и V ; виж Фигура 6. 5) или в произволен четириъгълник (чрез размяна и на точките U_{∞} и U ; виж Фигура 6. 6). Така успоредникът, трапецът и четириъгълникът са свързани фигури. Всяка от тези фигури може да бъде трансформирана във всяка от другите две чрез функцията РКБТ.



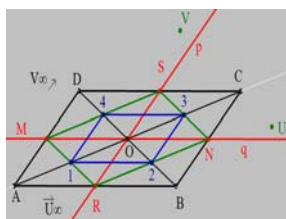
Фигура 6.5



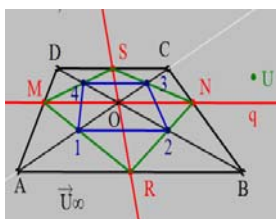
Фигура 6.6

Построенията, които са направени за една от тези фигури се запазват за останалите (Фигури 6.7 , 6.8 , 6.9). Този факт е важен, тъй като той има следните предимства:

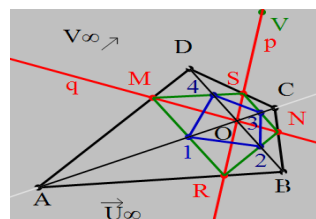
- 1) спестява се много чертожна работа;
- 2) подпомага се откриването на инвариантните релации между обектите;
- 3) обобщават се някои задачи и техните решения.



Фигура 6.7



Фигура 6.8



Фигура 6.9

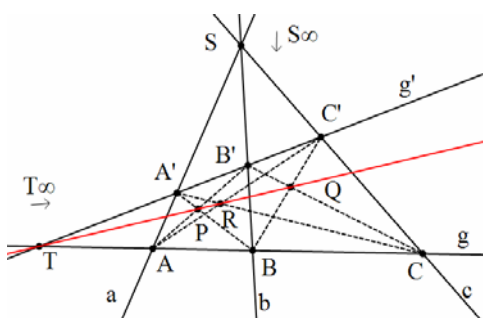
Упражнение № 2

Приложение на Теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници в училищни задачи

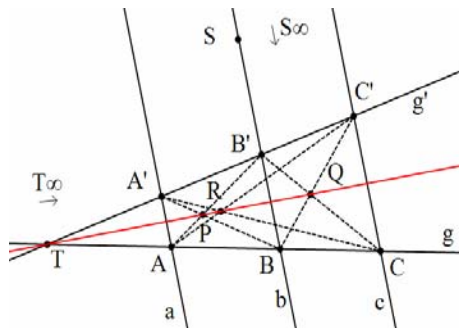
За да докажем, че четири точки са колинеарни е достатъчно да докажем, че две тройки от тези четири точки са колинеарни.

Задача 6.1 Дадени са правите g и g' като $g \cap g' = T$ и точките $A, B, C \in g$ и $A', B', C' \in g'$. Да се докаже, че ако правите AA', BB', CC' минават през една точка S , то точките $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$, $R = CA' \cap C'A$, T лежат на една права.

Решение Точките S и T могат да бъдат както крайни така и безкрайни. Достатъчно е да направим динамичния чертеж на един от четирите случая, например когато S и T са крайни точки (Фигура 6. 10), но непременно и да са свободни точки. Онагледяването с чертежи на останалите три случая се извършва с помощта на функцията РКБТ (Фигури 6. 11, 6. 12, 6. 13).

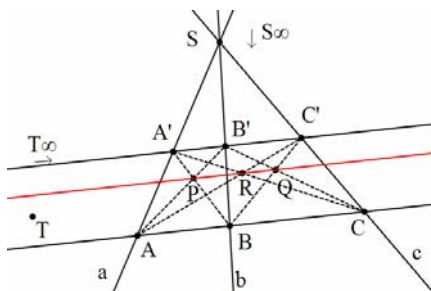


Фигури 6. 10

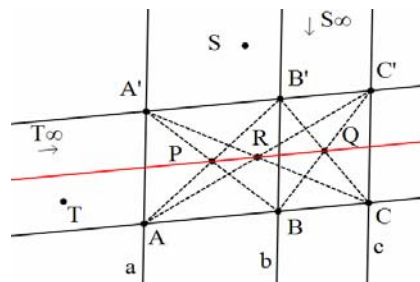


Фигури 6. 11

От условието правите AA', BB', CC' да са инцидентни с точката S , Определение 2.3 и Теоремата на Дезарг за перспективните триъгълници следва, че двойките триъгълници $AB'C$ и $A'B'C'$, ABC и $A'B'C$ са перспективни с перспективен център S и следователно тройките точки P, Q, T и T, Q, R са колинеарни. Тъй като точките Q и T са общи за двете прави, определени от тези тройки точки, то правите съвпадат или четирите точки P, Q, R, T са колинеарни.



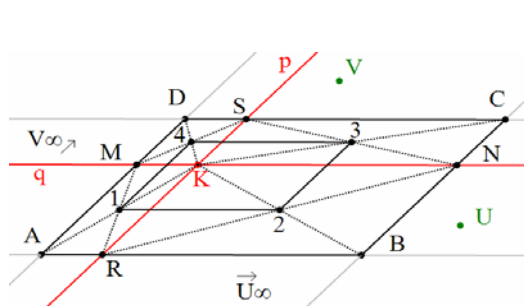
Фигури 6. 12



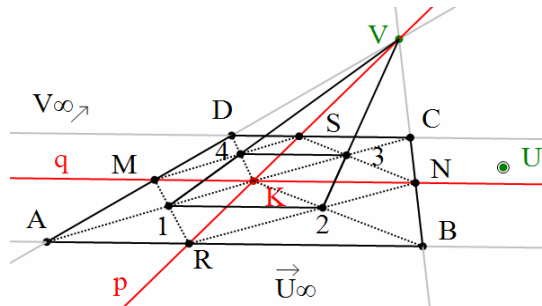
Фигури 6. 13

Задача 6.2 Даден е успоредник $ABCD$ и точка K , лежаща във вътрешността му. През точка K са построени правите $p \parallel AD$ и $q \parallel AB$. Въвеждаме означенията: $p \cap AB = R$, $p \cap CD = S$, $q \cap AD = M$, $q \cap BC = N$, $AK \cap MR = 1$, $BK \cap NR = 2$, $CK \cap SN = 3$, $DK \cap MS = 4$. Да се докаже, че четириъгълникът 1234 е успоредник.

Решение (Фигура 6.14) Нека означим общата безкрайна точка на AB и CD с U_∞ , а общата безкрайна точка на AD и BC с V_∞ . От условието $p \parallel AD \parallel BC$ следва, че можем да приложим Задача 6.1 (Фигура 6.13) за правите AB и q . Разглеждайки тройките точки A, R, V



Фигура 6.14



Фигура 6.15

и M, K, N получаваме колинеарност на точките $1, 2, U_\infty$, а разглеждайки тройките точки D, S, C и M, K, N получаваме колинеарност на точките $3, 4, U_\infty$. Следователно правите 12 и 34 са успоредни. Чрез аналогични разсъждения, приложени за тройките точки A, M, D и R, K, S получаваме колинеарност на точките $1, 4, V_\infty$, а приложени за тройките точки B, N, C и R, K, S получаваме колинеарност на точките $2, 3, V_\infty$. Следователно и правите 14 и 23 са успоредни. Така доказахме, че 1234 е успоредник със страни, успоредни на страните на дадения успоредник.

След размяна на безкрайната точка V_∞ с крайната точка V (чрез специалната функция на *Sam*) получаваме Фигура 6.15. Тя ни дава основание да формулираме следната задача

Задача 6.3 Дадени са трапец $ABCD$ с бедра AD и BC , чиито продължения се пресичат в точка V и точка K от вътрешността му. През точка K са построени правите $p = KV$ и $q \parallel AB$. Въвеждаме означенията: $p \cap AB = R$, $p \cap CD = S$, $q \cap AD = M$, $q \cap BC = N$, $AK \cap MR = 1$, $BK \cap NR = 2$, $CK \cap SN = 3$, $DK \cap MS = 4$. Да се докаже, че четириъгълникът 1234 е трапец с бедра 14 и 23 , чиито продължения се пресичат в точка V .

Упътване Повтаря се решението на Задача 6.2 като точка V_∞ се заменя с точка V . Сега, когато се доказва колинеарност на тройките точки $1, 2, U_\infty$ и $3, 4, U_\infty$ се прилага Задача 6.1 във варианта от Фигура 6.12, а когато се доказва колинеарност на тройките точки $1, 4, V$ и $2, 3, V$ се прилага Задача 6.1 във варианта от Фигура 6.11.

Задача 6.4 Приложете функцията РКБТ за точките U_∞ и U върху динамичния чертеж на Фигура 6.15, формулирайте съответната задача и запишете решението ѝ.

Задача 6.5 Да се докаже:

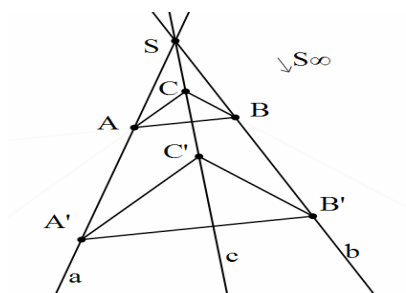
- 6.5.1) Медианите в триъгълника се пресичат в една точка.
- 6.5.2) Всеки два хомотетични триъгълника са перспективни ;
- 6.5.3) Всеки два перспективни триъгълника с ос безкрайната права ω са съответни за хомотетия или за трансляция.

Решение 6.5.1) Да означим средите на страните BC, CA, AB на ΔABC съответно с A', B', C' . От свойството на средните отсечки на триъгълника ($B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$, $A'B' \parallel AB$) следва, че точките $P_\infty = BC \cap B'C'$, $Q_\infty = CA \cap C'A'$, $R_\infty = AB \cap A'B'$ са безкрайни.

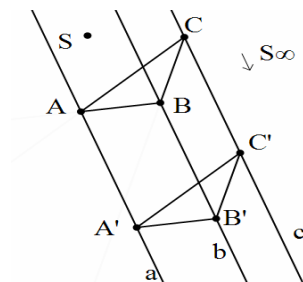
Тогава те лежат върху безкрайната права ω , т.е. $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ имат перспективна ос ω . Следователно условията на Теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници са удовлетворени и тогава правите AA' , BB' , CC' са конкурантни, което означава още, че медианите на $\triangle ABC$ имат обща точка.

6.5.3) От условието, че двата перспективни триъгълника ABC и $A'B'C'$ имат перспективна ос $s = \omega$ следва, че съответните им страни са успоредни. Съгласно Теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници те имат и перспективен център S и за него има две възможности:

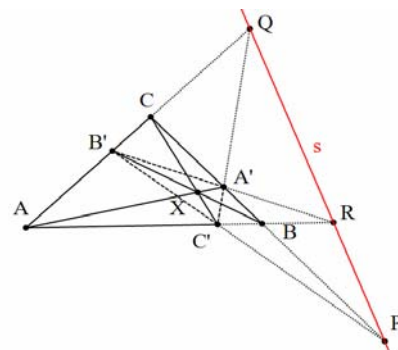
- S е крайна точка (Фигура.6.16). В този случай $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ са съответни за хомотетия с център S ;
- S е безкрайна точка (Фигура 6.17). В този случай $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ са съответни за трансляция.



Фигура 6.16



Фигура 6.17



Фигура 6.18

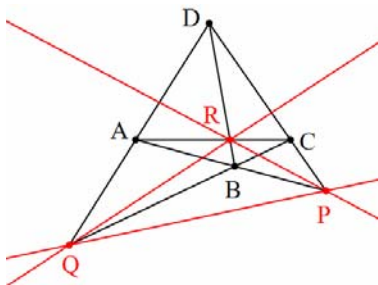
Всяка забележителна точка X на $\triangle ABC$ може да се разглежда като перспективен център за двойката перспективни триъгълници: даденият $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, където $A' = AX \cap BC$, $B' = BX \cap AC$, $C' = CX \cap AB$ (Фигура 6.18). За тях са изпълнени условията на Теоремата на Дезарг и следователно пресечните точки на двойките им съответни страни са колинеарни. Това позволява да се съставят множество задачи за доказване на колинеарност на три точки. Предлагаме един пример, свързан с центъра на вписаната в триъгълника окръжност.

Задача 6.6 Ако A' , B' , C' са пресечните точки на ъглополовящите на вътрешните ъгли на $\triangle ABC$ със срещулежащите им страни, т.е. $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, да се докаже колинеарност на следните три точки: $P = BC \cap B'C'$, $Q = CA \cap C'A'$, $R = AB \cap A'B'$

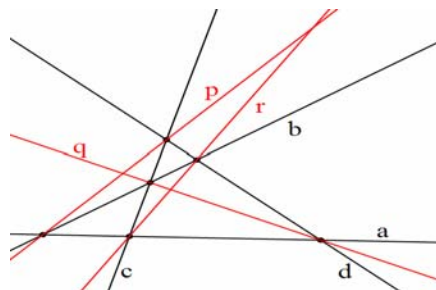
7 Свойства на пълния четириъгълник и пълния четиристранник

Съединителните прави на диагоналните точки на пълния четириъгълник се наричат диагонални прави. Съгласно аксиома A_6 пълният четириъгълник има три различни диагонални прави, неминаващи през една точка. (Фигура 7.1)

Пресечните точки на диагоналните прави на пълния четиристранник се наричат диагонални точки. Съгласно твърдението A_6' пълният четиристранник има три различни, неколинеарни диагонални прави (Фигура 7.2). Трите диагонални точки (прави) на пълния четириъгълник (четиристранник) определят триъгълник, който се нарича диагонален триъгълник на пълния четириъгълник (четиристранник).



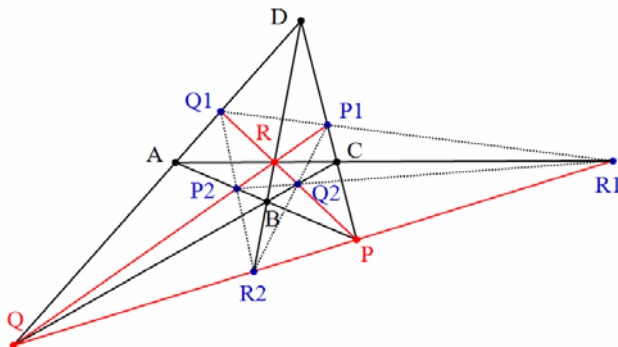
Фигура7.1



Фигура7.2

Теорема 7.1 Ако $ABCD$ е пълен четириъгълник с диагонални точки $P = AB \cap CD, Q = BC \cap AD, R = CA \cap BD$ и $P_1 = QR \cap CD, P_2 = QR \cap AB, Q_1 = RP \cap AD, Q_2 = RP \cap BC, R_1 = PQ \cap AC, R_2 = PQ \cap BD$, то тройките точки $P_1Q_1R_1, P_2Q_2R_1, P_1Q_2R_2, P_2Q_1R_2$ са колинеарни.

Доказателство: Ще докажем, че тройката точки $P_1Q_1R_1$ са колинеарни. Да разгледаме триъгълниците ACD и PQR (Фигура7.3). От условието следва, че правите AP, CQ, DR минават през точката B . Тогава, съгласно аксиома A_5 , точките P_1, Q_1, R_1



Фигура7.3

са колинеарни. За да докажем колинеарността на тройката точки $P_2Q_2R_1$ е достатъчно да

разгледаме триъгълниците CAB и PQR и да приложим отново аксиома A_5 . Предлагаме на читателя да докаже самостоятелно колинеарността на останалите две тройки точки.

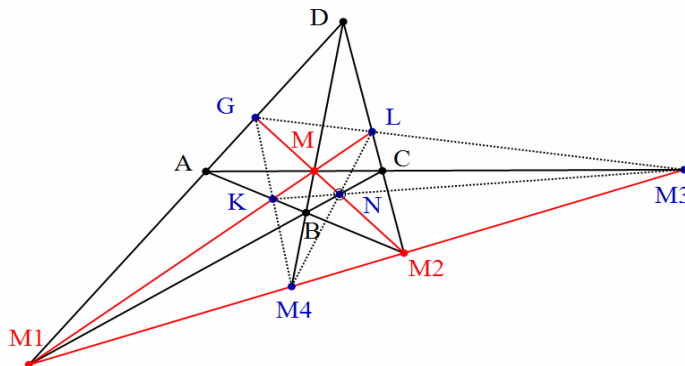
8 Хармонични групи

Определение 8.1 Казваме, че четири колинеарни точки M_1, M_2, M_3, M_4 образуват хармонична група, ако съществува пълен четириъгълник, за който M_1 и M_2 са диагонални точки, а M_3 и M_4 лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата диагонална точка.

Двойката точки M_3 и M_4 наричаме хармонично спрегнати относно двойката точки M_1 и M_2 и означаваме $H(M_1M_2, M_3M_4)$.

От определението е ясно, че точките M_3 и M_4 са равностойни, така както и точките M_1 и M_2 също са равностойни, т.е. ако $H(M_1M_2, M_3M_4)$, то и $H(M_2M_1, M_3M_4)$, $H(M_1M_2, M_4M_3)$, $H(M_2M_1, M_4M_3)$.

Теорема 8.1 Ако двойката точки M_3 и M_4 са хармонично спрегнати относно двойката точки M_1 и M_2 , то и двойката точки M_1 и M_2 са хармонично спрегнати относно двойката точки M_3 и M_4 .



Фигура 8.1

Доказателство: Нека $ABCD$ е пълен четириъгълник, за който M_1 и M_2 са диагонални точки, а M_3 и M_4 лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата диагонална точка M (Фигура 8.1). Съгласно Определение 8.1 имаме $H(M_1M_2, M_3M_4)$. Да въведем означенията:

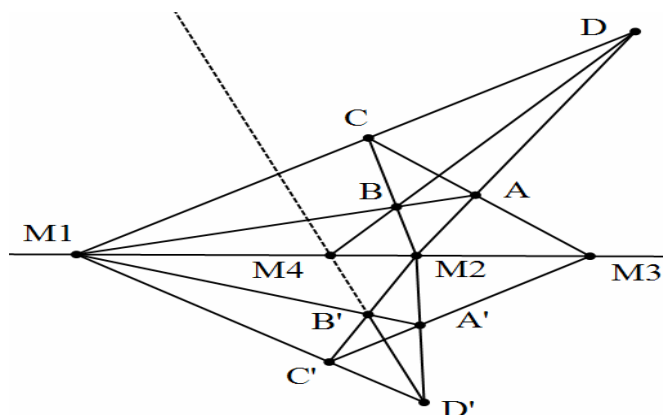
$$AB \cap MM_1 = K, CD \cap MM_1 = L, BC \cap MM_2 = N, AD \cap MM_2 = G.$$

Съгласно Теорема 7.1 тройките точки GLM_3 , KNM_3 , GKM_4 , $LN M_4$ са колинеарни. Тогава M_3 и M_4 са диагонални точки за пълния четириъгълник $KLGN$, а M_1 и M_2 лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата диагонална точка M . От Определение 8.1 следва, че двойката точки M_1 и M_2 са хармонично спрегнати относно двойката точки M_3 и M_4 или $H(M_3M_4, M_1M_2)$.

И така, Теорема 8.1 показва, че първата и втората двойка точки в една хармонична група са равностойни и симетрични.

В заключение на казаното до тук можем да направим следната рекапитулация: Ако $H(M_1M_2, M_3M_4)$, то и $H(M_2M_1, M_3M_4)$, $H(M_1M_2, M_4M_3)$, $H(M_2M_1, M_4M_3)$, $H(M_3M_4, M_1M_2)$, $H(M_3M_4, M_2M_1)$, $H(M_4M_3, M_1M_2)$, $H(M_4M_3, M_2M_1)$.

Основна задача Да се построи точка M_4 от хармоничната група $H(M_1M_2, M_3M_4)$, когато са дадени точките M_1, M_2, M_3 .



Фигура 8.2

1. Построяваме произволен триъгълник ABC , така че $M_1 \in AB, M_2 \in BC, M_3 \in CA$ (Фигура 8.2). За целта е достатъчно да се построи по една произволна права през всяка от точките A, B, C и да се намерят пресечните им точки.

2. Определяме точка $D = AM_2 \cap CM_1$, така че M_1 и M_2 да станат диагонални точки.

3. Построяваме точка $M_4 = BD \cap M_1M_2$.

Естествен е въпросът дали положението на точка M_4 зависи от избора на произволения триъгълник ABC . Отговор на този въпрос дава следната теорема.

Теорема 8.2 *Построението на точка M_4 , хармонично спрегната на точка M_3 относно двойката точки M_1 и M_2 не зависи от избора на произволения триъгълник ABC*

Доказателство: Да изберем друг произволен триъгълник $A'B'C'$, водещ до четириъгълника $A'B'C'D'$, както е показано на Фигура 8.2, т.е. $M_1 \in A'B', M_2 \in B'C', M_3 \in C'A', D' = A'M_2 \cap C'M_1$. Тогава $M_1M_2 \cap B'D' = M_4^*$.

Ще докажем, че точките M_4 и M_4^* съвпадат.

Да разгледаме триъгълниците ABC и $A'B'C'$. От колинеарността на точките $M_1 = AB \cap A'B', M_2 = BC \cap B'C', M_3 = AC \cap A'C'$ и Теоремата на Дезарг за перспективните триъгълници следва, че правите AA', BB', CC' минават през една точка, която ще отбележим с S .

Триъгълниците ACD и $A'C'D'$ също са перспективни с перспективна ос, определена от точките M_1, M_2, M_3 . Следователно и правата DD' минава през точката S .

Накрая да разгледаме триъгълниците ABD и $A'B'D'$. Тъй като правите

AA', BB', DD' минават през точката S , то съгласно Аксиома A_5 точките $BD \cap B'D'$, $AB \cap A'B' = M_1$, $AD \cap A'D' = M_2$ са колинеарни, т.е. правите $BD, B'D', M_1M_2$ имат обща точка. Следователно можем да запишем $BD \cap M_1M_2 = B'D' \cap M_1M_2$ или $M_4 = M_4^*$.

Следствие 8.1 Ако M_1, M_2, M_3 са три различни колинеарни точки, то съществува точно една точка M_4 , така че $H(M_1M_2, M_3M_4)$.

Определение 8.2 Четири прави t_1, t_2, t_3, t_4 , минаващи през една точка, образуват хармонична група, ако съществува пълен четиристранник $abcd$, за който t_1 и t_2 са диагонални прави, а правите t_3 и t_4 минават съответно през двойката срещуположни върхове, лежащи върху третата диагонална права. Означаваме $H(t_1t_2, t_3t_4)$.

Упражнение № 3

Задача 8.1 Даден е пълният четириъгълник $ABCD$ с диагонални точки $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $R = AC \cap BD$ (Фигура 7.3). Да се опишат хармоничните групи, свързани с двойките диагонални точки.

Решение Съгласно Определение 8.1 имаме хармоничните групи $H(QR, P_1P_2)$, $H(RP, Q_1Q_2)$, $H(PQ, R_1R_2)$,

Задача 8.2 Даден е пълният четириъгълник $ABCD$ с диагонални точки $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $R = AC \cap BD$ и точките $P_1 : H(CD, PP_1)$, $Q_2 : H(BC, QQ_2)$, $R_2 : H(BD, RR_2)$ (Фигура 7.3).

Да се докаже, че:

- а) точките P_1, Q_2, R_2 са колинеарни;
- б) правите AB, CR_2, DQ_2 минават през една точка F ;
- в) двойките точки BP и AF са хармонично спрегнати.

Решение (Фигура 7.3) **8.2 а)** Тъй като триъгълниците PQR и CDB са перспективни с перспективен център A , то съгласно A_5' точките P_1, Q_2, R_2 са колинеарни.

8.2 б) Разглеждаме $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ и можем да запишем: $AC \cap BR_2 = AC \cap BD = R$, $AD \cap BQ_2 = AD \cap BC = Q$, $CD \cap R_2Q_2 = P^*$. Но $RQ \cap CD = P_1$, а съгласно 8.2 а) $P_1 \in R_2Q_2$. Тогава $P^* \equiv P_1 = CD \cap R_2Q_2 \cap RQ$ или $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективна ос, определена от точките R, Q, P_1 . Следователно условията на Твърдение A_5' са изпълнени и перспективните $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективен център $F = AB \cap CR_2 \cap DQ_2$.

8.2 в) Хармоничната група $H(BP, AF)$ следва от Определение 8.1, приложено за пълния четириъгълник DRQ_2C .

Задача 8.3 Дадени са колинеарните точки A, B, C . Да се намери точка X , определена от хармоничната група $H(AB, CX)$.

Упътване Виж Основната задача в §8 от учебника и Фигура 8.3 от Библиотеката.

3 Аксиоми на инцидентността на двумерната проективна равнина

Основни понятия: **точка и права**.

Основна релация: **инцидентност**.

Когато точка и права са инцидентни, ще казваме още, че точката лежи върху правата или правата минава през точката. Права, минаваща през две точки се нарича тяхна съединителна права. Точка, лежаща върху две прави, се нарича тяхна пресечна точка.

Три точки, инцидентни (неинцидентни) с една права, се наричат колинеарни (неколинеарни).

Три прави, инцидентни (неинцидентни) с една точка, се наричат конкурантни (неконкурантни).

Аксиома A_1 . Съществуват точка и права, които не са инцидентни.

Аксиома A_2 . С всяка права са инцидентни поне три различни точки.

Аксиома A_3 . Всеки две различни точки са инцидентни точно с една обща права.

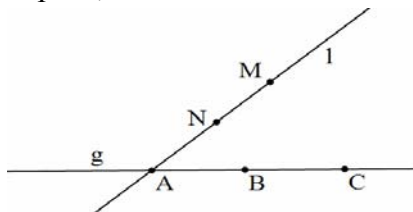
Аксиома A_4 . Всеки две прави са инцидентни поне с една обща точка.

Определение 3.1 Множеството на точките и правите, удовлетворяващи аксиомите A_1 , A_2 , A_3 , A_4 се нарича абстрактна проективна равнина (АПР).

Определение 3.2 Множеството на три неколинеарни точки и техните три съединителни прави се нарича триъгълник.

Теорема 3.1 Съществуват четири точки, никои три от които не са колинеарни.

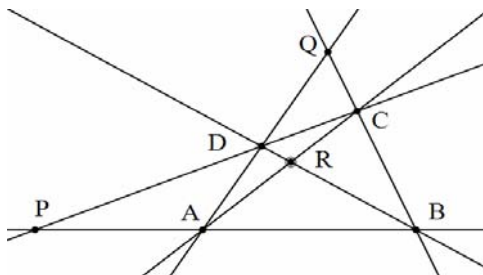
Доказателство: (Фигура 3.1) Съгласно аксиома A_1 съществуват неинцидентни точка и права, които да означим съответно с M и g .



Фигура 3.1

От аксиома A_2 следва, че върху правата g лежат поне три различни точки, които ще означим с A, B, C . Прилагайки последователно аксиоми A_3 и A_2 , можем да разгледаме правата $l = AM$ и точка $N \in l, N \neq A, N \neq M$. Така получихме точките M, N, B, C , никои три от които не са колинеарни.

Определение 3.3 Множеството на четири точки, никои три от които не са колинеарни и техните шест съединителни прави се нарича пълен четириъгълник.



Фигура 3.2

Точките A, B, C, D се наричат върхове, а правите AB, AC, AD, BC, BD, CD се наричат страни на пълния четириъгълник (Фигура 3.2).

Страните, неминаващи през един и същи връх, се наричат срещуположни. Пресечните точки на двойките срещуположни страни $P = AB \cap CD, Q = BC \cap AD, R = AC \cap BD$ се наричат диагонални.

От аксиоми A_1, A_2, A_3, A_4 не следва съществуване на повече от три точки върху всяка права. Нека въведем и следната аксиома:

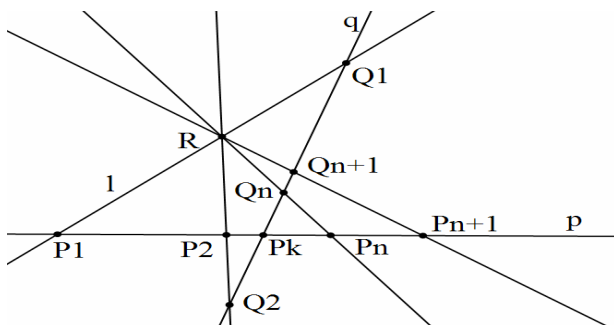
Аксиома А. Съществува права, инцидентна с точно $n+1$ точки, където n е естествено число и $n > 1$.

Абстрактната проективна равнина, удовлетворяваща аксиома А, се нарича крайна абстрактна проективна равнина от ред n (КАПР(n)).

Теорема 3.2

1. Всяка права, принадлежаща на КАПР(n) е инцидентна точно с $n+1$ точки.
2. Всяка точка, принадлежаща на КАПР(n) е инцидентна точно с $n+1$ прави.
3. КАПР(n) съдържа точно $n^2 + n + 1$ точки.
4. КАПР(n) съдържа точно $n^2 + n + 1$ прави.

Доказателство: (Фигура 3.3) 1). Съгласно аксиома А съществува права p , върху която лежат $n+1$ точки: $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}$. Нека q е произволна права, която съгласно аксиома A_4 пресича p и нека $p \cap q = P_k$. Аксиома A_2 гарантира съществуването на точка $Q_1 \in q, Q_1 \neq P_k$. Съгласно аксиома A_3 точките P_1 и Q_1 определят правата $l = P_1Q_1$.



Фигура 3.3

Прилагайки отново аксиома A_3 , установяваме съществуването на точка $R \in l, R \neq Q_1, R \neq P_1$.

Съгласно аксиома A_4 всяка от правите $RP_i (i = \overline{1, n+1})$ пресича q в точките Q_i . Така доказахме, че с правата q са инцидентни поне $n+1$ точки.

Да допуснем, че върху q има точка L и $L \neq Q_i$. Тогава поради аксиома A_4 $RL \cap p = P_0, P_0 \neq P_i$ или върху p има $n+2$ точки, което противоречи на условието. Следователно допускането не е вярно и върху q има точно $n+1$ точки.

2). Нека B е произволна точка. С помощта на Теорема 3.1 леко се доказва, че съществува права m , $m \notin B$. Върху правата m има $n+1$ точки M_i , всяка от които с точка B определят правите $BM_i (i = \overline{1, n+1})$. С това показахме, че през точка B минават поне $n+1$ прави.

Ако допуснем, че през точка B минава още една права и приложим аксиома A_4 , ще достигнем до противоречие с доказаното в 1), че върху m има точно $n+1$ точки. Следователно с всяка точка са инцидентни точно $n+1$ прави.

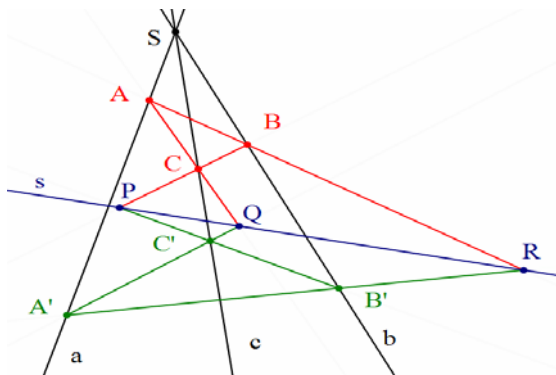
3). Вече доказахме, че през произволна точка B минават $n+1$ прави и върху всяка от тях лежат $n+1$ точки. Следователно, върху правите през точка B лежат $(n+1)n+1 = n^2 + n+1$ точки. Да допуснем, че $\text{КАПР}(n)$ има още една точка, която не е инцидентна с правите, минаващи през точка B . Но тогава следва, че през точка B минават $n+2$ прави, което противоречи на доказаното в 2). Следователно $\text{КАПР}(n)$ притежава точно $n^2 + n+1$ точки.

4). Съгласно доказаното в 1) и 2) върху произволна права q лежат $n+1$ точки и през всяка от тях минават по $n+1$ прави. Следователно правите в $\text{КАПР}(n)$ са поне $(n+1)n+1 = n^2 + n+1$. Допускането, че съществува още една права, води до заключението, че или върху правата q има $n+2$ точки, което противоречи на Твърдение 1), или през точка на q минават $n+2$ прави, което пък противоречи на Твърдение 2). Следователно правите в $\text{КАПР}(n)$ са точно $n^2 + n+1$.

Въпросът за съществуване на крайни абстрактни проективни равнини от произволен ред не е решен.

Нека към аксиомите A_1, A_2, A_3, A_4 на абстрактната проективна равнина прибавим и следните две:

Аксиома A_5 . Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Ако правите AA', BB', CC' са различни и инцидентни с една точка S , то точките $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са различни и лежат на една права s . (Фигура 3.4)



Фигура 3.4

Аксиома A_6 . Трите диагонални точки на пълния четириъгълник не са колинеарни.

Аксиомите $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ се наричат аксиоми на инцидентността на класическата проективна равнина.

Определение 3.4 Абстрактната проективна равнина, чиито точки и прави удовлетворяват (респективно не удовлетворяват) аксиома A_5 , се нарича дезаргова (респективно недезаргова).

Определение 3.5 Абстрактната проективна равнина, чиито точки и прави не удовлетворяват аксиома A_6 , се нарича равнина на Фано.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
l_1	•			•			•
l_2			•	•		•	
l_3	•	•				•	
l_4					•	•	•
l_5		•		•	•		
l_6	•		•		•		
l_7		•	•				•

Фигура 3.5

Пример на равнина на Фано е КАПР(2), чиито точки и прави са подредени съответно в редове и стълбове на известната фигура на Фано (Фигура 3.5).

Да проверим дали точките и правите на равнината на Фано удовлетворяват аксиомите $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.

Точка P_1 и права l_4 не са инцидентни.

С всяка права l_i ($i=1, \dots, 7$) са инцидентни точно три точки.

Непосредствена проверка установява, че с всеки две различни точки е инцидентна точно една права ($P_1P_2 = P_2P_6 = P_1P_6 = l_3, P_1P_3 = P_1P_5 = P_3P_5 = l_6, \dots, P_1P_7 = P_4P_7 = P_1P_4 = l_1$) и

всеки две прави имат обща точка ($l_1 \cap l_2 = P_4, l_1 \cap l_3 = P_1, \dots, l_6 \cap l_7 = P_3$). В равнината има точно 7 точки.

Така установихме, че аксиомите A_1, A_2, A_3, A_4, A са в сила за равнината на Фано.

Единственият пълен четириъгълник е $P_1P_2P_3P_4$. Неговите диагонални точки са: $P_1P_2 \cap P_3P_4 = l_3 \cap l_2 = P_6, P_1P_3 \cap P_2P_4 = l_6 \cap l_5 = P_5, P_1P_4 \cap P_2P_3 = l_1 \cap l_7 = P_7$. Тъй като точките P_5, P_6, P_7 лежат върху правата l_4 , то следва, че аксиома A_6 не е в сила за равнината на Фано.

Предмет на изучаване в настоящия курс е геометрията на класическата проективна равнина.

4 Принцип за дуалност

Нека във формулировката на аксиомите на инцидентността $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ заменим думите точка и права съответно с думите права и точка. Да проверим верността на получените твърдения, т.е. да проверим дали те са доказуеми въз основа на аксиомите на инцидентността $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ и техните следствия.

A_1' . Съществуват права и точка, които не са инцидентни.

Очевидно A_1' съвпада с A_1 .

A_2' . С всяка точка са инцидентни поне три различни прави.

Доказателство: Нека L е произволна точка. Съгласно Теорема 3.1 съществува права g , неинцидентна с L . От A_2 следва, че съществуват точките A, B, C , които са различни и лежат върху g . Съгласно A_3 съществуват правите $a = AL, b = BL, c = CL$, които са различни. С това твърдението A_2' е доказано.

A_3' . Всеки две различни прави са инцидентни точно с една обща точка.

Доказателство: Нека a и b са две произволни различни прави. От A_4 следва, че те имат поне една обща точка, която ще означим с C . Да допуснем, че правите a и b имат втора обща точка D , различна от C . Но съгласно A_3 през различните точки C и D минава точно една права или правите a и b съвпадат, което противоречи на условието, че a и b са различни прави. Следователно допускането не е вярно.

A_4' . Всеки две точки са инцидентни поне с една обща права.

Верността на A_4' следва непосредствено от аксиома A_3 .

Определение 4.1 *Фигури, чиито определения се получават едно от друго чрез замяната на думите точка и права съответно с думите права и точка, се наричат дуални.*

Определение 4.2 *Множеството на три прави, неминаващи през една точка и техните три пресечни точки се нарича тристранник.*

Очевидно е, че дуалните фигури триъгълник и тристранник са и идентични фигури.

A_5' . Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Ако точките

$P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са различни и колинеарни, то

правите AA', BB', CC' минават през една точка S .

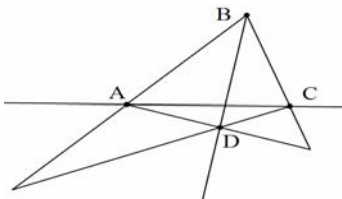
Доказателство: Да разгледаме триъгълниците PBB' и QAA' (Фигура 3.4). Тъй като правите $PQ, BA, B'A'$ са различни и минават през точка R , то можем да приложим аксиома A_5 . Следователно точките $C = PB \cap QA, C' = PB' \cap QA', S = BB' \cap AA'$ са различни и колинеарни, т.е. правите AA', BB', CC' са различни и минават през една точка S .

Определение 4.3 Триъгълниците ABC и $A'B'C'$, за които са изпълнени условията на аксиома A_5 или твърдението A_5' се наричат *перспективни триъгълници с перспективен център* точката S и *перспективна ос* правата s .

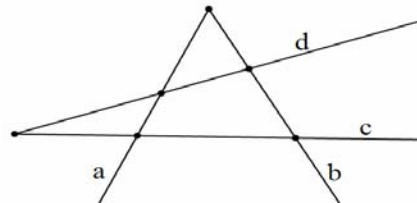
Твърдението A_5' се нарича **теорема на Дезарг за перспективните триъгълници**.

Жерар Дезарг (1591-1662) по професия е архитект и военен инженер. Роден е в Лион. От 1626 год. живее в Париж и се сприятелява с редица забележителни учени, между които и Декарт. Със своя научен труд "Общ метод на изображение на предметите в перспектива" (1636), той за първи път прилага координатния метод за построяване на перспективните мащаби. Изследвайки въпроса за равнинните сечения на конуса, Дезарг за първи път прилага общ метод за изучаване на елипса, парабола и хипербола. Така учението за коничните сечения придобива извънредно проста и изящна форма и води до необходимостта да се разглеждат безкрайните елементи. Съчинението на Дезарг, посветено на тези въпроси е написано през 1639 год., но било загубено. Случайно през 1845 год. Шал открива у парижки букинист ръкописно копие на този забележителен труд. Работите на Дезарг полагат научните основи на проективната геометрия.

Определение 4.4 Множеството на четири прави, никои три от които не минават през една точка и техните шест пресечни точки се нарича *пълнен четиристранник*.



Фигура 4.1 а)



Фигура 4.1 б)

Правите се наричат страни, а точките – върхове на пълния четиристранник. Върховете, нележащи на една и съща страна, се наричат срещуположни. Съединителните прави на двойките срещуположни върхове се наричат диагонални прави.

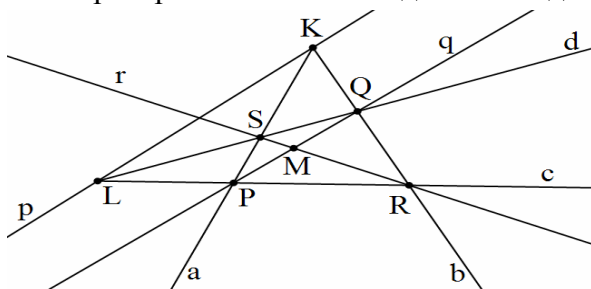
Пълният четириъгълник (Фигура 4.1 а)) и пълният четиристранник (Фигура 4.1 б)) са дуални фигури.

A_6' . Трите диагонални прави на пълния четиристранник не са инцидентни с една точка.

Доказателство: (Фигура 4.2). Нека $abcd$ е произволен пълен четиристранник. Да въведем следните означения:

$a \cap b = K, c \cap d = L, KL = p; a \cap c = P, b \cap d = Q, PQ = q; b \cap c = R, a \cap d = S, RS = r; q \cap r = M$. Ще докажем, че точките $PQRS$ образуват пълен четириъгълник. Да допуснем, че точките P, Q, R са колинеарни. Това означава, че правите $PR = c$ и $RQ = b$ съвпадат. Но тогава

правите b, c, d минават през една точка, което противоречи на условието, че е даден пълният четиристранник $abcd$. Следователно допускането, че точките P, Q, R са



Фигура 4.2

колинеарни не е вярно. По аналогичен начин се доказва, че и тройките точки PQS , QSR , SRP са неколинеарни, от където следва, че $PQRS$ е пълн четириъгълник.

Да допуснем, че диагоналните прави p, q, r на пълния четиристранник са инцидентни с една точка. Това означава, че точката $M = q \cap r$ лежи върху правата $p = KL$ т.е. диагоналните точки K, L, M на пълния четириъгълник $PQRS$ са колинеарни. Така стигнахме до противоречие с аксиома A_6 . Следователно допускането не е вярно, а Твърдението A_6' е вярно.

Теорема 4.1 (Принцип на дуалност.) *Ако в едно вярно твърдение T (доказуемо чрез аксиомите на инцидентността) извършим замяната на думите точка и права съответно с думите права и точка, получаваме отново вярно твърдение T' .*

Доказателство: Доказателството на твърдението T' може да се проведе като следваме хода на доказателството на твърдението T , механично заменяйки използваните аксиоми A_i със съответните им твърдения A_i' , ($i=1,2,3,4,5,6$), чиято вярност вече установихме.

Теорема 4.1 е известна като принцип на дуалност. Принциплът на дуалност е открит от Жергон (1771–1859).

Две твърдения, всяко от които се получава от другото със замяна във формулировката му на думите точка и права съответно с думите права и точка, се наричат дуални. Тъй като при доказване на верността на твърденията A_1', A_2', A_3', A_4' използвахме само аксиомите A_1, A_2, A_3, A_4 и техни следствия, то следва, че принципът за дуалност е в сила и за абстрактната проективна равнина.

Понеже твърдението:

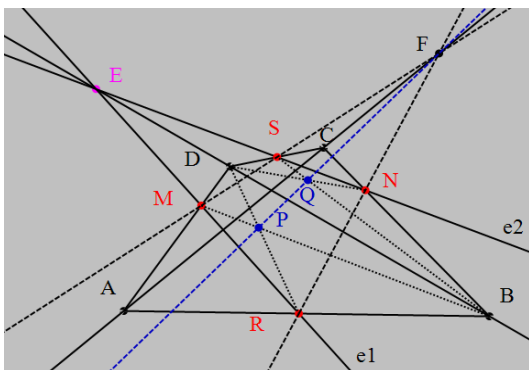
A' . Съществува точка, инцидентна с $n+1$ прави, където n е естествено число и $n > 1$ следва непосредствено от Теорема 3.2, то принципът за дуалност е в сила и в крайната абстрактна проективна равнина от ред n .

Упражнение №1

Аксиома A_5 е инструмент за доказване на колинеарност на три точки. Достатъчно е да посочим подходяща двойка триъгълници, удовлетворяващи условията на аксиома A_5 .

Задача 4.1 Дадени са произволен четириъгълник $ABCD$, произволна точка E върху правата BD и две произволни прави e_1, e_2 през точка E . Нека означим:
 $e_1 \cap AD = M, e_1 \cap AB = R, e_2 \cap CD = S, e_2 \cap BC = N, MS \cap NR = F, BM \cap DR = P,$
 $BS \cap DN = Q$. Докажете, че:

- Точките A, C, F са колинеарни;
- Точките P, Q, F са колинеарни;



Фигура 4.3

Решение (Фигура 4.3) а) Да разгледаме триъгълниците MSD и RNB . Условието на задачата осигурява конкурантност на правите MR, SN, DB , защото те минават през точката E . Следователно $\triangle MSD$ и $\triangle RNB$ са перспективни с перспективен център E и съгласно Аксиома A_5 пресечните точки на двойките съответни страни, т.е. точките $MS \cap RN = F, SD \cap NB = C$ и $MD \cap RB = A$ са колинеарни.

б) Да разгледаме триъгълниците MSB и RND . Те са перспективни с перспективен център точка E . Съгласно Аксиома A_5 пресечните точки на двойките съответни страни, т.е. точките $MS \cap RN = F, SB \cap ND = Q$ и $MB \cap RD = P$ са колинеарни.

Твърдение A'_5 (дуално на аксиома A_5), известно още като теорема на Дезарг за перспективните триъгълници е средство, посредством което доказваме конкурантност на три прави.

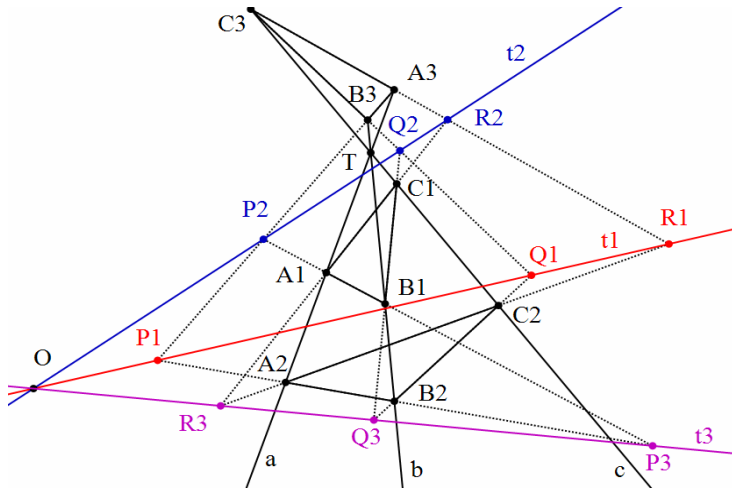
Задача 4.2 Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни с общ перспективен център, то техните три перспективни оси минават през една точка. Да се формулира дуалната задача.

Решение (Фигура 4.4) Да означим трите триъгълника с $A_i B_i C_i, i = 1, 2, 3$, а общият им перспективен център - с T . От условието следва колинеарност на четворките точки

$A_1, A_2, A_3, T; B_1, B_2, B_3, T; C_1, C_2, C_3, T; .$ Трите перспективни оси t_1, t_2, t_3 се определят с точките $P_1, Q_1, R_1 \in t_1, P_2, Q_2, R_2 \in t_2, P_3, Q_3, R_3 \in t_3$, където

$$\begin{aligned} A_2B_2 \cap A_3B_3 &= P_1, & A_3B_3 \cap A_1B_1 &= P_2, & A_1B_1 \cap A_2B_2 &= P_3, \\ B_2C_2 \cap B_3C_3 &= Q_1, & B_3C_3 \cap B_1C_1 &= Q_2, & B_1C_1 \cap B_2C_2 &= Q_3, \\ C_2A_2 \cap C_3A_3 &= R_1, & C_3A_3 \cap C_1A_1 &= R_2, & C_1A_1 \cap C_2A_2 &= R_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Да допуснем, че точките P_1, P_2, P_3 са колинеарни. Следователно $P_1P_2 = P_2P_3 \Leftrightarrow A_3B_3 = A_1B_1$, което противоречи на условието, че $\Delta A_3B_3C_3$ и $\Delta A_1B_1C_1$ са перспективни.



Фигура 4.4

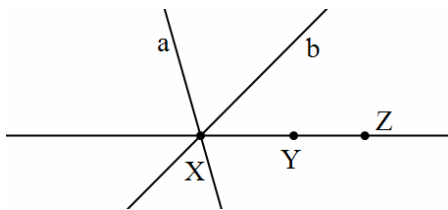
Следователно допускането не е вярно и точките P_1, P_2, P_3 не са колинеарни. Аналогично се доказва, че и тройката точки Q_1, Q_2, Q_3 не са колинеарни. Значи съществуват $\Delta P_1P_2P_3$ и $\Delta Q_1Q_2Q_3$, които ще разгледаме. Тъй като съгласно условието точките

$$\begin{aligned} P_1P_2 \cap Q_1Q_2 &= A_3B_3 \cap B_3C_3 = B_3, \\ P_2P_3 \cap Q_2Q_3 &= A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1, \\ P_3P_1 \cap Q_3Q_1 &= A_2B_2 \cap B_2C_2 = B_2 \end{aligned}$$

са инцидентни с права b , то прилагайки A_5' получаваме, че $\Delta P_1P_2P_3$ и $\Delta Q_1Q_2Q_3$ са перспективни с перспективна ос b и следователно имат перспективен център $O = P_1Q_1 \cap P_2Q_2 \cap P_3Q_3 = t_1 \cap t_2 \cap t_3$. С това доказахме, че трите перспективни оси t_1, t_2, t_3 на дадените в условието триъгълници минават през една точка O .

Дуална задача. Да се докаже, че ако три триъгълника са два по два перспективни с обща перспективна ос, то трите им перспективни центъра лежат на една права.

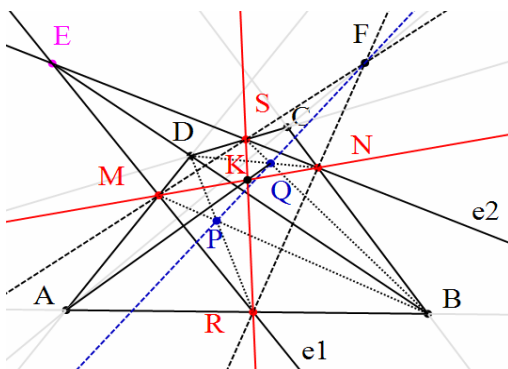
Стандартен подход при доказване на колинеарност на три точки X, Y, Z , където $X = a \cap b$, е замяната на условието колинеарност на точките X, Y и Z с условието за конкурентност на правите a, b и YZ , което изисква прилагане на Твърдението A_5' .



Фигура 4.5

Задача 4.3 Дадени са произволен четириъгълник $ABCD$, произволна точка E върху правата BD и две произволни прави e_1, e_2 през точка E . Нека означим: $MN \cap RS = K$, $e_1 \cap AD = M$, $e_1 \cap AB = R$, $e_2 \cap CD = S$, $e_2 \cap BC = N$, $BM \cap DR = P$, $BS \cap DN = Q$. Докажете, че точките A, K, Q са колинеарни.

Решение (Фигура 4.6) Разглеждаме триъгълниците MRA и NSQ . Пресечните точки на двойките съответни страни са: $MR \cap NS = E$, $MA \cap NQ = D$, $RA \cap SQ = B$. От условието, че точките B, D, E са колинеарни и Твърдение A_5 ' следва, че правите MN, RS, AQ са конкурантни, т.е. минават през една точка. Това означава, че правата AQ минава през точката $K = MN \cap RS$ или точките A, K, Q са колинеарни.



Фигура 4.6

5 Аксиоми на инцидентността на тримерното проективно пространство P_3 .

Основни понятия: **точка, права, равнина.**

Основни релации: **инцидентност на точка и права, инцидентност на точка и равнина.**

Аксиома B_1 . Съществуват точка и права, които не са инцидентни.

Аксиома B_2 . С всяка права са инцидентни поне три различни точки.

Аксиома B_3 . Всеки две различни точки са инцидентни точно с една обща права.

Аксиома B_4 . Всеки три точки, неинцидентни с една права, са инцидентни точно с една обща равнина.

Аксиома B_5 . С всяка равнина е инцидентна поне една точка.

Аксиома B_6 . За всяка равнина съществува поне една точка, неинцидентна с нея.

Аксиома B_7 . Ако две точки, инцидентни с една права, са инцидентни и с една равнина, то всяка точка, която е инцидентна с правата е инцидентна и с равнината.

Определение 5.1 Права и равнина са инцидентни, когато всяка точка, инцидентна с правата е инцидентна и с равнината.

Аксиома B_8 . Всеки две равнини са инцидентни с една и съща права.

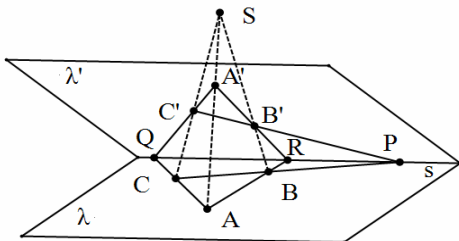
Аксиома B_9 . Всеки две прави, инцидентни с една и съща равнина, са инцидентни и с една и съща точка.

Нека отбележим, че аксиомите B_1, B_2, B_3, B_9 съвпадат с аксиомите на абстрактната проективна равнина A_1, A_2, A_3, A_4 . Твърденията, изказани в аксиомите A_5, A_6 сега се превръщат в теореми, които ще докажем чрез деветте аксиоми на инцидентността, които току-що формулирахме.

Теорема 5.1 (Теорема на Дезарг) Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Ако правите AA', BB', CC' са различни и инцидентни с една точка S , то точките $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са инцидентни с една права s .

Доказателство: Да означим с λ и λ' равнините, в които лежат съответно триъгълниците ABC и $A'B'C'$.

1. Нека равнините λ и λ' са различни. Съгласно аксиома B_8 λ и λ' имат обща права, която ще означим с s . (Фигура 5.1). Да въведем още следните означения: $AA' = a, BB' = b, CC' = c$. Правите AB и $A'B'$ лежат в равнината $\alpha = (a, b)$, BC и $B'C'$ лежат в равнината $\beta = (b, c)$, CA и $C'A'$ лежат в равнината $\gamma = (c, a)$.

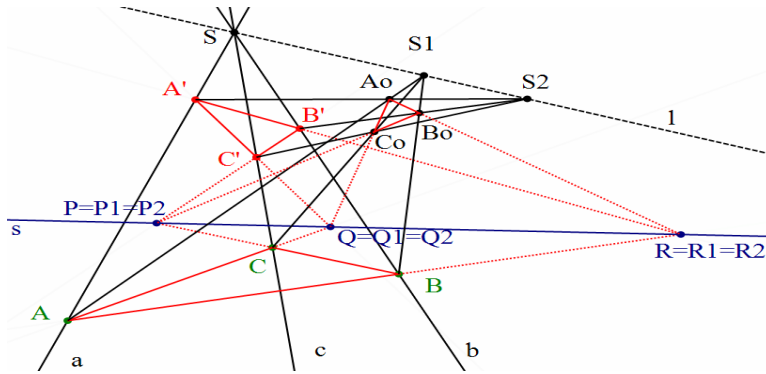


Фигура 5.1

Прилагайки аксиома B_9 , установяваме, че указаните двойки прави се пресичат.

Ако $BC \cap B'C' = P$, поради $BC \in \lambda, B'C' \in \lambda'$ следва, че $P \in \lambda, P \in \lambda'$, т.е. $P \in s$. Аналогично се доказва, че и $Q \in s, R \in s$.

2. Нека равнините λ и λ' съвпадат. Да изберем права $l \ni S, l \notin \lambda$ (Фигура 5.1). Върху правата l да изберем различните точки S_1 и S_2 , които са различни и от S . Правите AS_1 и $A'S_2$, BS_1 и $B'S_2$, CS_1 и $C'S_2$ се пресичат, защото лежат съответно в равнините $\alpha_1 = (a, l), \beta_1 = (b, l), \gamma_1 = (c, l)$. Да означим:
 $A^0 = AS_1 \cap A'S_2, B^0 = BS_1 \cap B'S_2, C^0 = CS_1 \cap C'S_2$.



Фигура 5.2

Точките A^0, B^0, C^0 не са колинеарни. Наистина, да допуснем, че точките A^0, B^0, C^0 лежат на една права, която ще отбележим с u . Но тогава точките A, B, C ще лежат на пресечницата на равнините λ и $\mu = (S_1, u)$, което противоречи на условието, че е даден триъгълник ABC . С това доказахме, че точките A^0, B^0, C^0 образуват триъгълник. С ν да отбележим равнината, в която той лежи. Равнините λ и ν са различни (допускането на обратното води до резултата $A^0 = A = A', B^0 = B = B', C^0 = C = C'$, което противоречи на условието, че са дадени два триъгълника ABC и $A'B'C'$).

Да разгледаме триъгълниците ABC и $A^0B^0C^0$. Те лежат в различни равнини и правите AA^0, BB^0, CC^0 минават през точка S_1 . Изпълнени са условията на теоремата в случая 1. и следователно точките $P_1 = BC \cap B^0C^0, Q_1 = CA \cap C^0A^0, R_1 = AB \cap A^0B^0$ лежат на правата $s_1 = \lambda \cap \nu$. Чрез аналогични разсъждения за триъгълниците $A'B'C'$ и $A^0B^0C^0$ установяваме, че точките $P_2 = B'C' \cap B^0C^0, Q_2 = C'A' \cap C^0A^0, R_2 = A'B' \cap A^0B^0$ лежат на правата $s_2 = \lambda' \cap \nu$. Тъй като $\lambda = \lambda'$, то $P_1 = P_2 = B^0C^0 \cap \lambda, Q_1 = Q_2 = C^0A^0 \cap \lambda, R_1 = R_2 = A^0B^0 \cap \lambda$. Следователно и точките $P = P_1 = P_2, Q = Q_1 = Q_2, R = R_1 = R_2$ също са колинеарни, с което теоремата е доказана.

Теорема 5.1 е причина в редица курсове по проективна геометрия да се обединяват двете твърдения за перспективните триъгълници в следната обща теорема, известна като

Теорема на Дезарг за перспективните триъгълници. Нека ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника. Правите AA', BB', CC' са различни и инцидентни с една точка S , тогава и само тогава, когато точките $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$ са различни и инцидентни с една права s .

Тази формулировка е за предпочитане, когато твърдението се прилага при решаване на училищни задачи.

6 Евклидов модел на аксиомите на инцидентността на P_3

Определение 6.1 Множеството на всички прави в E_3 , успоредни на дадена права a , включително и тя самата, се нарича безкрайна точка. Означаваме я с U_a или A_∞ .

Правата a или коя да е успоредна на нея права се нарича **представител на U_a** .

От определението непосредствено следва, че две различни прави определят една и съща безкрайна точка тогава и само тогава, когато са успоредни.

Понятието безкрайна точка е въведено от великия немски астроном Кеплер (1571-1630). Дезарг е първият геометър, който стига до необходимостта да се използват безкрайните точки на пространството, с което поставя и началото на неговото проективно представяне.

Определение 6.2 Множеството на всички равнини в E_3 , успоредни на дадена равнина α , включително и тя самата, се нарича безкрайна права. Означаваме я с u_α .

Равнината α или коя да е успоредна на нея равнина се нарича **представител на u_α** .

От определението непосредствено следва, че две различни равнини определят една и съща безкрайна права тогава и само тогава, когато са успоредни.

Понятието безкрайна права е въведено от Понселе.

Определение 6.3 Множеството на всички безкрайни точки и безкрайни прави се нарича безкрайна равнина. Означаваме я с Ω .

Точките, правите и равнините, принадлежащи на E_3 , ще наричаме евклидови или крайни.

Определение 6.4 Множеството на всички евклидови (крайни) точки, прави, равнини и на всички безкрайни точки и прави, както и безкрайната равнина се нарича **разширено евклидово пространство**. Разширеното евклидово пространство ще бележим с E_3^* .

Определение 6.5 Инцидентност на точка и права в E_3^* :

а) Крайните точки и прави в E_3^* са инцидентни тогава и само тогава, когато са инцидентни в евклидов смисъл;

б) Безкрайната точка U_a е инцидентна с крайната права g тогава и само тогава, когато a е успоредна на g или a съвпада с g .

в) Безкрайната точка U_a е инцидентна с безкрайната права u_a тогава и само тогава, когато a е успоредна на α или a лежи в нея.

г) Всяка крайна точка и всяка безкрайна права са неинцидентни.

Определение 6.6 *Инцидентност на точка и равнина в E_3^* :*

а) Крайните точки и равнини в E_3^* са инцидентни тогава и само тогава, когато са инцидентни в евклидов смисъл;

б) Безкрайната точка U_a е инцидентна с крайната равнина α тогава и само тогава, когато a е успоредна на α или a лежи в α .

в) Всяка безкрайната точка е инцидентна с безкрайната равнина Ω .

г) Всяка крайна точка не е инцидентна с безкрайната равнина Ω .

Сега ще установим в какви случаи са инцидентни правите и равнините в E_3^* .

Крайните прави и равнини в E_3^* са инцидентни тогава и само тогава, когато са инцидентни в евклидов смисъл;

Тъй като никоя крайна точка не лежи в безкрайната равнина Ω , то и никоя крайна права не лежи в нея. Всяка безкрайна права лежи в безкрайната равнина Ω .

Нека u_α е безкрайна права, а β е крайна равнина. Съгласно Определение (6.5) в) точки, инцидентни с u_α , са само безкрайните точки, чиито представители са успоредни на α . Това, че тези точки са инцидентни и с β означава, че същите прави са успоредни и на β . Следователно безкрайната права u_α лежи в β тогава и само тогава, когато α е успоредна на β или α съвпада с β .

Сега ще изградим съответствието $\Phi: P_3 \rightarrow E_3^*$.

На точките от P_3 ще съпоставим крайните и безкрайните точки от E_3^* .

На правите от P_3 ще съпоставим крайните и безкрайните прави от E_3^* .

На равнините от P_3 ще съпоставим крайните равнини и безкрайната равнина Ω от E_3^* .

На основните релации инцидентност на точка и права, инцидентност на точка и равнина в P_3 ще съпоставим релациите инцидентност, въведени съответно с определения (6.5), (6.6) в E_3^* .

Точките, правите, равнините и релациите инцидентност в E_3^* ще бележим с точка^{*}, права^{*}, равнина^{*}, инцидентност^{*}.

Предстои да докажем в E_3^* верността на твърденията, които съответстват на аксиомите на инцидентността на P_3 , при установеното вече съответствие Φ .

B_1' . Съществуват точка^{*} и права^{*}, които не са инцидентни^{*}.

Съгласно аксиомите на E_3 съществуват крайна точка и права, които не са инцидентни.

B_2' . С всяка права^{*} са инцидентни^{*} поне три различни точки^{*}.

1) Нека a е произволна крайна права. От аксиомите на E_3 следва, че с a са инцидентни поне две различни точки. Прибавяйки към тях и безкрайната точка U_a , получаваме три различни точки върху a .

2) Нека u_α е произволна безкрайна права. През произволна крайна точка O построяваме три различни прави, успоредни на равнината α . Тези три прави определят три безкрайни точки, които принадлежат на u_α (Определение (6.5) в)).

B_3' . Всеки две различни точки $*$ са инцидентни $*$ точно с една обща права $*$.

Нека $A, B \in E_3^*$ са две произволни точки $*$.

1) A и B са крайни точки. Твърдението съвпада с аксиома на E_3 .

2) A е крайна точка, $B = U_b$ е безкрайна точка. От Аксиомата за успоредността на Евклид следва, че съществува точно една права g , инцидентна с A и успоредна на b . От определение (6.5) б) имаме $U_b \in g$.

3) $A = U_a$ и $B = U_b$ са безкрайни точки. Нека O е произволна крайна точка, а правите a_1 и b_1 минават през точка O и са съответно успоредни на a и b . Крайната равнина α , определена от пресичащите се прави a_1 и b_1 е представител на безкрайната права u_α , която съгласно Определение (6.6) в) е инцидентна с точките U_a и U_b . Правата u_α е единствена. Наистина, ако u_α' също е инцидентна с точките U_a и U_b , то равнината α' , бидейки успоредна на правите a и b , е успоредна на равнината α или $u_\alpha' = u_\alpha$.

B_4' . Всеки три точки $*$, неинцидентни $*$ с една права $*$, са инцидентни $*$ точно с една обща равнина $*$.

Нека $A, B, C \in E_3^*$ са три произволни точки $*$, неинцидентни $*$ с една права $*$.

1) A, B, C са крайни точки. Твърдението съвпада с аксиома на E_3 .

2) A и B са крайни точки, а $C = U_c$ е безкрайна точка. Крайната равнина α , която минава през правата AB и е успоредна на правата c , е единствената равнина, инцидентна с точките A, B, U_c .

3) A е крайна точка, а $B = U_b, C = U_c$ са безкрайни точки. Единствената крайна равнина α , която минава през точката A и е успоредна на правите b и c е търсената.

4) $A = U_a, B = U_b, C = U_c$ са безкрайни точки. С тях е инцидентна безкрайната равнина Ω и само тя.

B_5' . С всяка равнина $*$ е инцидентна $*$ поне една точка $*$.

B_6' . За всяка равнина $*$ съществува поне една точка $*$, неинцидентна $*$ с нея.

B_7' . Ако две точки $*$, инцидентни $*$ с една права $*$, са инцидентни $*$ и с една равнина $*$, то всяка точка $*$, инцидентна $*$ с правата $*$, е инцидентна $*$ с равнината $*$.

Доказателството на твърденията B_5', B_6', B_7' предоставяме на читателя.

B_8' . Всеки две равнини $*$ са инцидентни $*$ с една и съща права $*$.

Нека $\alpha, \beta \in E_3^*$ са две произволни равнини * .

1) α и β са крайни равнини.

1.1) Равнините α и β се пресичат в правата s . Тогава те са инцидентни с една и съща крайна права s .

1.2) Равнините α и β са успоредни. Тогава те са инцидентни с една и съща безкрайна права $u_\alpha = u_\beta$.

2) α е крайна равнина, $\beta = \Omega$ е безкрайната равнина. Тогава безкрайната права u_α е едновременно инцидентна с α и с Ω .

B_9' . Всеки две прави * , инцидентни * с една и съща равнина * , са инцидентни * и с една и съща точка * .

Нека a и b са две произволни прави * , лежащи в равнината * γ .

1) a и b са крайни прави и равнината γ също е крайна.

1.1) Правите a и b се пресичат. Следователно a и b имат обща крайна точка.

1.2) Правите a и b са успоредни. Следователно a и b имат обща безкрайна точка.

2) a е крайна права, $b = u_\beta$ е безкрайна права. Поради $a \in \gamma$, равнината γ е крайна, а от $b = u_\beta \in \gamma$ следва, че равнините γ и β са успоредни. Сега безкрайната точка U_a е обща за правите a и u_β .

3) $a = u_\alpha$ и $b = u_\beta$ са различни безкрайни прави, поради което и равнината γ е безкрайната равнина Ω . Сега правата $s = \alpha \cap \beta$ определя общата безкрайна точка за правите u_α и u_β .

Построеният модел на аксиомите на инцидентността ни позволява да пренесем в проективната геометрия нагледността, с която сме свикнали в евклидовата геометрия.

В някои учебници по проективна геометрия е предпочетен именно този подход за изграждане на проективното пространство - чрез допълване на евклидовото пространство с безкрайните елементи. Така евклидовата права, допълнена с безкрайната си точка е проективната права, евклидовата равнина, допълнена с безкрайната си права е проективната равнина. Но това са само модели на проективната права и проективната равнина, известни в литературата като евклидови модели.

В евклидовия модел на P_3 ще докажем валидността на аксиома A_6 .

Трите диагонални точки * на пълния четириъгълник $ABCD \in E_3^*$ не са инцидентни * с една права * .

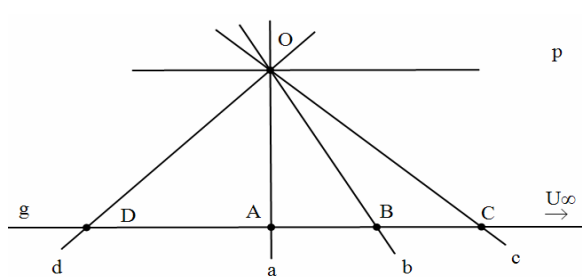
1) Да разгледаме успоредника $ABCD \in \alpha$. Неговите диагонални точки са $P_\infty = AB \cap CD, Q_\infty = AD \cap BC, R = AC \cap BD$. Тъй като правата $P_\infty Q_\infty = u_\alpha$ е безкрайна, то следва че крайната точка $R \notin u_\alpha$ (виж Определение (6.5) г)).

2) Нека сега $ABCD \in \alpha$ е произволен пълен четириъгълник в E_3^* с диагонални точки $P = AB \cap CD, Q = AD \cap BC, R = AC \cap BD$. Да изберем произволна точка $O \notin \alpha$ и произволна равнина β , успоредна на правите OP и OQ . Нека Φ е централно проектиране на α върху β с център O и тогава

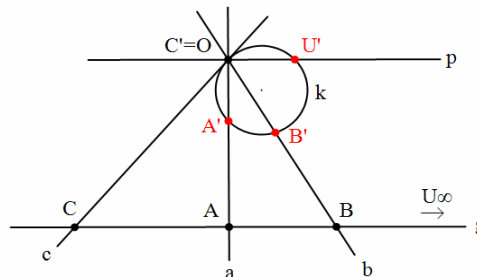
$\Phi(A, B, C, D, P, Q, R) = A', B', C', D', P'_\infty, Q'_\infty, R'$. Четириъгълникът $A'B'C'D'$ е успоредник, защото две от диагоналните му точки са безкрайни. Съгласно 1) точките P'_∞, Q'_∞, R' не са колинеарни. Тъй като централното проектиране запазва инцидентността на точките, то и точките P, Q, R , които са първообрази на точките P'_∞, Q'_∞, R' също не са колинеарни.

На базата на евклидовия модел на проективната права ще изградим още два нейни модела.

Може да се установи биективно изображение φ между точките на евклидовата права g , допълнена с безкрайната си точка U_g и правите на снопа прави $S(O)$, където $O \notin g$. Достатъчно е на всяка точка $X \in g$ да съпоставим правата OX . Тогава имаме $\varphi(A, B, U_g, \dots, C) = a, b, p, \dots, c$ (черт. 22.1). Лесно се съобразява, че φ е биективно изображение. Следователно снопът прави е друг модел на проективната права.



Фигура 6.1



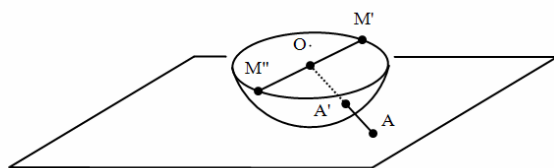
Фигура 6.2

Може да се установи биективно изображение ψ между точките на евклидовата права g , допълнена с безкрайната си точка U_g и точките на една окръжност k . Достатъчно е центърът O на проектиращия сноп прави да лежи върху окръжността k и на всяка точка $X \in g$ да съпоставим втората пресечна точка на правата OX с окръжността k . Така имаме $\psi(A, B, U_g, \dots, C) = A', B', U', \dots, C'$ (Фигура 6.2). Лесно се съобразява, че ψ е биективно изображение. Следователно окръжността е друг модел на проективната права.

Последните два модела подчертават свойството на проективната права да е затворена линия.

На базата на евклидовия модел на проективната равнина ще изградим друг модел на проективната равнина α . Да разгледаме полусфера S с център точка O и допираща се до α (Фигура 6.3). Да означим с k екватора на S – окръжността, която е сечение на сферата с равнина, която е успоредна на α и минава през точката O . Да проектираме точките на α от точка O и с ϕ да отбележим изображението $\phi: \alpha \rightarrow S$, при което $\phi(A) = A'$, където $A' = OA \cap S$. Очевидно е, че всяка крайна точка от α има точно един образ. Не стои така въпросът с безкрайните точки на α . Проектиращите ги прави ще пресичат екватора в две диаметрално противоположни точки M и M' . За да осигурим взаимно-еднозначността на ϕ , ще отъждествим диаметрално противоположните точки на екватора. Така всяка крайна права от α ще се изобразява в голяма полуокръжност на S , двете крайни точки на който,

лежащи върху екватора, съвпадат. По този начин се постига и проективната права да бъде затворена линия. Проективната равнина също е затворена повърхнина, която произволна нейна права не може да раздели на две части.



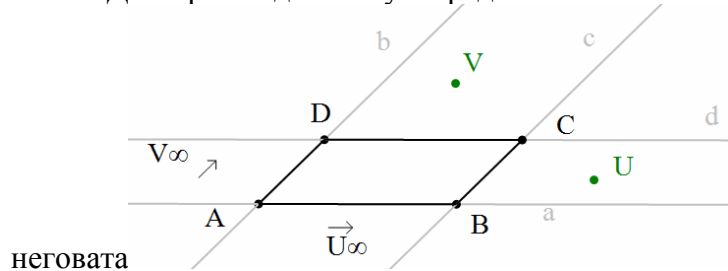
Фигура 6.3

Всички чертежи ще изпълняваме в евклидовия модел на проективната равнина.

Определение 6.7 *Фигурите, които се получават една от друга чрез прилагане на функцията "Размяна на крайна и безкрайна точки", ще наричаме свързани.*

Например, съвкупността на правите a, b, c от Фигура 2.3, които са инцидентни с точка U_{∞} и съвкупността на правите a, b, c от Фигура 2.4, които са инцидентни с точка U са свързани фигури.

Да разгледаме успоредника от Фигура 6.4. Свободните точки в

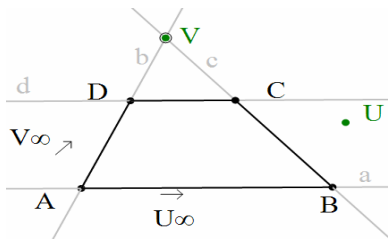


Фигура 6.4

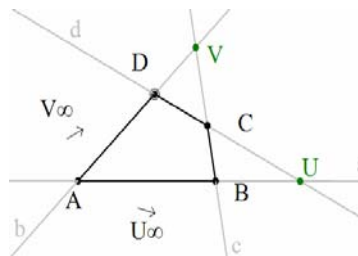
неговата конструкция са: A , U_{∞} и V_{∞} . Точките B и D са произволни точки, лежащи съответно върху правите $a = AU_{\infty}$ и $b = AV_{\infty}$, а C е пресечната точка на правите и $d = DU_{\infty}$ и $c = BV_{\infty}$. На края страните са построени като отсечки. Последователността на построенията може да бъде проследена чрез панела за презентация като се използва динамичния чертеж 6.4 от Библиотеката.

Определение 6.8 *Успоредникът $ABCD$ от Фигура 6.4 ще наричаме универсален успоредник.*

Ако U и V са произволни свободни крайни точки, то функцията РКБТ може да трансформира универсалния успоредник в трапец (чрез размяна на точките V_{∞} и V ; виж Фигура 6. 5) или в произволен четириъгълник (чрез размяна и на точките U_{∞} и U ; виж Фигура 6. 6). Така успоредникът, трапецът и четириъгълникът са свързани фигури. Всяка от тези фигури може да бъде трансформирана във всяка от другите две чрез функцията РКБТ.



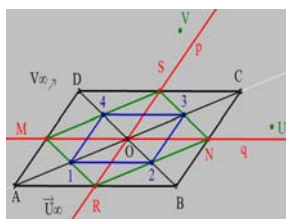
Фигура 6.5



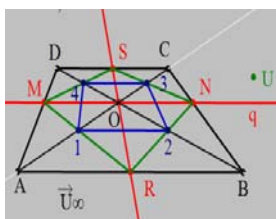
Фигура 6.6

Построенията, които са направени за една от тези фигури се запазват за останалите (Фигури 6.7 , 6.8 , 6.9). Този факт е важен, тъй като той има следните предимства:

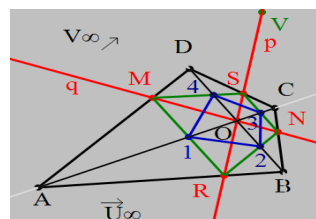
- 1) спестява се много чертожна работа;
- 2) подпомага се откриването на инвариантните релации между обектите;
- 3) обобщават се някои задачи и техните решения.



Фигура 6.7



Фигура 6.8



Фигура 6.9

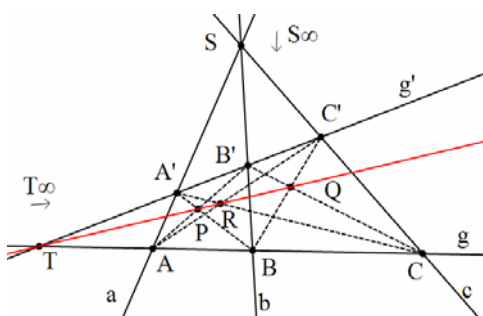
Упражнение № 2

Приложение на Теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници в училищни задачи

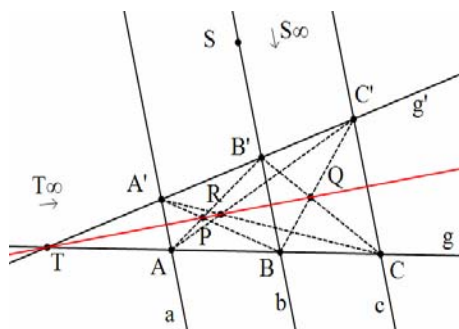
За да докажем, че четири точки са колинеарни е достатъчно да докажем, че две тройки от тези четири точки са колинеарни.

Задача 6.1 Дадени са правите g и g' като $g \cap g' = T$ и точките $A, B, C \in g$ и $A', B', C' \in g'$. Да се докаже, че ако правите AA', BB', CC' минават през една точка S , то точките $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$, $R = CA' \cap C'A$, T лежат на една права.

Решение Точките S и T могат да бъдат както крайни така и безкрайни. Достатъчно е да направим динамичния чертеж на един от четирите случая, например когато S и T са крайни точки (Фигура 6. 10), но непременно и да са свободни точки. Онагледяването с чертежи на останалите три случая се извършва с помощта на функцията РКБТ (Фигури 6. 11, 6. 12, 6. 13).

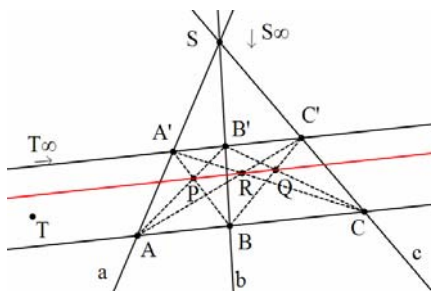


Фигури 6. 10

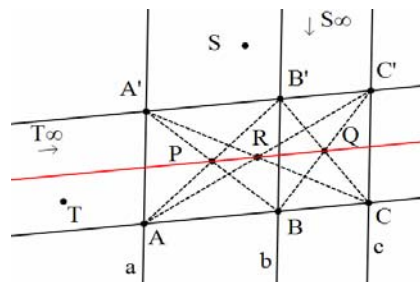


Фигури 6. 11

От условието правите AA', BB', CC' да са инцидентни с точката S , Определение 2.3 и Теоремата на Дезарг за перспективните триъгълници следва, че двойките триъгълници $AB'C$ и $A'B'C'$, ABC и $A'B'C$ са перспективни с перспективен център S и следователно тройките точки P, Q, T и T, Q, R са колинеарни. Тъй като точките Q и T са общи за двете прави, определени от тези тройки точки, то правите съвпадат или четирите точки P, Q, R, T са колинеарни.



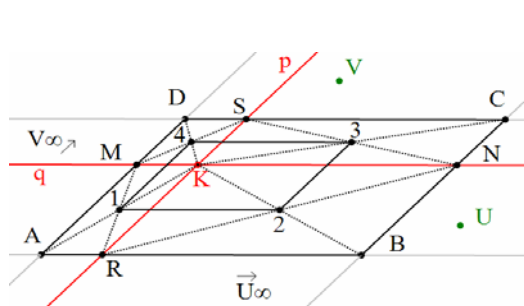
Фигури 6. 12



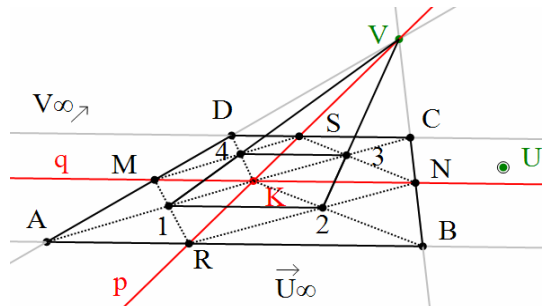
Фигури 6. 13

Задача 6.2 Даден е успоредник $ABCD$ и точка K , лежаща във вътрешността му. През точка K са построени правите $p \parallel AD$ и $q \parallel AB$. Въвеждаме означенията: $p \cap AB = R$, $p \cap CD = S$, $q \cap AD = M$, $q \cap BC = N$, $AK \cap MR = 1$, $BK \cap NR = 2$, $CK \cap SN = 3$, $DK \cap MS = 4$. Да се докаже, че четириъгълникът 1234 е успоредник.

Решение (Фигура 6.14) Нека означим общата безкрайна точка на AB и CD с U_∞ , а общата безкрайна точка на AD и BC с V_∞ . От условието $p \parallel AD \parallel BC$ следва, че можем да приложим Задача 6.1 (Фигура 6.13) за правите AB и q . Разглеждайки тройките точки A, R, V



Фигура 6.14



Фигура 6.15

и M, K, N получаваме колинеарност на точките $1, 2, U_\infty$, а разглеждайки тройките точки D, S, C и M, K, N получаваме колинеарност на точките $3, 4, U_\infty$. Следователно правите 12 и 34 са успоредни. Чрез аналогични разсъждения, приложени за тройките точки A, M, D и R, K, S получаваме колинеарност на точките $1, 4, V_\infty$, а приложени за тройките точки B, N, C и R, K, S получаваме колинеарност на точките $2, 3, V_\infty$. Следователно и правите 14 и 23 са успоредни. Така доказахме, че 1234 е успоредник със страни, успоредни на страните на дадения успоредник.

След размяна на безкрайната точка V_∞ с крайната точка V (чрез специалната функция на *Sam*) получаваме Фигура 6.15. Тя ни дава основание да формулираме следната задача

Задача 6.3 Дадени са трапец $ABCD$ с бедра AD и BC , чиито продължения се пресичат в точка V и точка K от вътрешността му. През точка K са построени правите $p = KV$ и $q \parallel AB$. Въвеждаме означенията: $p \cap AB = R$, $p \cap CD = S$, $q \cap AD = M$, $q \cap BC = N$, $AK \cap MR = 1$, $BK \cap NR = 2$, $CK \cap SN = 3$, $DK \cap MS = 4$. Да се докаже, че четириъгълникът 1234 е трапец с бедра 14 и 23 , чиито продължения се пресичат в точка V .

Упътване Повтаря се решението на Задача 6.2 като точка V_∞ се заменя с точка V . Сега, когато се доказва колинеарност на тройките точки $1, 2, U_\infty$ и $3, 4, U_\infty$ се прилага Задача 6.1 във варианта от Фигура 6.12, а когато се доказва колинеарност на тройките точки $1, 4, V$ и $2, 3, V$ се прилага Задача 6.1 във варианта от Фигура 6.11.

Задача 6.4 Приложете функцията РКБТ за точките U_∞ и U върху динамичния чертеж на Фигура 6.15, формулирайте съответната задача и запишете решението ѝ.

Задача 6.5 Да се докаже:

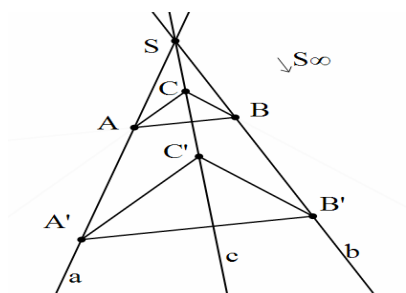
- 6.5.1) Медианите в триъгълника се пресичат в една точка.
- 6.5.2) Всеки два хомотетични триъгълника са перспективни ;
- 6.5.3) Всеки два перспективни триъгълника с ос безкрайната права ω са съответни за хомотетия или за трансляция.

Решение 6.5.1) Да означим средите на страните BC, CA, AB на ΔABC съответно с A', B', C' . От свойството на средните отсечки на триъгълника ($B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$, $A'B' \parallel AB$) следва, че точките $P_\infty = BC \cap B'C'$, $Q_\infty = CA \cap C'A'$, $R_\infty = AB \cap A'B'$ са безкрайни.

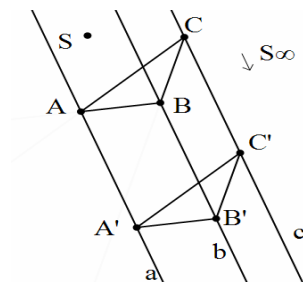
Тогава те лежат върху безкрайната права ω , т.е. $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ имат перспективна ос ω . Следователно условията на Теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници са удовлетворени и тогава правите AA' , BB' , CC' са конкурантни, което означава още, че медианите на $\triangle ABC$ имат обща точка.

6.5.3) От условието, че двата перспективни триъгълника ABC и $A'B'C'$ имат перспективна ос $s = \omega$ следва, че съответните им страни са успоредни. Съгласно Теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници те имат и перспективен център S и за него има две възможности:

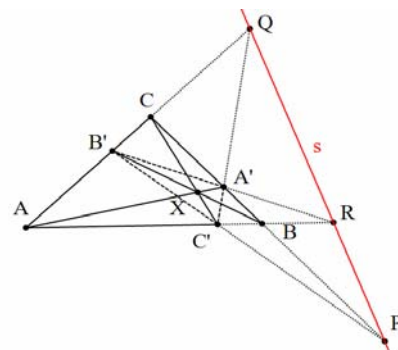
- а) S е крайна точка (Фигура.6.16). В този случай $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ са съответни за хомотетия с център S ;
- б) S е безкрайна точка (Фигура 6.17). В този случай $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ са съответни за трансляция.



Фигура 6.16



Фигура 6.17



Фигура 6.18

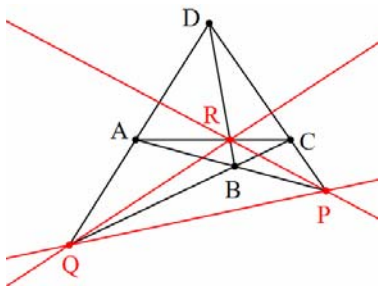
Всяка забележителна точка X на $\triangle ABC$ може да се разглежда като перспективен център за двойката перспективни триъгълници: даденият $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, където $A' = AX \cap BC$, $B' = BX \cap AC$, $C' = CX \cap AB$ (Фигура 6.18). За тях са изпълнени условията на Теоремата на Дезарг и следователно пресечните точки на двойките им съответни страни са колинеарни. Това позволява да се съставят множество задачи за доказване на колинеарност на три точки. Предлагаме един пример, свързан с центъра на вписаната в триъгълника окръжност.

Задача 6.6 Ако A' , B' , C' са пресечните точки на ъглополовящите на вътрешните ъгли на $\triangle ABC$ със срещулежащите им страни, т.е. $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, да се докаже колинеарност на следните три точки : $P = BC \cap B'C'$, $Q = CA \cap C'A'$, $R = AB \cap A'B'$

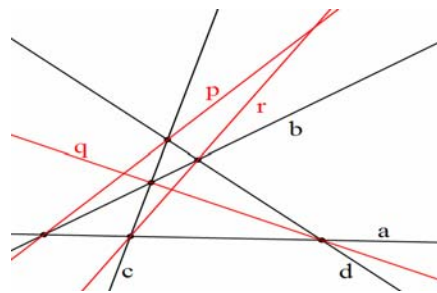
7 Свойства на пълния четириъгълник и пълния четиристранник

Съединителните прави на диагоналните точки на пълния четириъгълник се наричат диагонални прави. Съгласно аксиома A_6 пълният четириъгълник има три различни диагонални прави, неминаващи през една точка. (Фигура 7.1)

Пресечните точки на диагоналните прави на пълния четиристранник се наричат диагонални точки. Съгласно твърдението A_6' пълният четиристранник има три различни, неколинеарни диагонални прави (Фигура 7.2). Трите диагонални точки (прави) на пълния четириъгълник (четиристранник) определят триъгълник, който се нарича диагонален триъгълник на пълния четириъгълник (четиристранник).



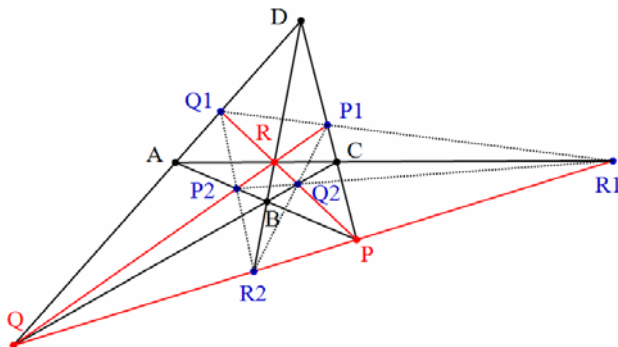
Фигура 7.1



Фигура 7.2

Теорема 7.1 Ако $ABCD$ е пълен четириъгълник с диагонални точки $P = AB \cap CD, Q = BC \cap AD, R = CA \cap BD$ и $P_1 = QR \cap CD, P_2 = QR \cap AB, Q_1 = RP \cap AD, Q_2 = RP \cap BC, R_1 = PQ \cap AC, R_2 = PQ \cap BD$, то тройките точки $P_1Q_1R_1, P_2Q_2R_1, P_1Q_2R_2, P_2Q_1R_2$ са колинеарни.

Доказателство: Ще докажем, че тройката точки $P_1Q_1R_1$ са колинеарни. Да разгледаме триъгълниците ACD и PQR (Фигура 7.3). От условието следва, че правите AP, CQ, DR минават през точката B . Тогава, съгласно аксиома A_5 , точките P_1, Q_1, R_1



Фигура 7.3

са колинеарни. За да докажем колинеарността на тройката точки $P_2Q_2R_1$ е достатъчно да

разгледаме триъгълниците CAB и PQR и да приложим отново аксиома A_5 . Предлагаме на читателя да докаже самостоятелно колинеарността на останалите две тройки точки.

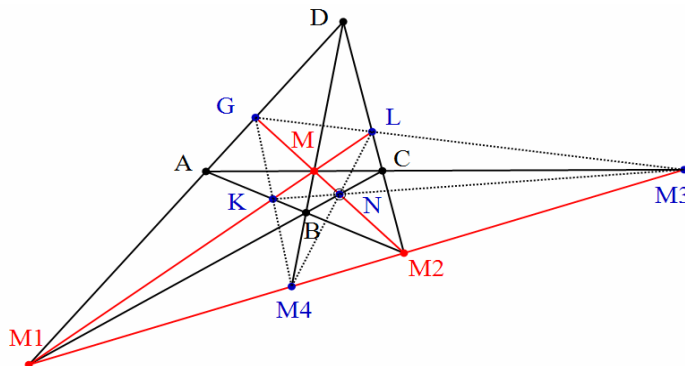
8 Хармонични групи

Определение 8.1 Казваме, че четири колинеарни точки M_1, M_2, M_3, M_4 образуват хармонична група, ако съществува пълен четириъгълник, за който M_1 и M_2 са диагонални точки, а M_3 и M_4 лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата диагонална точка.

Двойката точки M_3 и M_4 наричаме хармонично спрегнати относно двойката точки M_1 и M_2 и означаваме $H(M_1M_2, M_3M_4)$.

От определението е ясно, че точките M_3 и M_4 са равностойни, така както и точките M_1 и M_2 също са равностойни, т.е. ако $H(M_1M_2, M_3M_4)$, то и $H(M_2M_1, M_3M_4)$, $H(M_1M_2, M_4M_3)$, $H(M_2M_1, M_4M_3)$.

Теорема 8.1 Ако двойката точки M_3 и M_4 са хармонично спрегнати относно двойката точки M_1 и M_2 , то и двойката точки M_1 и M_2 са хармонично спрегнати относно двойката точки M_3 и M_4 .



Фигура 8.1

Доказателство: Нека $ABCD$ е пълен четириъгълник, за който M_1 и M_2 са диагонални точки, а M_3 и M_4 лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата диагонална точка M (Фигура 8.1). Съгласно Определение 8.1 имаме $H(M_1M_2, M_3M_4)$. Да въведем означенията:

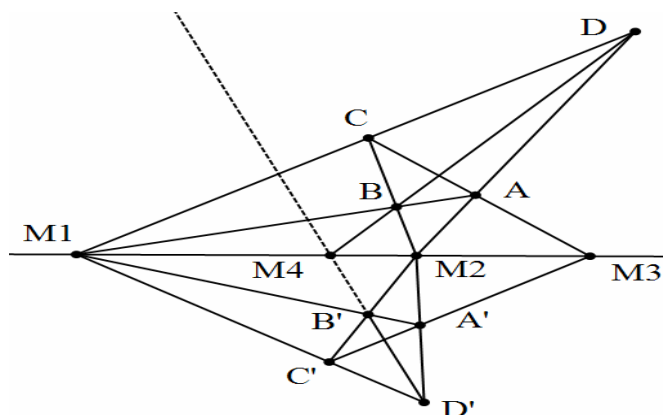
$$AB \cap MM_1 = K, CD \cap MM_1 = L, BC \cap MM_2 = N, AD \cap MM_2 = G.$$

Съгласно Теорема 7.1 тройките точки GLM_3 , KNM_3 , GKM_4 , $LN M_4$ са колинеарни. Тогава M_3 и M_4 са диагонални точки за пълния четириъгълник $KLGN$, а M_1 и M_2 лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата диагонална точка M . От Определение 8.1 следва, че двойката точки M_1 и M_2 са хармонично спрегнати относно двойката точки M_3 и M_4 или $H(M_3M_4, M_1M_2)$.

И така, Теорема 8.1 показва, че първата и втората двойка точки в една хармонична група са равностойни и симетрични.

В заключение на казаното до тук можем да направим следната рекапитулация: Ако $H(M_1M_2, M_3M_4)$, то и $H(M_2M_1, M_3M_4)$, $H(M_1M_2, M_4M_3)$, $H(M_2M_1, M_4M_3)$, $H(M_3M_4, M_1M_2)$, $H(M_3M_4, M_2M_1)$, $H(M_4M_3, M_1M_2)$, $H(M_4M_3, M_2M_1)$.

Основна задача Да се построи точка M_4 от хармоничната група $H(M_1M_2, M_3M_4)$, когато са дадени точките M_1, M_2, M_3 .



Фигура 8.2

1. Построяваме произволен триъгълник ABC , така че $M_1 \in AB, M_2 \in BC, M_3 \in CA$ (Фигура 8.2). За целта е достатъчно да се построи по една произволна права през всяка от точките A, B, C и да се намерят пресечните им точки.

2. Определяме точка $D = AM_2 \cap CM_1$, така че M_1 и M_2 да станат диагонални точки.

3. Построяваме точка $M_4 = BD \cap M_1M_2$.

Естествен е въпросът дали положението на точка M_4 зависи от избора на произволения триъгълник ABC . Отговор на този въпрос дава следната теорема.

Теорема 8.2 *Построението на точка M_4 , хармонично спрегната на точка M_3 относно двойката точки M_1 и M_2 не зависи от избора на произволения триъгълник ABC*

Доказателство: Да изберем друг произволен триъгълник $A'B'C'$, водещ до четириъгълника $A'B'C'D'$, както е показано на Фигура 8.2, т.е. $M_1 \in A'B', M_2 \in B'C', M_3 \in C'A', D' = A'M_2 \cap C'M_1$. Тогава $M_1M_2 \cap B'D' = M_4^*$.

Ще докажем, че точките M_4 и M_4^* съвпадат.

Да разгледаме триъгълниците ABC и $A'B'C'$. От колинеарността на точките $M_1 = AB \cap A'B', M_2 = BC \cap B'C', M_3 = AC \cap A'C'$ и Теоремата на Дезарг за перспективните триъгълници следва, че правите AA', BB', CC' минават през една точка, която ще отбележим с S .

Триъгълниците ACD и $A'C'D'$ също са перспективни с перспективна ос, определена от точките M_1, M_2, M_3 . Следователно и правата DD' минава през точката S .

Накрая да разгледаме триъгълниците ABD и $A'B'D'$. Тъй като правите

AA', BB', DD' минават през точката S , то съгласно Аксиома A_5 точките $BD \cap B'D'$, $AB \cap A'B' = M_1$, $AD \cap A'D' = M_2$ са колинеарни, т.е. правите $BD, B'D', M_1M_2$ имат обща точка. Следователно можем да запишем $BD \cap M_1M_2 = B'D' \cap M_1M_2$ или $M_4 = M_4^*$.

Следствие 8.1 Ако M_1, M_2, M_3 са три различни колинеарни точки, то съществува точно една точка M_4 , така че $H(M_1M_2, M_3M_4)$.

Определение 8.2 Четири прави t_1, t_2, t_3, t_4 , минаващи през една точка, образуват хармонична група, ако съществува пълен четиристранник $abcd$, за който t_1 и t_2 са диагонални прави, а правите t_3 и t_4 минават съответно през двойката срещуположни върхове, лежащи върху третата диагонална права. Означаваме $H(t_1t_2, t_3t_4)$.

Упражнение № 3

Задача 8.1 Даден е пълният четириъгълник $ABCD$ с диагонални точки $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $R = AC \cap BD$ (Фигура 7.3). Да се опишат хармоничните групи, свързани с двойките диагонални точки.

Решение Съгласно Определение 8.1 имаме хармоничните групи $H(QR, P_1P_2), H(RP, Q_1Q_2), H(PQ, R_1R_2)$,

Задача 8.2 Даден е пълният четириъгълник $ABCD$ с диагонални точки $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $R = AC \cap BD$ и точките $P_1 : H(CD, PP_1)$, $Q_2 : H(BC, QQ_2)$, $R_2 : H(BD, RR_2)$ (Фигура 7.3).

Да се докаже, че:

- а) точките P_1, Q_2, R_2 са колинеарни;
- б) правите AB, CR_2, DQ_2 минават през една точка F ;
- в) двойките точки BP и AF са хармонично спрегнати.

Решение (Фигура 7.3) **8.2 а)** Тъй като триъгълниците PQR и CDB са перспективни с перспективен център A , то съгласно A_5' точките P_1, Q_2, R_2 са колинеарни.

8.2 б) Разглеждаме $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ и можем да запишем: $AC \cap BR_2 = AC \cap BD = R$, $AD \cap BQ_2 = AD \cap BC = Q$, $CD \cap R_2Q_2 = P^*$. Но $RQ \cap CD = P_1$, а съгласно 8.2 а) $P_1 \in R_2Q_2$. Тогава $P^* \equiv P_1 = CD \cap R_2Q_2 \cap RQ$ или $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективна ос, определена от точките R, Q, P_1 . Следователно условията на Твърдение A_5' са изпълнени и перспективните $\triangle ACD$ и $\triangle BR_2Q_2$ имат перспективен център $F = AB \cap CR_2 \cap DQ_2$.

8.2 в) Хармоничната група $H(BP, AF)$ следва от Определение 8.1, приложено за пълния четириъгълник DRQ_2C .

Задача 8.3 Дадени са колинеарните точки A, B, C . Да се намери точка X , определена от хармоничната група $H(AB, CX)$.

Упътване Виж Основната задача в §8 от учебника и Фигура 8.3 от Библиотеката.

Едноизмерими фигури и съответствия между тях

9 Перспективност между едноизмерими фигури

Определение 9.1 Множеството на всички точки, инцидентни с една права g се нарича *ред точки*.

Правата g се нарича носител на реда точки.

Определение 9.2 Множеството на всички прави, инцидентни с една точка O се нарича *сноп прави*.

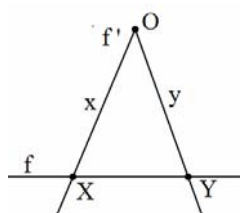
Точката O се нарича център на снопа прави, който ще бележим с $S(O)$.

Ред точки и сноп прави са дуални фигури. Ние ще изучим по-основно геометрията на редовете точки, а чрез принципа за дуалност на всяка теорема за редове точки ще съпоставяме съответната ѝ теорема за снопове прави.

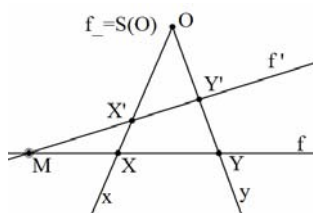
Определение 9.3 Редовете точки и сноповете прави се наричат *едноизмерими фигури*.

Определение 9.4 Нека f и f' са едноизмерими фигури от различен вид.

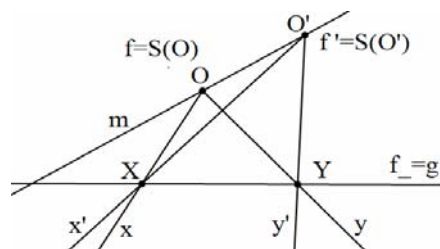
Биективно изображение на f върху f' , при което два елемента са съответни тогава и само тогава, когато са инцидентни, се нарича *перспективност на f върху f'* и бележим $f \underset{\pi}{\wedge} f'$ (Фигура 9.1 а).



Фигура 9.1 а)



Фигура 9.1 б)



Фигура 9.1 в)

За да установим перспективност между ред точки и сноп прави, трябва центърът на снопа прави да не принадлежи на реда точки. От Определение 9.4 следва, че ако π е перспективност на f върху f' , то π^{-1} е перспективност на f' върху f и освен тези две перспективности не съществуват други такива между f и f' .

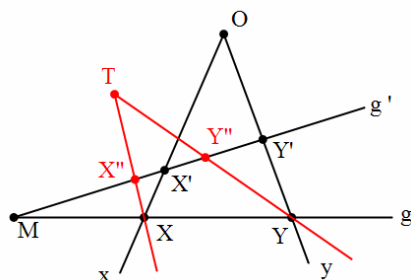
Определение 9.5 Нека f и f' са едноизмерими фигури от един и същи вид.

Биективно изображение на f върху f' , при което два елемента са съответни тогава и само тогава, когато са инцидентни с един и същи елемент на трета едноизмерима фигура $\bar{f}$, която е от различен вид с f и f' , се нарича *перспективност на f върху f'* и бележим $f \underset{\pi}{\wedge} f'$.

Фигурата $\bar{f}$ се нарича междинна за перспективността π .

От Определение 9.5 следва, че ако π е перспективност на f върху f' с междинна фигура $\bar{f}$, то π^{-1} е перспективност на f' върху f отново с междинна фигура $\bar{f}$.

Между две едноизмерими фигури от един и същи вид съществуват безбройно много перспективности, които зависят съществено от избора на междинната фигура (Фигура 9.1 з)).



Фигура 9.1 з)

Определение 9.6 Перспективност между два реда точки с междинна фигура *сноп прави* се нарича *централна* (Фигура 9.1 б)).

За да се зададе централна перспективност, трябва центърът на снопа прави да не принадлежи на нито един от дадените два реда точки.

Определение 9.7 Перспективност между два снопа прави с междинна фигура *ред точки* се нарича *осева* (Фигура 9.1 в)).

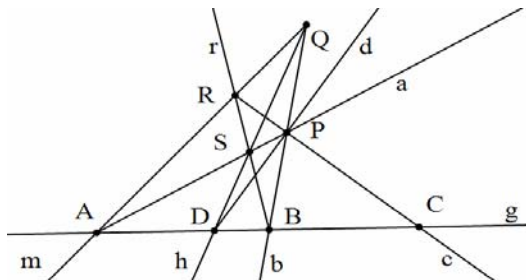
За да се зададе осева перспективност, трябва носителят на реда точки да не принадлежи на нито един от дадените два снопа прави.

Следвайки означенията на Фигура 9.1 б) и Фигура 9.1 в) можем да запишем

$$\begin{matrix} O & & g \\ XYM \wedge X'Y'M & \text{и} & xyt \wedge x'y't \end{matrix}$$

Теорема 9.1 Перспективностите запазват хармоничните групи.

Доказателство: 1) Нека точките $A, B, C, D \in g$ и π е перспективност на g върху снопа прави $S(P)$. Ако $H(AB, CD)$ и $ABCD \stackrel{\pi}{\wedge} abcd$, то $H(ab, cd)$.



Фигура 9.2

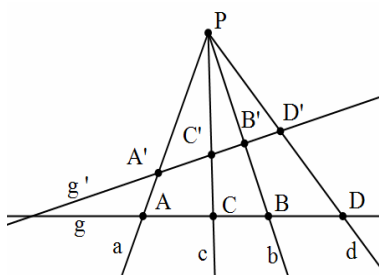
Съгласно Определение 8.1 съществува пълен четириъгълник $PQRS$, за който A и B са диагонални точки, а C и D лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата му диагонална точка (Фигура 9.2).

Да означим правите $BR = r, DQ = h, AQ = m$ и да разгледаме пълния четиристранник $ghmr$. Негови диагонални прави са: $(gm)(hr) = AS = a, (gr)(hm) = BQ = b$. Правите c и d минават съответно през точките $R = m \cap r$ и $D = g \cap h$, които са третата двойка срещуположни върхове.

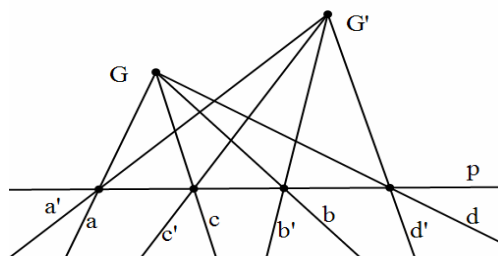
Вземайки предвид Определение 8.2, заключаваме, че е в сила $H(ab, cd)$.

2) Нека правите $a, b, c, d \in S(P)$ и $S(P) \underset{\pi}{\wedge} g$. Ако $H(ab, cd)$ и $abcd \underset{\pi}{\wedge} ABCD$, то $H(AB, CD)$.

Верността на това твърдение следва от верността на Твърдението 1) на настоящата теорема и принципа за дуалност.



Фигура 9.3



Фигура 9.4

3) Нека π е централна перспективност на реда точки g върху реда точки g' с междинна фигура снопа прави $S(P)$. Ако $H(AB, CD)$ и

$$ABCD \underset{\pi}{\wedge} A'B'C'D', \text{ то } H(A'B', C'D').$$

Съгласно верността на Теоремата в случаите 1) и 2) имаме съответно следните хармонични групи $H(ab, cd)$ и $H(A'B', C'D')$ (Фигура 9.3).

4) Нека π е осева перспективност на снопа прави $S(G)$ върху снопа прави $S(G')$ с междинна фигура реда точки p . Ако $a, b, c, d \in S(G), abcd \underset{\pi}{\wedge} a'b'c'd'$ и $H(ab, cd)$, то $H(a'b', c'd')$ (Фигура 9.4).

Верността на това твърдение следва от верността на Твърдението 3) на настоящата теорема и принципа за дуалност.

Теорема 9.1 ни позволява да сведем задачата за построяване на правата m_4 от хармонична група $H(m_1m_2, m_3m_4)$, където правите $m_1, m_2, m_3 \in S(O)$ и са зададени, до Основната задача от § 8 за построяване на точката M_4 от хармоничната група

$H(M_1M_2, M_3M_4)$, когато са дадени точките M_1, M_2, M_3 . Достатъчно е да пресечем снопа прави с произволен ред точки g и да разгледаме перспективността $S(O) \underset{\pi}{\wedge} g$. Ако $m_1m_2m_3 \underset{\pi}{\wedge} M_1M_2M_3$, то прилагайки Основната задача намираме точка $M_4 : H(M_1M_2, M_3M_4)$, а търсената права е $m_4 = OM_4 = \pi^{-1}(M_4)$.

Теорема 9.2 *Всеки два върха на пълния четириъгълник, диагоналната точка, лежаща върху съединителната им права и пресечната точка на тази права с диагоналната права, минаваща през другите две диагонални точки, образуват хармонична група.*

Доказателство: Ако следваме означенията на Фигура 9.3, трябва да докажем, че $H(AD, QQ_1)$, $H(BC, QQ_2)$, $H(CD, PP_1)$, $H(AB, PP_2)$, $H(AC, RR_1)$, $H(BD, RR_2)$. Доказателствата за отделните хармонични групи са аналогични и за това ще докажем само съществуването на хармоничната група $H(AD, QQ_1)$.

Да разгледаме централната перспективност π на реда точки с носител правата PQ върху реда точки с носител правата AD с център R , от която следва $R_1R_2QP \underset{\pi}{\wedge} ADQQ_1$. Съгласно Определение 8.1 имаме $H(R_1R_2, QP)$. Накрая прилагаме Теорема 9.1 и получаваме $H(AD, QQ_1)$. Чрез принципа за дуалност получаваме

Теорема 9.3 *Всеки две страни на пълния четиристранник, диагоналната права, минаваща през пресечната им точка и съединителната права на тази точка с диагоналната точка, лежаща върху другите две диагонални прави, образуват хармонична група.*

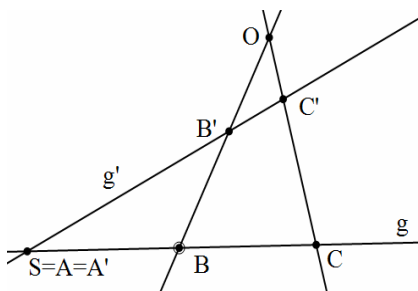
Упражнение № 4

Задача 9.1 Върху правите g и g' са зададени съответно тройките точки A, B, C и A', B', C' , като $g \cap g' = S$. Да се намери последователност от перспективности, която да изобрази точките A, B, C съответно в точките A', B', C' .

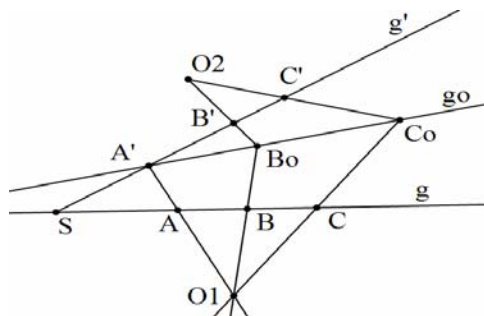
Да се разгледат случаите, когато:

- а) $g \neq g'$;
 - а₁) $A = A' = S$;
 - а₂) Точка S не съвпада с двойка съответни точки;
- б) $g \equiv g'$.

Решение 9.1 а₁) Ако означим $BB' \cap CC' = O$ (Фигура 9.5), то централната перспективност $\pi: ABC \xrightarrow{O} A'B'C'$ има желаните свойства.



Фигура 9.5



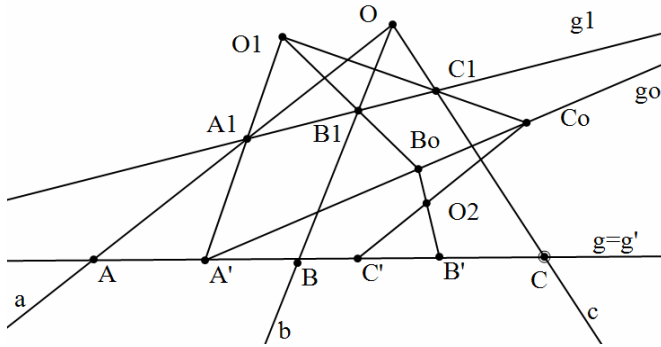
Фигура 9.6

9.1 а₂) Нека g_0 е произволна права, минаваща през точка A' , а O_1 е произволна точка, лежаща върху правата AA' (Фигура 9.6). Означаваме: $B_0 = O_1B \cap g_0$, $C_0 = O_1C \cap g_0$, $O_2 = B_0B' \cap C_0C'$ и разглеждаме следната поредица от перспективности:

$$ABC \xrightarrow[\pi_1]{O_1} A'B_0C_0 \xrightarrow[\pi_2]{O_2} A'B'C'.$$

Тогава $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1$ има желаните свойства.

9.1 б) Нека сега $g \equiv g'$. Избираме произволен ред точки g_1 и произволна точка O , нележаща както върху g така и върху g_1 .



Фигура 9.7

За точките $A_1 = OA \cap g_1, B_1 = OB \cap g_1, C_1 = OC \cap g_1$ и A', B', C' повтаряме конструкцията на 9.1 а₂) (презентирайте динамичния чертеж Фигура 9.7) и получаваме следната последователност от перспективности :

$$O \quad O_1 \quad O_2$$

$$ABC \underset{\pi}{\overset{=}{\wedge}} A_1B_1C_1 \underset{\pi_1}{\overset{=}{\wedge}} A'B_1C_1 \underset{\pi_2}{\overset{=}{\wedge}} A'B'C'. \text{ Тогава } \varphi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi \text{ има желаните свойства.}$$

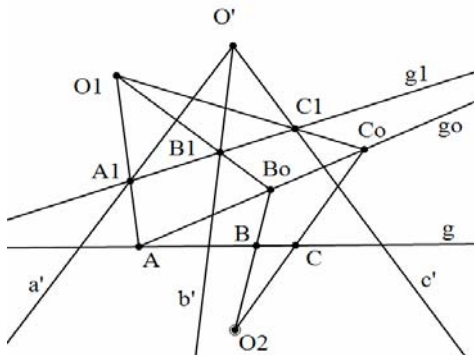
Задача 9.2 Дадени са точките $A, B, C \in g$ и правите $a', b', c' \in S(O')$. Да се намери последователност от перспективности, която да изобрази точките A, B, C съответно в правите a', b', c' .

Решение Да пресечем правите на снопа прави с произволна права g_1 и да означим с π перспективността $S(O') \underset{\pi}{\overset{=}{\wedge}} g_1$. Ако $a'b'c' \underset{\pi}{\overset{=}{\wedge}} A_1B_1C_1$, то повтаряме конструкцията на Задача 9.1 а₂) (презентирайте динамичния чертеж Фигура 9.8) и получаваме следната последователност от перспективности :

$$O_2 \quad O_1$$

$$ABC \underset{\pi_2}{\overset{=}{\wedge}} AB_1C_1 \underset{\pi_1}{\overset{=}{\wedge}} A_1B_1C_1 \underset{\pi}{\overset{=}{\wedge}} a'b'c'. \text{ Тогава}$$

$\varphi = \pi^{-1} \circ \pi_1 \circ \pi_2$ изобразява точките A, B, C съответно в правите a', b', c' .



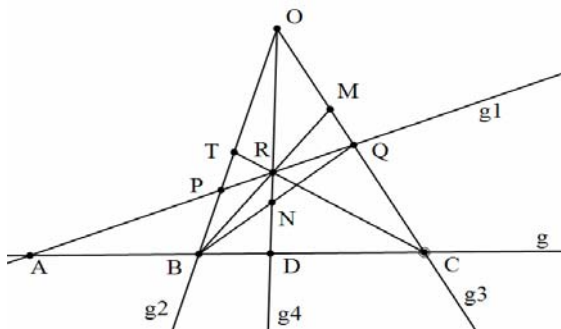
Фигура 9.8

Задача 9.3 Дадени са точките $A, B, C, D \in g$. Да се докаже, че чрез три последователни централни перспективности четворката точки A, B, C, D може да се трансформира в четворката точки :

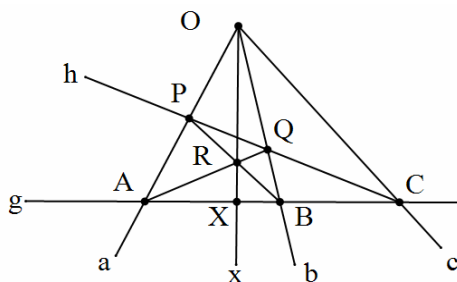
9.3 а) B, A, D, C ; **9.3 б)** C, D, A, B ; **9.3 в)** D, C, B, A .

Решение (Фигура 9.9) Избираме произволна права $g_1 \ni A$ и произволна точка $O \notin g$ и $O \notin g_1$. Да означим : $BO = g_2$, $CO = g_3$, $DO = g_4$, $g_1 \cap g_2 = P$, $g_1 \cap g_3 = Q$, $g_1 \cap g_4 = R$. Разгледайте следните последователности от перспективности :

$O \quad C \quad R \quad \quad \quad O \quad B \quad R \quad \quad \quad O \quad B \quad Q$
 $\quad = \quad = \quad = \quad \quad \quad = \quad = \quad = \quad \quad \quad = \quad = \quad =$
9.3 а) $g \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge g$; **9.3 б)** $g \wedge g_1 \wedge g_3 \wedge g$; **9.3 в)** $g \wedge g_1 \wedge g_4 \wedge g$;



Фигура 9.9



Фигура 9.10

Задача 9.4 Да се построи правата x от хармоничната група $H(ab, cx)$, където a, b, c са дадени прави

Решение (Фигура 9.10) Пресичаме снопа прави $S(O)$ с произволен ред точки g и чрез перспективността $\pi: S(O) \rightarrow g$ свеждаме настоящата задача до познатата Основна задача от §8 – Да се построи точка X от хармоничната група $H(AB, CX)$. Търсената права е $x = OX = \pi^{-1}(X)$, защото съгласно Теорема 8.1 перспективностите запазват хармоничните групи.

10 Аксиоми на наредбата

Основната релация, свързана с аксиомите на наредбата е **разделяне в четворка точки** или накратко ще я наричаме само разделяне.

Ако наредената двойка точки AB разделя наредената двойка точки CD , бележим AB/CD .

Аксиоми на наредбата:

Аксиома A_7 . Съществува права, съдържаща четири различни точки.

Аксиома A_8 . Ако AB/CD , то точките A, B, C, D са различни и колинеарни.

Аксиома A_9 . Ако AB/CD , то и $AB/DC, CD/AB$.

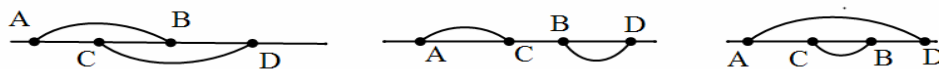
От A_9 следва, че ако AB/CD , то в сила са още $DC/AB, DC/BA, BA/DC, BA/CD$. С други думи, в две разделящи се двойки точки, можем да разменяме местата на точките във всяка двойка, както и местата на двете двойки. Ето защо от тук нататък ще казваме само двойката точки AB разделя двойката точки CD .

Аксиома A_{10} . Ако A, B, C, D са четири различни и колинеарни точки, то в сила е точно една от релациите $BC/AD, CA/BD, AB/CD$.

Аксиома A_{11} . Ако AB/CD и AC/BE , то AB/DE .

Аксиома A_{12} . Ако AB/CD и $ABCD \underset{\pi}{\wedge} A'B'C'D'$, то $A'B'/C'D'$ или централната перспективност запазва релацията разделяне.

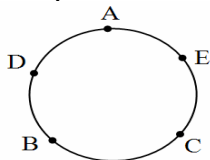
Определение 10.1 За точките A, B, C, D казваме, че AB следва CD и бележим $AB \times CD$ тогава и само тогава, когато те са различни, колинеарни и за тях не е в сила релацията AB/CD .



Фигура 10.1

Например на Фигура 10.1 имаме AB/CD , но $AC \times BD, AD \times BC$.

Аксиоми $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ принадлежат на Вейлати. Те отразяват очевидни свойства на точки, разположени върху окръжност. Ето защо често при разглеждане на точки върху проективна права е по-удобно да ги разполагаме върху окръжност или просто върху затворена линия.



Фигура 10.2

Например, Фигура 10.2 прави очевидни първите пет аксиоми на наредбата и особено пояснява A_{11} . Тя подчертава факта, че проективната права е затворена линия.

Аксиома A_{12} гарантира запазване на релацията разделяне при централна перспективност и дава възможност да се получат дуални определения и твърдения за

разделяне в четворка прави в сноп прави.

Определение 10.2 Ако a, b, c, d са четири различни прави, принадлежащи на сноп прави, то ще казваме, че двойката прави ab разделя двойката прави cd , ако при пресичането с произволна права g се получават точките A, B, C, D и AB/CD .

Бележим ab/cd .

Коректността на дефиницията за разделяне в четворка прави, т.е. независимостта от избора на произволната права g , следва непосредствено от аксиома A_{12} .

Теорема 10.1 Ако A, B, C са три различни точки, инцидентни с една права g , то съществува точка D , така че AB/CD .

Любознателният читател може да намери доказателството на тази теорема в [8].

Следствие 10.1 Всяка права съдържа безбройно много точки.

Определение 10.3 Ако A, B, C са колинеарни точки, то множеството на всички точки X , за които AB/CX се нарича отворен проективен сегмент AB , несъдържащ C . Бележим AB_C .

Определение 10.4 Обединението на отворен проективен сегмент AB_C и краищата му A и B се нарича затворен проективен сегмент. Бележим $[AB]_C$. Затворените проективни сегменти се наричат още проективни отсечки.

Определение 10.5 Ако a, b, c са три прави от един сноп прави, то множеството на всички прави x , за които ab/cx се нарича проективен ъгъл $\angle(a, b)$, несъдържащ правата c и бележим $\angle(a, b)_c$.

Правите a и b се наричат рамене на ъгъла.

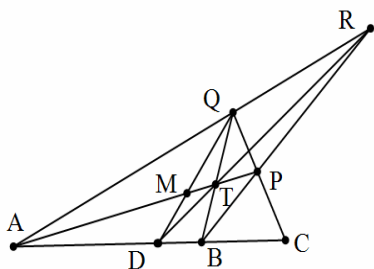
Фигурите проективен сегмент и проективен ъгъл са дуални.

Теорема 10.2 Ако A, B, C, D са различни колинеарни точки и $H(AB, CD)$, то AB/CD .

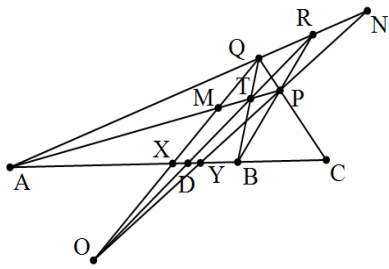
Доказателство: Нека $PQRT$ е пълен четириъгълник, свързан с дадената хармонична група. Съгласно Теорема 10.1 съществува точка M , така че AT/MP . Да означим $QM \cap AB = X, QM \cap RT = O, OP \cap AB = Y, OP \cap AR = N$. За точка X съществуват следните две възможности:

1) $X = D$ (Фигура 10.3). Тогава от $ATPM \overset{Q}{=} ABCD$, AT/PM и Аксиома A_{12} следва AB/CD .

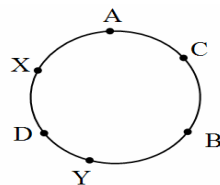
2) $X \neq D$ (Фигура 10.4). От перспективностите $ATPM \overset{Q}{=} ABCX$, $ATPM \overset{O}{=} ADYX$, $ATPM \overset{P}{=} ARNQ \overset{O}{=} ABYC$, релацията AT/PM и Аксиома A_{12} следват $AB/CX, AB/YC, AD/YX$. Така получихме $X \in AB_C, Y \in AB_C$, а $D \in XY_A$ или $D \in XY_C$. Следователно $XY_C \subset AB_C$ и $D \in AB_C$, т.е. AB/CD (Фигура 10.5).



Фигура 10.3



Фигура 10.4



Фигура 10.5

11 Наредено изображение и аксиома на непрекъснатостта

Насочен проективен сегмент се нарича всеки отворен или затворен проективен сегмент, краищата на който образуват наредена двойка точки, т. е. единият е наречен първи, а другият – втори.

Съседни проективни сегменти се наричат всеки два проективни сегмента, които принадлежат на един и същи ред точки и имат точно един общ край.

Еднопосочни съседни проективни сегменти се наричат всеки два насочени съседни проективни сегмента, които нямат обща вътрешна точка и общият им край е първи точно за единия от тях.

Еднопосочни проективни сегменти се наричат два насочени проективни сегмента F, F' от един и същи ред, за които съществува редица от съседни насочени проективни сегменти $F_1, F_2, \dots, F_n$ ($n \geq 1$), така че всеки два съседни проективни сегмента от редицата $F, F_1, F_2, \dots, F_n, F'$ са еднопосочни.

Така въведената релация еднопосочност на насочени проективни сегменти е релация на еквивалентност. Класът на еквивалентност, породен от тази релация се нарича **посока**. Във всеки ред съществуват точно две противоположни една на друга посоки.

Всички разглеждания, които направихме до тук за проективни сегменти, могат да се пренесат чрез дуалния принцип за проективни ъгли. Така, ако раменете на проективен ъгъл образуват наредена двойка, то той се нарича насочен; във всеки сноп прави съществуват точно две противоположни една на друга посоки.

За да се определи посока на движение по правата от точка A към точка B , е необходимо да се посочи кой от двата проективни сегмента се описва. Следователно необходимо е да се посочи поне още една точка, принадлежаща на описвания проективен сегмент. Така наредената тройка точки ABC определя посока върху правата $g = AB$, защото указва, че описваме проективния сегмент AB_C . Тази посока ще записваме със символа $P(ABC)$. Наредената тройка ACB определя противоположната посока върху g и записваме $P(ABC) \neq P(ACB)$. Ясно е, че $P(ABC) = P(BCA) = P(CAB)$.

Ако D, E, F са три различни точки от същата права g , то можем да кажем, че или $P(DEF) = P(ABC)$, или $P(DEF) \neq P(ABC)$.

В сила е следното твърдение:

Теорема 11.1 Релацията AB/CD е еквивалентна на релацията $P(ABC) \neq P(ABD)$, което ще приемем без доказателство.

Определение 11.1 Биективно изображение, което запазва релацията разделяне, се нарича *наредено изображение*.

От Определение 11.1 непосредствено следва, че нареденото изображение трансформира проективен сегмент в проективен сегмент и посока в посока.

От Определения 9.4, 9.5, 10.2, 11.1, Аксиома A_{12} и Теорема 9.1, 10.2, следва верността на следното твърдение

Теорема 11.2 Перспективността е наредено изображение.

Определение 11.2 Наредено изображение в едноизмерима фигура, при което дадена посока се изобразява в себе си, се нарича *еднопосочно*.

Определение 11.3 Наредено изображение в едноизмерима фигура, при което дадена посока се изобразява в противоположната си, се нарича *разнопосочно*.

Определение 11.4 Елемент, който съвпада със съответния си при изображението φ , се нарича *инвариантен* или *двоен елемент* на φ .

Определение 11.5 Изображението h в ред точки със следните свойства:

1) $h(M, N) = M, N$;

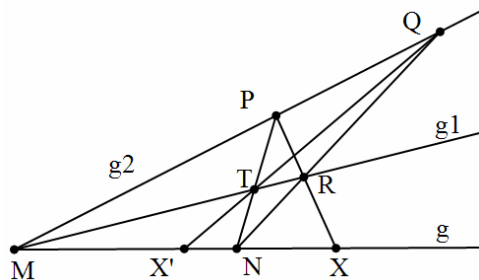
2) за всяко $X \in g, X \neq M, X \neq N, h(X) = X'$ тогава и само тогава, когато $H(MN, XX')$,

наричаме h -изображение и бележим с h_{MN} .

Отбелязването на двойните елементи долу вдясно не е задължително.

Теорема 11.3 h – изображението е *разнопосочно наредено изображение*.

Доказателство: Нека $PQRT$ е пълният четириъгълник, с помощта на който сме намерили точка $X' = h_{MN}(X)$ (Фигура 11.1).



Фигура 11.1

Да разгледаме следната последователност от перспективности:

$$MNX \underset{\pi_1}{\overset{Q}{\wedge}} MRT \underset{\pi_2}{\overset{N}{\wedge}} MQR \underset{\pi_3}{\overset{R}{\wedge}} MNX'$$

Тогава можем да запишем $h_{MN} = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. От представянето на h_{MN} и Теорема 11.2 следва, че h_{MN} е наредено изображение.

Тъй като $P(MNX) \xrightarrow{h_{MN}} P(MNX')$ и MN/XX' , то съгласно Теорема 11.1 и Определение

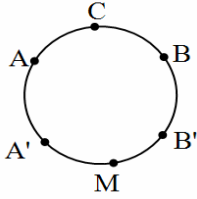
11.3 заключаваме, че h_{MN} е разнопосочно наредено изображение.

Теорема 11.4 Ако $H(MN, AB)$ и $H(MN, CD)$, то $AB \times CD$.

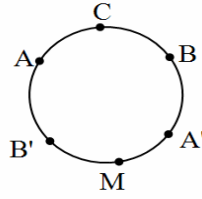
Доказателство: Да разгледаме изображението h_{MN} . Съгласно Определение 11.5 и условието на теоремата можем да запишем $h_{MN}(A, B, C) = B, A, D$. Поради това, че h_{MN} е разнопосочно наредено изображение, имаме $P(ABC) \neq P(BAD)$ или $P(ABC) = P(ABD)$. Прилагайки Теорема 11.1, установяваме $AB \times CD$.

Аксиома A_{13} . (Аксиома на непрекъснатостта) Ако при нареденото изображение φ затвореният проективен сегмент $[AB]_C$ се изобразява в затворения проективен сегмент $[A'B']_C$, така че $[A'B']_C \subset [AB]_C$, то съществува точка $M \in [A'B']_C$, такава че $\varphi(M) = M$ и в $[AM]_C$ няма друга инвариантна точка за φ .

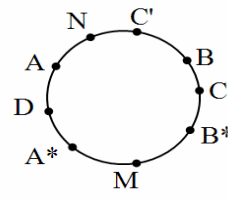
Фигура 11.2 и Фигура 11.3 съответстват на случаите, когато φ е съответно еднопосочно или разнопосочно наредено изображение.



Фигура 11.2



Фигура 11.3



Фигура 11.4

Теорема 11.5 Ако $AB \times CD$, то съществуват точки M, N , така че $H(AB, MN), H(CD, MN)$.

Доказателство: Нека h_{AB} и h_{CD} са h -изображения. Да означим:

$$h_{AB}(C) = C', \quad h_{CD}(A) = A^*, \quad h_{CD}(B) = B^*, \quad \varphi = h_{CD} \circ h_{AB}^{-1} \text{ (Фигура 11.4).}$$

От свойствата на h -изображението следва $C' \in [AB]_C, A^*, B^* \in [CD]_A$. Тъй като

$h_{AB}^{-1}: [AB]_{C'} \rightarrow [AB]_C \rightarrow [A^*B^*]_C$ и $[A^*B^*]_C \subset [AB]_{C'}$, то можем да приложим Аксиомата на непрекъснатостта. Следователно φ притежава инвариантна точка $M \in [A^*B^*]_C$, т.е.

$\varphi(M) = M$ или $M \xrightarrow{h_{AB}^{-1}} N \xrightarrow{h_{CD}} M$. Последният резултат можем да запишем и по следния начин $H(AB, MN), H(CD, MN)$, с което теоремата е доказана.

Геометричната дисциплина, изградена върху основните понятия - точка и права, основни релации - инцидентност и разделяне и аксиомите $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}$ се нарича **двумерна проективна геометрия**. Пространството, в което тя се реализира се нарича **реална проективна равнина** и се бележи с P_2 .

12 Проективност

Определение 12.1 Биективно изображение на едноизмеримата фигура f върху едноизмеримата фигура f' , което запазва хармоничните групи се нарича проективност.

Това определение за проективност е дадено от Щаут. Прието е проективността да се бележи със символа $\overline{\wedge}$, въведен също от Щаут.

От определението е ясно, че ако φ е проективност, то и φ^{-1} също е проективност. Непосредствено от определението за проективност следва

Теорема 12.1 Произведението на проективности е проективност.

Теорема 12.2 Произведението на краен брой перспективности е проективност.

Доказателство: Съгласно теорема 9.1 перспективностите запазват хармоничните групи. Следователно всяка перспективност е проективност. Но тогава и произведението на краен брой перспективности, което е биективно изображение ще запазва хармоничните групи или също ще бъде проективност.

В някои курсове по проективна геометрия определението на проективност има вида: Произведението на краен брой перспективности се нарича проективност. Този подход принадлежи на Понселе.

Жан Виктор Понселе (1788-1867) е френски геометър. Отначало служи в армията като подофицер и участва в похода на Наполеон в Русия. Като пленник в Русия от 1813 год. до 1814 год. той обобщава натрупаните резултати и внася своя принос в изследването на коничните сечения, използвайки както Дезарг и Паскал централната проекция. От 1835 год. Понселе е професор в Париж, но му се възлагат и военни задачи. Понселе свързва проективните свойства на кривите с хармоничните групи, въвежда понятието безкрайна права като пресечница на две успоредни равнини, изучава пространствените хомологии, разработва учението за полярното съответствие на точките и правите. Основното му съчинение е "Трактат за проективните свойства на фигурите" (1822). Понселе се счита за един от създателите на проективната геометрия. Съществени са и работите му по теоретична механика.

Теорема 12.3 Всяка проективност е наредено изображение.

Доказателство: Съгласно определение 11.1 достатъчно е да докажем, че проективността запазва релацията разделяне. Нека $ABCD \overline{\wedge}_{\varphi} A'B'C'D'$ и AB/CD . Да

допуснем, че не е в сила релацията $A'B'/C'D'$. Тогава от Теорема 11.5 следва съществуването на точки M', N' , така че $H(A'B', M'N')$ и $H(C'D', M'N')$. Нека $\varphi^{-1}(M'N') = M, N$. Тогава, тъй като φ^{-1} е проективност, ще имаме и следните хармонични групи $H(AB, MN), H(CD, MN)$. Сега от Теорема 11.4 следва $AB \wedge CD$, което противоречи на условието AB/CD . Значи допускането не е вярно и остава $A'B'/C'D'$.

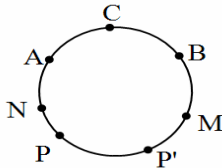
Теорема 12.4 Проективност в ред точки, която има три двойни точки съвпада с идентитета.

Доказателство: Нека φ е проективност в реда точки g , която има три двойни точки, които ще означим с A, B, C или $\varphi(A, B, C) = A, B, C$. Да допуснем, че φ не съвпада с идентитета, т.е. съществува точка P , така че $\varphi(P) = P'$ и $P \neq P'$. Без да намаляваме общността на разглежданията, ще приемем $P \in AB_C$ (черт.8.1). Тогава $P' \in AB_C$ и нека за определеност $P' \in PB_C$. От $\varphi([PB]_C) = [P'B]_C$, $[P'B]_C \subset [PB]_C$ и аксиома A_{13} следва, че

съществува точка $M \in [P'B]_C$, така че:

1) $\varphi(M) = M$; 2) В $[PM]_C$ няма друга двойна точка освен M .

От $\varphi^{-1}([P'A]_C) = [PA]_C$, $[PA]_C \subset [P'A]_C$ и Аксиома A_{13} следва, че съществува точка $N \in [PA]_C$, така че: 3) $\varphi(N) = N$; 4) В $[P'N]_C$ няма друга двойна точка освен N . Понеже $[MN]_C = [MP]_C \cup [P'N]_C$, то целият проективен сегмент MN_C не съдържа двойна точка за φ .



Фигура 12.1

Нека точка D е хармонично спрегната на точка C относно MN , т.е. $H(MN, CD)$. Следователно $D \in MN_C$. Нека $\varphi(D) = D'$. Тъй като φ е проективност и $\varphi(M, N, C, D) = M, N, C, D'$, то $H(MN, CD')$. Тогава от Следствие 8.1 следва $D = D'$ или проективният сегмент MN_C съдържа двойна точка D за φ . Този резултат противоречи на доказаното вече твърдение, че проективният сегмент MN_C не съдържа двойна точка за φ . Следователно допускането, че съществува точка P , която не е двойна за φ , не е вярно и остава, че φ съвпада с идентитета.

Дуалната теорема на Теорема 12.4 е следната:

Теорема 12.5 *Проективност в сноп прави, която има три двойни прави съвпада с идентитета.*

Следствие 12.1 *Проективност в едноизмерима фигура, която има 0, 1 или 2 двойни елемента, се нарича съответно елиптична, параболична или хиперболична.*

Теорема 12.6 Основна теорема на проективната геометрия. *Ако A, B, C са три различни елемента от едноизмеримата фигура f , а A', B', C' са три различни елемента от едноизмеримата фигура f' , то съществува точно една проективност φ на f върху f' , при която $\varphi(A, B, C) = A', B', C'$.*

Доказателство: Съществуване. I). Нека f и f' са редове точки. В Задача 9.1 за всеки от възможните случаи са посочени произведения φ от конкретни перспективности, т.е. проективности, така че $\varphi(A, B, C) = A', B', C'$.

II. Когато f и f' са снопове прави, верността на твърдението следва от верността на теоремата за редове точки и дуалния принцип.

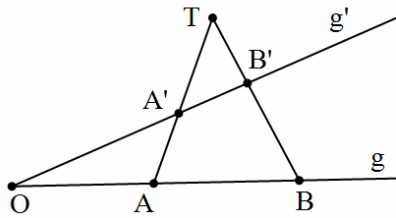
III. Нека f е ред точки, а f' е сноп прави. Въпросът за съществуване на проективност, така че $\varphi(A, B, C) = a', b', c'$ е решен в Задача 9.2.

IV. Когато f е сноп прави, а f' е ред точки, верността на твърдението следва от верността на теоремата за случая III и дуалния принцип.

Единственост. Да допуснем, че съществува втора проективност φ^* , при която $\varphi^*(A, B, C) = A', B', C'$. Тогава $\varphi^* \circ \varphi^{-1}(A', B', C') = \varphi^*(A, B, C) = A', B', C'$ или проективността $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ има три двойни точки. От Теорема 12.4 следва, че $\varphi^* \circ \varphi^{-1}$ съвпада с идентитета, което пък означава, че проективностите φ^* и φ съвпадат.

Теорема 12.7 *Необходимото и достатъчно условие проективността φ между два реда точки да бъде перспективност е общата им точка O да бъде двойна за φ .*

Доказателство: Необходимост. Нека φ е перспективност. Очевидно $\varphi(O) = O$ (Фигура 12.2).



Фигура 12.2

Достатъчност. Нека φ е проективност със свойството $\varphi(O) = O$. Нека още $\varphi(A, B) = (A', B')$. Означаваме $AA' \cap BB' = T$ и разглеждаме перспективността $\pi : g \xrightarrow{T} g'$. Тъй като $\pi(O, A, B) = (O, A', B')$ и $\varphi(O, A, B) = (O, A', B')$, то съгласно теорема 12.6 проективността φ съвпада с перспективността π .

Прилагайки дуалния принцип, получаваме

Теорема 12.8 *Необходимото и достатъчно условие проективността φ между два снопа прави да бъде перспективност е общата им права да бъде двойна за φ .*

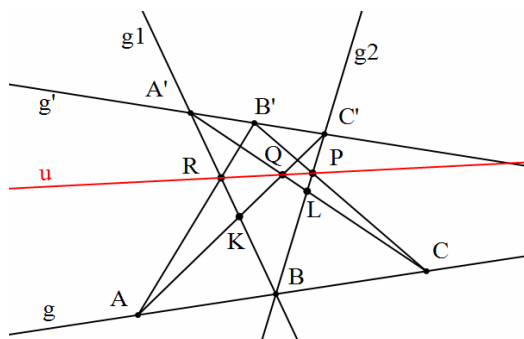
13 Теорема на Пап

Пап Александрийски живее в периода около 320 год. от н.е. Писал е върху математиката, астрономията и географията. Главната му работа "Сбирка" съдържа коментари към изгубени математически съчинения, както и много собствени резултати.

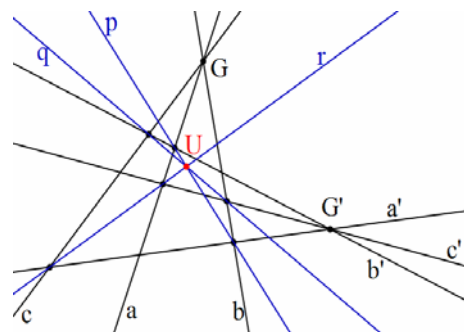
Теорема 13.1 Теорема на Пап *Ако A, B, C са три различни точки от реда g , а A', B', C' са три различни точки от реда g' , то точките $P = AB' \cap A'B, Q = BC' \cap B'C, R = CA' \cap C'A$ са колинеарни.*

Доказателство: (Фигура 13.1). Да въведем следните означения $g_1 = A'B, g_2 = C'B, O = g \cap g', K = AC' \cap A'B, L = BC' \cap A'C$ и перспективности π_1, π_2 . Сега можем да запишем

$$\begin{matrix} A \\ = \\ BA'KP \wedge_{\pi_1} OA'C'B' \end{matrix} \quad \begin{matrix} C \\ = \\ BLC'Q \wedge_{\pi_2} \end{matrix}$$



Фигура 13.1



Фигура 13.2

Да разгледаме проективността $\psi = \pi_2 \circ \pi_1$. От $\psi(B) = B$ и Теорема 12.7 следва, че ψ е перспективност. Поради $\psi(A', K) = L, C'$ центърът на перспективността ψ е точката $A'L \cap KC' = A'C \cap AC' = R$. Тогава от $\psi(P) = Q$ следва, че правата $PQ = u$ минава през точката R .

Съгласно Основната теорема на проективната геометрия съществува точно една проективност ϕ на реда точки g върху реда точки g' , при която $\phi(A, B, C) = A', B', C'$. Правата u се нарича **ос на проективността ϕ** или **колинеационна ос на ϕ** , или **права на Пап за ϕ** .

Теоремата на Пап се среща и в следната редакция: *Ако противоположните върхове на един шестоъгълник лежат на две прави, то трите двойки срещуположни страни на шестоъгълника се пресичат в три колинеарни точки.*

Шестоъгълникът е $AB'CA'BC'$ като точките A, C, B лежат върху едната права, а точките B', A', C' лежат върху другата права.

Теорема 13.2 (Дуална на Теоремата на Пап) *Ако a, b, c са три различни прави от снопа прави $S(G)$ и a', b', c' са три различни прави от снопа прави $S(G')$, то правите $p = (a \cap b')(a' \cap b)$, $q = (b \cap c')(b' \cap c)$, $r = (a \cap c')(a' \cap c)$ са конкурантни.* (Фигура 13.2)

Точката U , с която са инцидентни правите p, q, r се нарича **колинеационен център на проективността ϕ** .

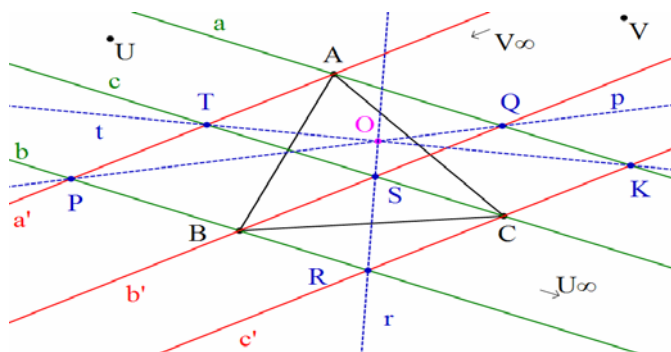
Забележителен е фактът, че Теоремата на Пап, приета като аксиома, може да замени Аксиома A_5 . Доказателството на Аксиома A_5 чрез Аксиоми A_1, A_2, A_3, A_4 и Теоремата на Пап можете да намерите в [3] или [10].

Теоремата на Пап е вторият инструмент (след Аксиома A_5) за доказване колинеарност на три точки.

Упражнение № 5

Задача 13.1а) През върховете на триъгълника ABC са построени три двойки от прави (a, a') , (b, b') и (c, c') , така че $a \parallel b \parallel c$ и $a' \parallel b' \parallel c'$. Сред успоредниците, генерирани от тези прави има три, за които AB , BC и CA са диагонали. Докажете, че вторите диагонали на тези три успоредника минават през една точка.

Решение Означаваме с U_∞ общата безкрайна точка на правите a , b , c и с V_∞ общата безкрайна точка на правите a' , b' , c' (Фигура 13.3). Съгласно означенията на Фигура 13.3

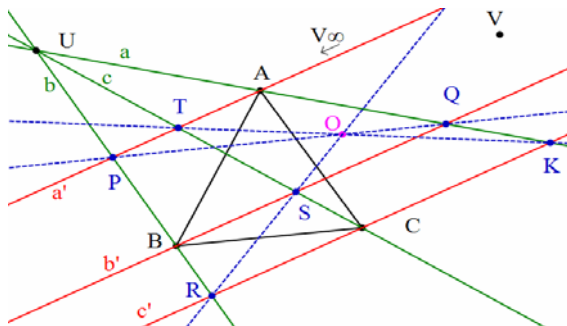


Фигура 13.3

успоредниците, за които AB , BC и CA са диагонали са $AQBP$, $BRCS$ и $ATCK$. Следователно трябва да докажем, че правите PQ , RS и TK са конкурантни. Прилагаме Теоремата на Пап за тройките колинеарни точки P, T, V_∞ и K, Q, U_∞ . Веднага получаваме, че точките $O = TK \cap PQ$, $S = TU_\infty \cap QV_\infty$, $R = KV_\infty \cap PU_\infty$ са колинеарни, т.е. правите TK , PQ и RS са конкурантни, защото минават през точката O .

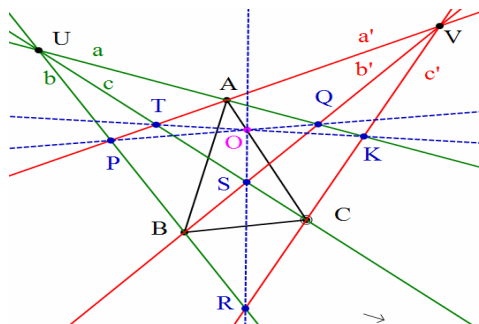
ДГС Sat със своята специална функция „Размяна на крайна & безкрайна точки” ни провокира не само да формулираме две нови задачи, но и веднага ни предлага чертежите.

Задача 13.1 б) През върховете на триъгълника ABC са построени три двойки от прави (a, a') , (b, b') и (c, c') , така че a, b, c са инцидентни с произволна крайна точка U и $a' \parallel b' \parallel c'$. Сред трапеците, генерирани от тези прави има три, за които AB , BC и CA са диагонали. Докажете, че вторите диагонали на тези три трапеца минават през една точка (Фигура 13.4).



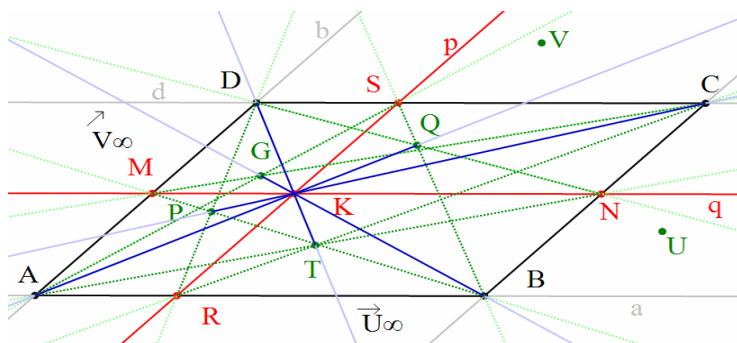
Фигура 13.4

Задача 13.1 в) През върховете на триъгълника ABC са построени три двойки от прави (a, a') , (b, b') и (c, c') , така че a, b, c са инцидентни с произволна крайна точка U и a', b', c' са инцидентни с произволна крайна точка V . Сред четириъгълниците, генерирани от тези прави има три, за които AB, BC и CA са диагонали. Докажете, че вторите диагонали на тези три четириъгълника минават през една точка (Фигура 13.5).



Фигура 13.5

Задача 13.2 Даден е успоредник $ABCD$ и точка K , лежаща във вътрешността му. През точка K са построени правите $p \parallel AD$ и $q \parallel AB$. Въвеждаме означенията: $p \cap AB = R$, $p \cap CD = S$, $q \cap AD = M$, $q \cap BC = N$, $AN \cap CR = T$, $BS \cap DN = Q$, $CM \cap AS = G$, $DR \cap BM = P$. Да се докаже колинеарност на следните тройки точки: P, K, C ; T, K, D ; Q, K, A ; G, K, B .



Фигура 13.6

Решение (Фигура 13.6) Нека означим общата безкрайна точка на AB и CD с U_∞ , а общата безкрайна точка на BC и AD с V_∞ .

Прилагаме последователно теоремата на Пап за следните тройки колинеарни точки:

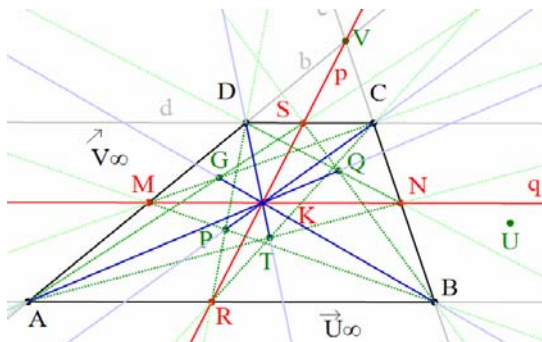
B, R, U_∞ и D, M, V_∞ ; A, R, U_∞ и C, N, V_∞ ; D, S, U_∞ и B, N, V_∞ ; C, S, U_∞ и A, M, V_∞ .

Следва колинеарност съответно на следните тройки точки:

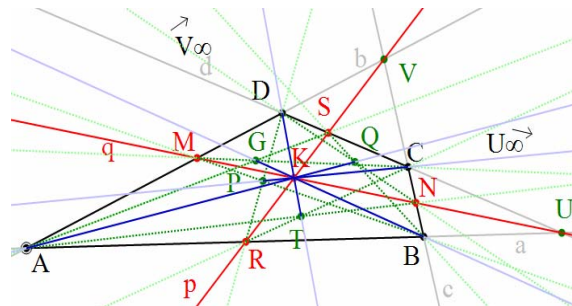
P, K, C ; T, K, D ; Q, K, A ; G, K, B .

Задача 13.7 Формулирайте и решете задачите спътници на Задача 13.2

Упътване Генерирайте самостоятелно Фигури 13.7 и 13.8.



Фигура 13.7



Фигура 13.8

Задача 13.3 Нека в неравностранныя триъгълник $A_1A_2A_3$ средите на страните A_2A_3 , A_3A_1 и A_1A_2 са съответно E_1 , E_2 и E_3 , а петите на височините към тези страни са съответно H_1 , H_2 и H_3 . Да се докаже, че пресечните точки P_1 , P_2 и P_3 на двойките прави E_1H_3 и E_3H_1 , E_3H_2 и E_2H_3 , E_2H_1 и E_1H_2 лежат на една права. Коя е тази права?

Упътване Достатъчно е да приложите три пъти Теоремата на Пап за подходящите тройки колинеарни точки (например за A_1 , E_3 , H_3 и A_3 , E_1 , H_1 ...).

Задача 13.4 Нека ABC и PQR са два триъгълника. Да се докаже, че ако правите AP , BQ , CR минават през точка O_1 , а правите AQ , BR , CP минават през точка O_2 , то и правите AR , BP , CQ минават през една точка O_3 .

Упътване Точките O_1 и O_2 са перспективните центрове съответно на двойките перспективни триъгълници ABC , PQR и ABC , QRP . Приложете Теоремата на Пап за тройките колинеарни точки A , P , O_1 и B , R , O_2 и на края въз основа на получения резултат, приложете теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници, за да докажете, че правите AR , BP , CQ минават през една точка.

§ 14 Допълване на проективност

Определение 13.1 Допълване на проективност $\varphi: f \rightarrow f'$ се нарича всяка конструкция, която ни позволява да намираме образа на произволен елемент $X \in f$ и първообраза на произволен елемент $Y' \in f'$.

Конструкцията за допълване на перспективности е вложена в техните Определения 9.4 и 9.5. И тъй като всяка проективност може да се представи като произведение от перспективности, то допълването на проективностите се свежда до представянето им като произведение от перспективности, след което всяка от тях се допълва.

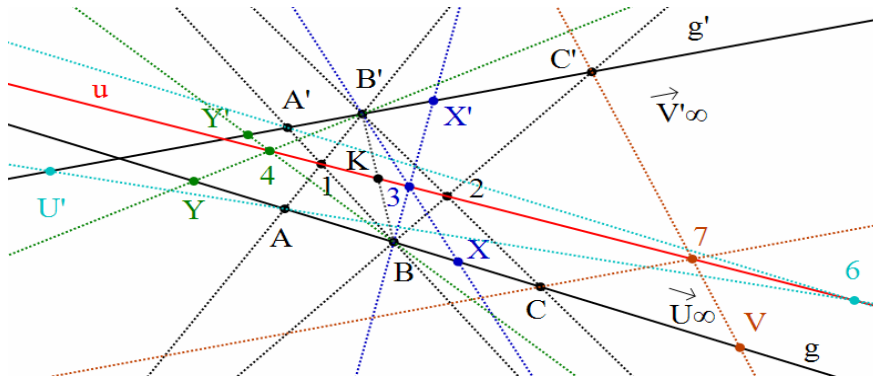
1) Нека f и f' са редове точки, които ще означим с g и g' .

Основна задача 14.1 Да се допълни проективността $\varphi: g \rightarrow g'$, ако $\varphi(A, B, C) = A', B', C'$

Решение Теоремата на Пап ни дава най-симетричната конструкция за допълване на проективността $\varphi: g \rightarrow g'$, при която $\varphi(A, B, C) = A', B', C'$ (Фигура 14.1). Тази конструкция е тясно свързана с колинеационната ос u на проективността φ . В основата ѝ лежи фактът, че ако $X \in g$ е произволна точка и $\varphi(X) = X'$, а B, B' са една от известните двойки съответни точки, то точката $XB' \cap X'B$ принадлежи на u . Наистина, да разгледаме следните перспективности:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} B' \\ \hline g \end{array} \wedge \begin{array}{c} B \\ \hline u \end{array} \wedge \begin{array}{c} g' \\ \hline \pi_4 \end{array} & : & \begin{array}{c} B' \\ \hline ABC \end{array} \wedge \begin{array}{c} B \\ \hline 1K2 \end{array} \wedge \begin{array}{c} B' \\ \hline A'B'C' \end{array} \end{array}$$

където $K = BB' \cap u$. Следователно $\varphi = \pi_4 \circ \pi_3$, а $\varphi^{-1} = \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1}$. Тогава $\varphi(X) = \pi_4 \circ \pi_3(X) = \pi_4(3) = X'$.



Фигура 14.1

Нека сега $Y' \in g'$ е произволна точка. Ако $Y'B \cap u = 4$, то $Y = 4B' \cap g$. Наистина, $\varphi^{-1}(Y') = \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1}(Y') = \pi_3^{-1}(4) = Y$.

Убежни точки на проективността φ се наричат крайните точки U' и V , които са

съответно образ и първообраз на безкрайните точки $U_\infty \in g$ и $V'_\infty \in g'$.

За да намерим убежните точки на проективността φ , ще разгледаме други

представяния на φ . Например : $\begin{matrix} A' & A \\ \equiv & \equiv \\ g \wedge u & \wedge g' \\ \pi_5 & \pi_6 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} C' & C \\ \equiv & \equiv \\ g \wedge u & \wedge g' \\ \pi_7 & \pi_8 \end{matrix}$, а $\varphi = \pi_6 \circ \pi_5$ или

$$\varphi^{-1} = \pi_8^{-1} \circ \pi_7^{-1}.$$

$$\text{Тогава } \varphi(U_\infty) = \pi_6 \circ \pi_5(U_\infty) = \pi_6(6) = U' \quad \text{и}$$

$$\varphi^{-1}(V'_\infty) = \pi_8^{-1} \circ \pi_7^{-1}(V'_\infty) = \pi_8^{-1}(7) = V.$$

Да обърнем внимание на факта, че центровете на двете централни перспективности, на които се разлагат проективностите φ и φ^{-1} могат да се менят. Достатъчно е те да съвпадат с двойка съответни точки за φ . Изборът на тази двойка съответни точки може да бъде постоянен или да се мени в зависимост от разположението на точките X , Y' и т.н. с цел по-голяма нагледност на чертежа.

2) Нека f и f' са снопове прави, които ще означим с $S(O)$ и $S(O')$.

Основна задача 14.2 Да се допълни проективността $\varphi: S(O) \rightarrow S(O')$, при която

$$\varphi(a, b, c) = a', b', c'$$

Решение Допълването на проективността може да се извърши по два начина:

2.1) Като се сведе до допълване на проективност между два реда точки по следната схема:

$$\begin{array}{ccc} S(O) & \xrightarrow{\varphi} & S(O') \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ g & \xrightarrow{\psi} & g' \end{array}$$

Редовете точки g и g' се избират произволно (Фигура 13.4). Нека $\pi_1(a, b, c) = A, B, C$ и $\pi_2(a', b', c') = A', B', C'$. Тогава, съгласно Основната теорема на проективната геометрия, между редовете точки g и g' се индуцира проективност ψ , при която

$$\psi(A, B, C) = A', B', C'. \text{ Тъй като } \varphi = \pi_2^{-1} \circ \psi \circ \pi_1, \text{ то допълването на } \varphi \text{ се свежда до}$$

последователното допълване на π_1, ψ, π_2^{-1} . Допълването на ψ изисква предварителното

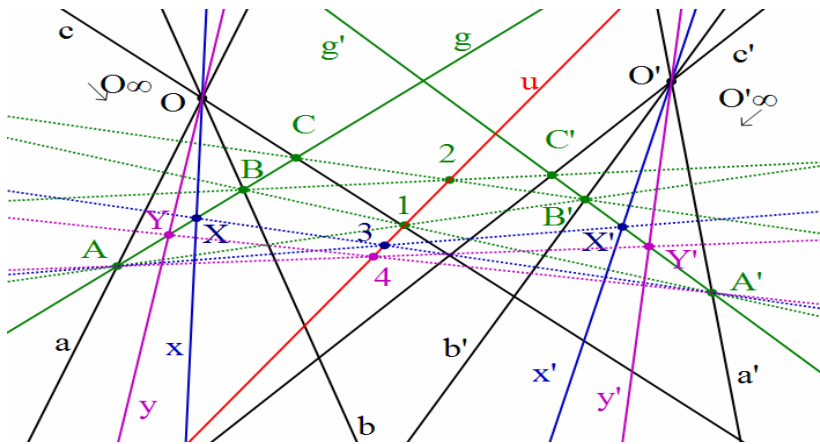
му представяне като произведение от перспективностите $\begin{matrix} A' & A \\ \equiv & \equiv \\ g \wedge u & \wedge g' \\ \pi_3 & \pi_4 \end{matrix}$, т.е. $\psi = \pi_4 \circ \pi_3$ (така

както е постъпено в Основна задача 14.1.

Нека $x \in S(O)$ и $y' \in S(O')$ са произволни прави.

$$\varphi(x) = \pi_2^{-1} \circ \psi \circ \pi_1(x) = \pi_2^{-1} \circ \pi_4 \circ \pi_3 \circ \pi_1(x) = \pi_2^{-1} \circ \pi_4 \circ \pi_3(X) = \pi_2^{-1} \circ \pi_4(3) = \pi_2^{-1}(X') = O'X' = x'$$

$$\varphi^{-1}(y') = \pi_1^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \pi_2^{-1}(y') = \pi_1^{-1} \circ \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1} \circ \pi_2^{-1}(Y') = \pi_1^{-1} \circ \pi_3^{-1} \circ \pi_4^{-1}(Y) = \pi_1^{-1} \circ \pi_3^{-1}(4) = \pi_1^{-1}(Y) = OY = y$$

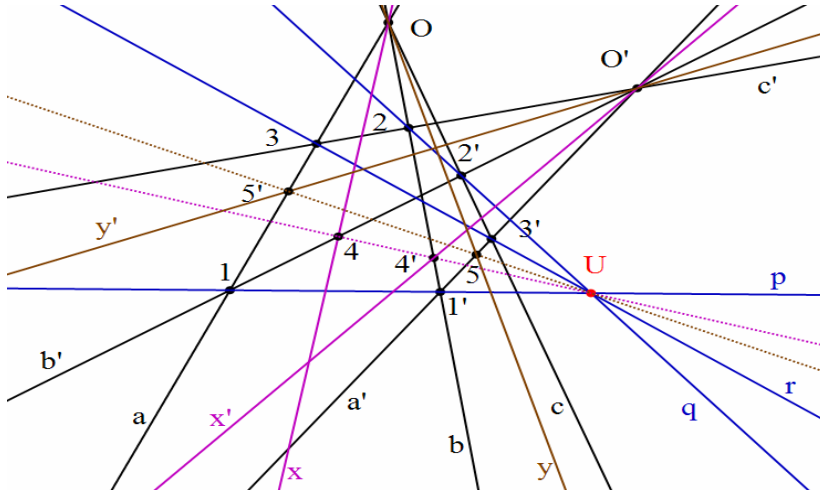


Фигура 14.2

2.2) Като се приложи конструкция, която е дуална на конструкцията за допълване на проективност между два реда точки (Фигура 14.3). За целта разглеждаме последователността от перспективности

$$\begin{matrix} b' & b \\ \underline{\underline{=}} & \underline{\underline{=}} \\ S(O) \wedge_{\pi_1} U \wedge_{\pi_2} S(O') \end{matrix}$$

и представяме проективността φ по следния начин: $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1$.



Фигура 14.3

3) Нека f и f' са ред точки и сноп прави, които ще означим с g и $S(O')$.

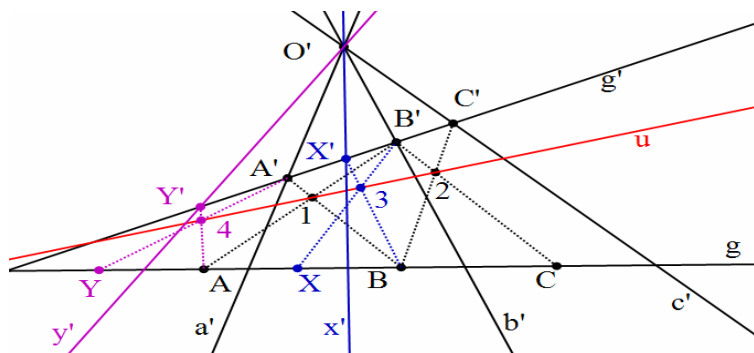
Основна задача 14.3 Да се допълни проективността $\varphi: g \rightarrow S(O')$, при която

$$\varphi(A, B, C) = a', b', c'$$

Решение Допълването на проективността, може да се сведе отново до Основна задача 14.1 чрез избор на произволен ред точки g' и разглеждане на перспективността

$\pi: S(O') \rightarrow g'$. Ако $\pi(a', b', c') = A', B', C'$, то от Теорема 12.6 следва, че между редовете точки g и g' се индуцира проективност $\psi = \pi \circ \varphi$, при която $\psi(A, B, C) = A', B', C'$ и следователно ψ има колинеационна ос $u = (AB' \cap A'B)(BC' \cap B'C) = 12$ (Фигура 14.4).

Намирането на правата $x' = \varphi(X) = \pi^{-1} \circ \psi(X) = \pi^{-1}(X') = O'X' = x'$ и точка $Y = \varphi^{-1}(y')$ можете да проследите в детайли, презентирайки едноименния динамичен чертеж Фигура 14.4.



Фигура 14.4

В следващите задачи за безкрайната точка U_g на правата g ще се среца още и означението U_∞ .

Упражнение № 6

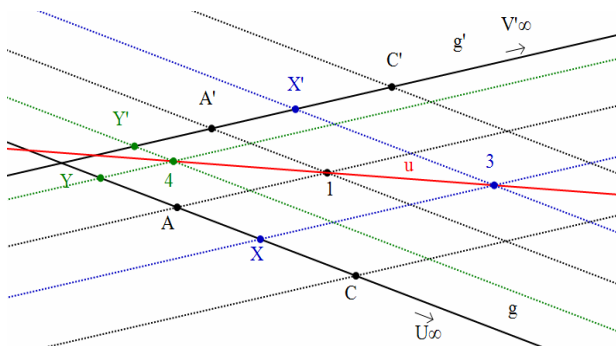
Задача 14.1 Да се допълни проективността $\varphi: g \rightarrow g'$, ако :

14.1 а) $\varphi(A, U_\infty, C) = A', B', C'$, където $A, U_\infty, C \in g$, $A', B', C' \in g'$.

Упътване За бърза визуализация използвайте динамичния чертеж 14.1, изберете менюто „Подбрано” и извършете „Размяната на точките B и U_∞ ”.

14.1 б) $\varphi(A, U_\infty, C) = A', V'_\infty, C'$, където $A, U_\infty, C \in g$, $A', V'_\infty, C' \in g'$.

Упътване За бърза визуализация използвайте динамичния чертеж 14.1, изберете менюто „Подбрано” и извършете последователно „Размяна на точките B и U_∞ ” и „Размяна на точките B' и V'_∞ ” (Фигура 14.5).



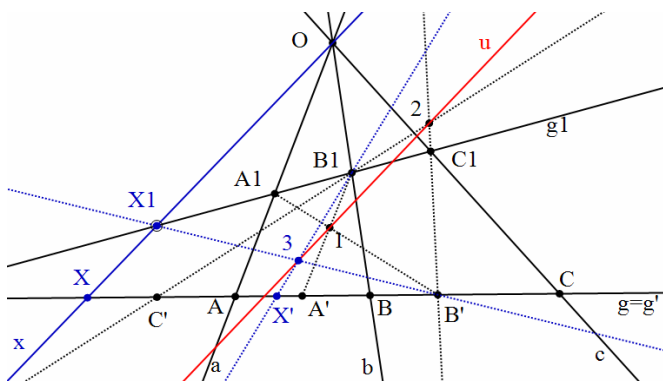
Фигура 14.5

14.1 в) $\varphi(A, B, C) = A', V'_\infty, C'$, където $A, B, C \in g$, $A', V'_\infty, C' \in g'$.

14.1 г) $\varphi(A_\infty, B_\infty, C_\infty) = A', B', C'$, където $A_\infty, B_\infty, C_\infty \in \omega$, $A', B', C' \in g'$.

Упътване Презентирайте динамичния чертеж 14.9.

Задача 14.2 Да се допълни проективността $\varphi: g \rightarrow g$, ако $\varphi(A, B, C) = A', B', C'$, където $A, B, C, A', B', C' \in g$. Намерете и убежните точки на φ .



Фигура 14.6

Упътване Изберете произволен ред точки g_l и произволна точка O , така че $g_l \neq g$ и

$$O$$

където $A, B, U_\infty \in \mathfrak{g}$, $a', b', u' \in S(O')$.

където $a, b, c \in S(O_\infty)$, $A', B', C'_\infty \in g'$. Намерете правата $u' = \varphi(\omega)$

Задача 14.5 Да се допълни проективността $\varphi: S(O_\infty) \rightarrow S(O')$, ако :

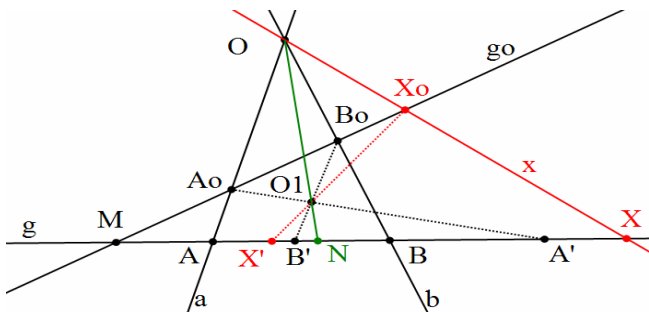
14.5 a) $\varphi(a, b, c) = a', b', c'$, където $a, b, c \in S(O_\infty)$, $a', b', c' \in S(O')$.

менюто „Подбрано” и извършете „Размяната на точките O и O_{∞} ”.

14.5 6) $\varphi(a, b, \omega) = a', b', c'$, където $a, b, \omega \in S(O_\infty)$, $a', b', c' \in S(O')$.

Упътване Използвайте решението на Задача 14.5 а) като отчетете, че $\omega \cap g = U_\infty$.

където $A, B, A', B', M \in g$. Намерете втората двойна точка N на φ , в случай че има такава.



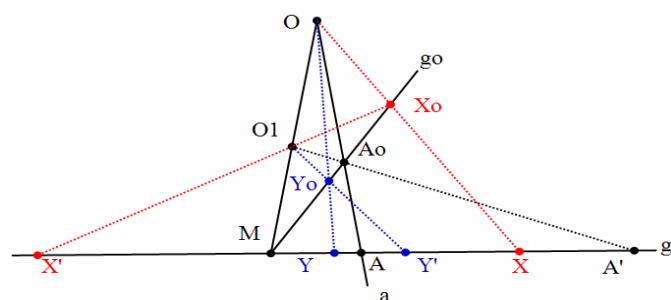
Фигура 14.7

$\varphi: g \rightarrow g$, то съществуват и други удобни конструкции, използващи Теоремата на Пап.

права на центровете на двете централни перспективности, на които се разлага проективността ϕ , минава през втората двойна точка, ако тя съществува (Фигура 14.7).

$A, A', M \in g$ и φ — параболическая проективность.

Упътване Презентирайте Фигура 14.8.



Фигура 14.8

Задача 14.8 Създайте вашата колекция от задачи и техните решения върху темата:
 Да се допълни проективността $\varphi: S(O) \rightarrow S(O)$.

15 Инволюция

Определение 15.1 Проективност φ , индуцирана в едноизмеримата фигура f и притежаваща свойствата:

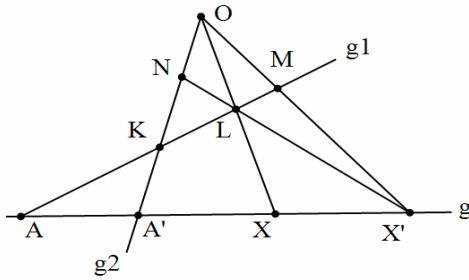
$$1) \varphi \neq id \text{ и } 2) \varphi^2 = id$$

се нарича инволюция.

Терминът инволюция е въведен от Дезарг.

Условието $\varphi^2 = id$ е еквивалентно на условието $\varphi = \varphi^{-1}$, т.е. ако $\varphi(A) = A'$ за произволен елемент $A \in f$, то $\varphi(A') = A$. Следователно при инволюцията образът на произволен елемент съвпада с първообраза на този елемент. Така елементите на f се разделят на двойки съответни елементи за инволюцията φ . Всеки един от елементите на тази двойка се нарича спрегнат на другия в инволюцията.

Теорема 15.1 (Достатъчно условие проективност в ред точки да бъде инволюция) Проективност φ в реда точки g , който притежава поне една точка A със свойствата: $\varphi(A) = A'$, $A' \neq A$ и $\varphi^2(A) = A$ е инволюция.



Фигура 15.1

Доказателство: Поради $A' \neq A$ следва, че $\varphi \neq id$. Остава да докажем, че $\varphi^2 = id$. Нека $X \in g$ е произволна точка и нека $\varphi(X) = X'$, $X' \neq X$. Ще покажем, че $\varphi(X') = X$. Да построим произволна права g_1 през точка A и да изберем произволна точка O , неинцидентна както с g така и с g_1 (Фигура 15.1).

Означаваме: $OA' \cap g_1 = K$, $OX \cap g_1 = L$, $OX' \cap g_1 = M$, $OA \cap g_2 = N$, $X'L \cap g_2 = N$. Да разгледаме следната последователност от перспективности:

$$\begin{array}{ccc} O & X' & L \\ = & = & = \\ g \wedge g_1 & \wedge g_2 & \wedge g \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{array}$$

Тъй като $AA'XX' \wedge_{\pi_1} AKLM \wedge_{\pi_2} A'KNO \wedge_{\pi_3} A'AX'X$, то $\varphi = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ и $\varphi(X') = X$.

Чрез принципа за дуалност получаваме следната теорема, дуална на Теорема 15.1

Теорема 15.2 (Достатъчно условие проективност в сноп прави да бъде

инволюция) Проективност φ в снопа прави $S(G)$, който притежава поне една права a със свойствата: $\varphi(a) = a', a' \neq a$ и $\varphi^2(a) = a$ е инволюция.

Теорема 15.3 Ако A, B, A', B' са различни елементи от едноизмеримата фигура f , то съществува точно една инволюция φ , така че $\varphi(A, B) = A', B'$.

Доказателство: **Съществуване.** Съгласно Теорема 12.6 съществува проективност φ , така че $\varphi(A, A', B) = A', A, B'$. От $\varphi(A) = A', A' \neq A$ и $\varphi^2(A) = A$ и Теорема 15.1 следва, че φ е инволюция и при това тя има желаните свойства.

Единственост. Да допуснем, че има и друга инволюция φ_1 , така че $\varphi_1(A, B) = A', B'$. От Свойство 2) на инволюциите следва $\varphi_1(A') = A$. Оказа се, че $\varphi(A, A', B) = \varphi_1(A, A', B) = A', A, B'$. Прилагайки Теорема 12.6 заключаваме $\varphi = \varphi_1$.

Теорема 15.4 Ако една инволюция има един двоен елемент, то тя има и втори двоен елемент.

Доказателство: Нека M е двоен елемент за φ , т.е. $\varphi(M) = M$, а A и A' са произволна двойка спрегнати елементи за φ . Нека N е хармонично спрегнатият елемент на M относно двойката A, A' , т.е. $H(MN, A, A')$.

Да допуснем, че $\varphi(N) = N'$. Имаме $\varphi(M, N, A, A') = M, N', A', A$. Понеже инволюцията е проективност и $H(MN, A, A')$, то от Определение 12.1 следва $H(MN', A', A)$. Но тогава и $H(MN', AA')$. Прилагайки Следствие 8.1 заключаваме, че $N' = N$ или N е втори двоен елемент за φ .

Двойният елемент N не зависи от избора на произволната двойка спрегнати елементи A, A' . Наистина, нека X, X' е нова, произволна двойка съответни елементи за φ . Да допуснем, че чрез аналогични разсъждения ще получим нов, трети двоен елемент L за φ . Тогава съгласно Теорема 12.3 и 12.4 $\varphi = id$, което противоречи на условието, че φ е инволюция.

Следствие 15.1 Параболични инволюции няма.

Следствие 15.2 Всяка двойка съответни елементи за хиперболична инволюция са хармонично спрегнати относно двойката на двойните ѝ елементи.

Това свойство на хиперболичната инволюция е причина тя да се нарича още **хармонична проективност**. От Следствие 15.2, Определение 11.4 и Теорема 11.3 следва още, че h -изображението е хиперболична инволюция.

Твърдение 14.1 Ако в една едноизмерима фигура са зададени две различни инволюции, от които поне едната е елиптична, то те имат точно една обща двойка спрегнати елементи.

Доказателството можете да намерите в [3].

Упражнение № 7

Задача 15.1 Да се допълни проективността $\varphi: g \rightarrow g$, ако $A, B, C, C' \in g$. Докажете, че φ е инволюция. Намерете убежната точка на φ .

Решение Тъй като съществува поне една точка A , за която $\varphi^2(A) = \varphi(\varphi(A)) = \varphi(B) = A$ и $B \neq A$, то съгласно Теорема 15.1 φ е инволюция.

Чрез една централна перспективност ще сведем тази задача до Основна задача 14.1. Избираме произволен ред g_1 и произволна точка O , $O \notin g$, $O \notin g'$. Нека разгледаме централната перспективност $g \xrightarrow[\pi]{O} g_1$ при която $\pi(A, B, C) = A_1, B_1, C_1$. Тогава от схемата

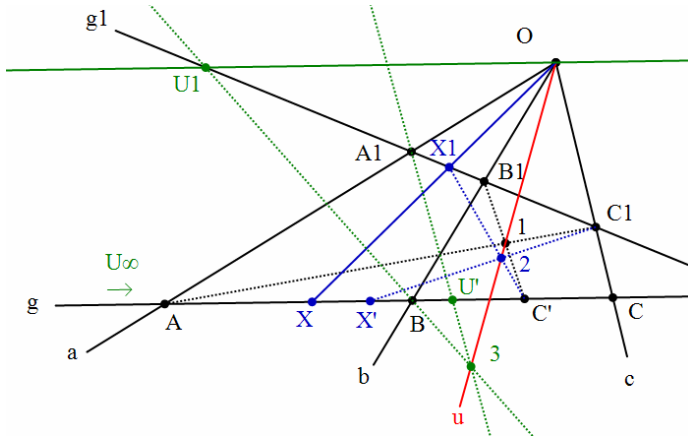
$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\varphi} & g' \\ \pi \downarrow & & \uparrow \psi \\ & g_1 & \end{array}$$

е видно, че $\psi = \varphi \circ \pi^{-1}$ е проективност и $\psi(A_1, B_1, C_1) = B, A, C'$. Тогава колинеационната ос

u на ψ е: $u = (A_1A \cap BB_1)(A_1C' \cap BC_1) = O1$ и $\psi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $g_1 \xrightarrow[\pi_1]{A_1} u \xrightarrow[\pi_2]{B} g'$.

Сега можем да допълваме φ , защото $\varphi = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi$.

Така $\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X_1) = \pi_2(2) = X'$.



Фигура 15.2

Тъй като φ е инволюция, то $\varphi = \varphi^{-1}$ и следователно не е нужно да се търси първообраз на точка от g . Това обяснява и защо φ има само една убежна точка U' : $\varphi(U_\infty) = \psi \circ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi(U_\infty) = \pi_2 \circ \pi_1(U_1) = \pi_2(3) = U'$.

Задача 15.2 Да се допълни проективността $\varphi: S(O) \rightarrow S(O)$, ако $\varphi(a, b, c) = b, a, d$,

където $a, b, c, d \in S(O)$.

Задача 15.3 Да се допълни инволюцията $\varphi: g \rightarrow g$, ако $\varphi(A, M) = A', M$, където $A, A', M \in g$.

Формулирайте и решете дуалната задача.

Задача 15.4 Хиперболична проективност φ_1 и елиптическа проективност φ_2 в едноизмерима фигура са комутативни, т.е. $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Да се докаже, че φ_1 и φ_2 са инволюции и двойните елементи M и N за φ_1 са съответни за φ_2 .

Решение Нека $\varphi_2(M) = M'$. Съгласно условието $M' \neq M$. От $\varphi_2 \circ \varphi_1(M) = \varphi_2(M) = M'$ и $\varphi_1 \circ \varphi_2(M) = \varphi_1(M') = M'$ следва $M' = N$, т.е. $\varphi_2(M) = N$. Аналогично се доказва, че и $\varphi_2(N) = M$. Следователно φ_2 е инволюция и проективността $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \varphi_2$ също е инволюция. Тогава $\varphi_2 = \varphi_2^{-1}$, $\varphi = \varphi^{-1}$ и получаваме $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$, от където следва $\varphi_1 = \varphi_1^{-1}$, т.е. и φ_1 е инволюция.

Двуизмерими фигури и съответствия между тях

16 Колинеация

Определение 16.1 Множеството на точките в P_2 се нарича поле точки.

Определение 16.2 Множеството на правите в P_2 се нарича поле прави.

Определение 16.3 Множеството на точките и правите в P_2 се нарича поле.

Определение 16.4 Поле точки, поле прави и поле се наричат двуизмерими фигури.

Определение 16.5 Биективно изображение в P_2 , което притежава свойствата:

- 1) на точка съответства точка;
 - 2) на права съответства права;
 - 3) на инцидентни точка и права съответстват инцидентни точка и права
- се нарича колинеация.

Колинеация може да се зададе и между елементите на две различни полета, но тъй като в този курс изучаваме геометрията на P_2 ще се ограничим с горната дефиниция.

От определението е ясно, че колинеацията изобразява ред точки в ред точки и сноп прави в сноп прави.

Теорема 16.1 Колинеациите образуват група от преобразувания в P_2 .

Верността на теоремата следва от следните леко доказуеми факти: произведението на две колинеации е колинеация; ако Φ е колинеация, то и Φ^{-1} също е колинеация; идентитетът е колинеация.

Групата на колинеациите се нарича проективна.

Теорема 16.2 Колинеациите запазват хармоничните групи.

Доказателството следва непосредствено от Определение 8.1 на хармонични групи и от Определение 16.5 на колинеация.

Теорема 16.3 Колинеациите индуцират между съответните едноизмерими фигури проективност.

Доказателство Колинеацията индуцира биективно изображение между съответните едноизмерими фигури, което съгласно Теорема 16.2 запазва хармоничните групи. От Определение 12.1 следва, че това биективно изображение е проективност.

Ако $\Phi(g) = g'$, то проективността, индуцирана от колинеацията Φ на реда точки g върху реда точки g' , ще бележим с Φ_g . Ако $\Phi(G) = G'$, то проективността, индуцирана от колинеацията Φ на снопа прави $S(G)$ върху снопа прави $S(G')$, ще бележим с Φ_G .

Теорема 16.4 Колинеация Φ , за която съществува пълнен четиристранник $abcd$, така че $\Phi(abcd) = abcd$, съвпада с идентитета.

Тъй като $\Phi(a \cap b) = \Phi(a) \cap \Phi(b) = a \cap b$, то шестте върха на $abcd$, разположени по три върху всяка страна, са двойни за Φ . Тогава проективностите $\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c, \Phi_d$ ще имат по три двойни точки и съгласно Теорема 12.4 всяка от тях ще съвпада с идентитета. Значи всяка точка от страните на пълния четиристранник ще бъде двойна за Φ .

Нека x_i е произволна права. Съществуват следните възможности за нея:

- 1) Правата x_1 не минава през връх на пълния четиристранник $abcd$. Това означава,

че x_1 пресича и четирите страни на пълния четиристранник в двойни точки за Φ . Така проективността Φ_{x_1} има дори четири двойни точки и от Теорема 12.4 следва $\Phi_{x_1} = id$.

2) Правата x_2 минава през връх на пълния четиристранник $abcd$. Това означава, че x_2 пресича другите две страни на пълния четиристранник в още две двойни точки за Φ . Така проективността Φ_{x_2} има три двойни точки и от Теорема 12.4 следва $\Phi_{x_2} = id$.

3) Правата x_3 минава през два върха на пълния четиристранник $abcd$. Това означава, че върху x_3 вече има две двойни точки за Φ . Освен това правата x_3 ще пресече и правата x_1 , чиито точки са двойни за Φ . Така проективността Φ_{x_3} има три двойни точки и от Теорема 12.4 следва $\Phi_{x_3} = id$.

Ако всяка точка от реда точки g е двойна за колинеацията Φ , то казваме, че g е двоен ред точки за Φ .

Ако всяка права от снопа прави $S(G)$ е двойна за колинеацията Φ , то казваме, че $S(G)$ е двоен снопа прави за Φ .

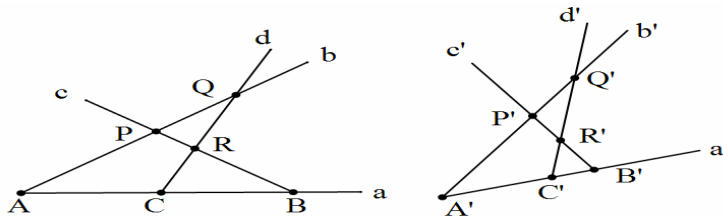
Чрез принципа за дуалност можем да формулираме следната теорема, дуална на теорема 16.4:

Теорема 16.5 Колинеация Φ , за която съществува пълнен четириъгълник $ABCD$, така че $\Phi(ABCD) = ABCD$, съвпада с идентитета.

Теорема 16.6 Ако $abcd$ и $a'b'c'd'$ са два пълни четиристранника, то съществува точно една колинеация Φ , така че $\Phi(abcd) = a'b'c'd'$.

Доказателство: Съществуване. Да означим върховете на пълните четиристранници $abcd$ и $a'b'c'd'$ по следния начин: $a \cap b = A$, $a \cap c = B$, $a \cap d = C$, $b \cap c = P$, $b \cap d = Q$, $c \cap d = R$ и $a' \cap b' = A'$, $a' \cap c' = B'$, $a' \cap d' = C'$, $b' \cap c' = P'$, $b' \cap d' = Q'$, $c' \cap d' = R'$ (Фигура 16.1).

Нека φ_1 е проективност на a върху a' , при която $\varphi_1(A, B, C) = A', B', C'$, а φ_2 е проективност на b върху b' , при която $\varphi_2(A, P, Q) = A', P', Q'$.



Фигура 16.1

Дефинираме следното съответствие Φ :

- 1) Ако точка $X \in a$, то $\Phi(X) = \varphi_1(X) = X'$. Ако точка $Y \in b$, то $\Phi(Y) = \varphi_2(Y) = Y'$.
- 2) Нека g е права, която не минава през точка A . Ако $g \cap a = X$, $g \cap b = Y$ и $\Phi(X) = X'$, $\Phi(Y) = Y'$, то $\Phi(g) = \Phi(XY) = \Phi(X)\Phi(Y) = X'Y' = g'$.

- 3) Нека M е произволна точка като $M \notin a, M \notin b$. Да означим с π_M перспективността на a върху b с център M . Да разгледаме проективността φ ,

индуцирана по следния начин:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\pi_M} & b \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ a' & \xrightarrow{\varphi} & b' \end{array}$$

Понеже $\varphi = \varphi_2 \circ \pi_M \circ \varphi_1^{-1}$ и $\varphi(A') = A'$, то съгласно Теорема 12.7 φ е перспективност. Да означим нейния център с M' , а φ – с $\pi_{M'}$. Тогава нека по дефиниция $\Phi(M) = M'$.

4) Нека l е произволна права през точка A . Избираме произволна точка $M \in l$ и ако $\Phi(M) = M'$ (съгласно 3)), то приемаме по дефиниция $\Phi(l) = \Phi(AM) = \Phi(A)\Phi(M) = A'M' = l'$.

Лесно се съобразява, че така дефинираното съответствие Φ е биективно и удовлетворява условията 1) и 2) на Определение 16.5. Сега ще докажем, че Φ удовлетворява и условие 3). Наистина, нека $M \in g$. Ако $g \cap a = X, g \cap b = Y$, то $\pi_M(X) = Y$. Нека $\Phi(X) = X', \Phi(Y) = Y'$. Тогава

$$\pi_{M'}(X') = \varphi_2 \circ \pi_M \circ \varphi_1^{-1}(X') = \varphi_2 \circ \pi_M(X) = \varphi_2(Y) = Y'.$$

Следователно правата $X'Y' = \Phi(g)$ минава през точката M' . С това доказахме, че Φ притежава и свойството 3) и следователно е колинеация.

Непосредствено се проверява, че $\Phi(abcd) = a'b'c'd'$, т.е. колинеацията Φ има желаните свойства.

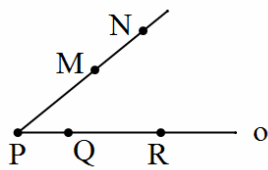
Единственост Да допуснем, че има втора колинеация Φ_1 със същите свойства, т.е. $\Phi_1(abcd) = a'b'c'd'$. Тогава от $\Phi_1 \circ \Phi^{-1}(a'b'c'd') = \Phi_1(abcd) = a'b'c'd'$ и Теорема 16.4 следва че, $\Phi_1 \circ \Phi^{-1} = id$ или $\Phi_1 = \Phi$.

Теорема 16.7 (дуална на Теорема 16.6) Ако $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са два пълни четириъгълника, то съществува точно една колинеация Φ , така че $\Phi(ABCD) = A'B'C'D'$

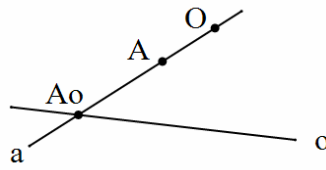
17 Хомология

Теорема 17.1 Ако колинеацията Φ е различна от идентитета и притежава двоен ред точки o , то тя може да има най-много още една двойна точка, нележаща на o .

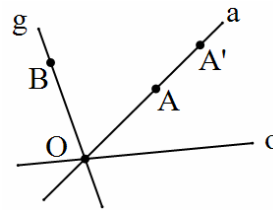
Доказателство Нека точка $M \notin o$ и $\Phi(M) = M$. Да допуснем, че съществува и втора двойна точка $N \notin o$ (Фигура 17.1). Да означим $MN \cap o = P$ и да изберем точките $Q \in o$ и $R \in o$, които са различни от P . Тогава за пълния четириъгълник $MNQR$ е в сила $\Phi(MNQR) = MNQR$. Прилагаме Теорема 16.4 и достигаме до резултата $\Phi = id$, което противоречи на условието. Следователно допускането не е вярно и Φ може да има най-много една двойна точка, не принадлежаща на дадения двоен ред точки.



Фигура 17.1



Фигура 17.2



Фигура 17.3

Теорема 17.2 Ако колинеацията Φ е различна от идентитета и притежава двоен ред точки o , то тя притежава и двоен сноп прави.

Доказателство: Съгласно Теорема 17.1 съществуват следните два случая:

1) Колинеацията Φ има точно една двойна точка O , не принадлежаща на двойния ред точки o . Нека a е произволна права, принадлежаща на снопа прави $S(O)$ и $a \cap o = A_0$. (Фигура 17.2) Тогава $\Phi(a) = \Phi(A_0O) = \Phi(A_0)\Phi(O) = A_0O = a$ или a е двойна права за Φ . Но тъй като a е произволна права, следва че $S(O)$ е двоен сноп прави.

2) Колинеацията Φ няма друга двойна точка освен точките на двойния ред точки o . Нека $A \notin o$ е произволна точка. Тогава $\Phi(A) = A', A \neq A'$. Означаваме $AA' = a, a \cap o = O$ (Фигура 16.3). Тъй като $\Phi(a) = \Phi(AO) = \Phi(A)\Phi(O) = A'O = a$, то следва:

Съединителната права на всяка двойка съответни точки е двойна за Φ .

Ще докажем, че $S(O)$ е двоен сноп прави за Φ . Нека $g \in S(O)$ е произволна права, а $B \in g$ е произволна точка и $\Phi(B) = B'$. За B' съществуват две възможности: $B' \notin g$ или $B' \in g$. Да допуснем, че $B' \notin g$ и да означим $BB' = b$. Тъй като $\Phi(b) = \Phi(BB') = b$, то точката $G = a \cap b$ ще бъде двойна за Φ , а $G \notin o$. Това противоречи на условието на разглеждания случай. Следователно допускането не е вярно и остава $B' \in g$, от където следва $\Phi(g) = \Phi(BB') = g$.

Теорема 17.3 (дуална на Теорема 17.2) Ако колинеацията Φ е различна от идентитета и притежава двоен сноп прави, то тя притежава и двоен ред точки.

Определение 17.1 Колинеация, която има двоен ред точки и двоен сноп прави се нарича хомология.

Носителят на двойния ред точки се нарича ос на хомологията, а центърът на двойния сноп прави се нарича център на хомологията.

Определение 17.2 Хомологията се нарича специална, когато центърът и оста ѝ са инцидентни.

Определение 17.3 Хомологията се нарича обща, когато центърът и оста ѝ са неинцидентни.

Хомологията Φ с център O , ос o и двойка съответни точки A и A' ще бележим накратко по следния начин: $\Phi(O, o; A \rightarrow A')$.

Свойства на хомологията, които установихме в хода на доказателството на предходните теореми:

- 1) Точките на оста и центърът на дадена хомология и само те са двойните ѝ точки.
- 2) Правите през центъра и оста на дадена хомология и само те са двойните ѝ прави.

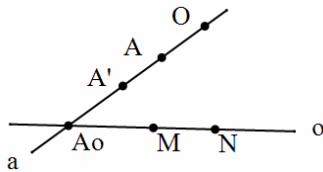
3) Съединителните прави на всеки две съответни точки за дадена хомология минават през центъра ѝ.

4) Пресечните точки на всеки две съответни прави за дадена хомология лежат върху оста ѝ.

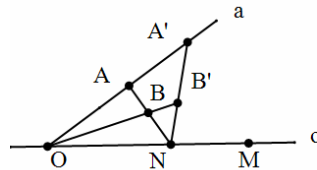
Теорема 17.4 Нека са дадени три различни и колинеарни точки O, A, A' и права o , неминаваща нито през точка A , нито през точка A' . Съществува точно една хомология Φ с ос o и център O , за която $\Phi(A) = A'$.

Доказателство: 1) Нека $O \notin o$.

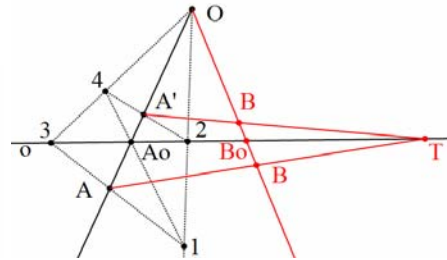
Съществуване. Да въведем следните означения: $AA' = a$, $a \cap o = A_o$. Да изберем две произволни точки $M, N \in o$, но различни от A_o (Фигура 17.4.1). Съгласно Теорема 16.7 съществува точно една колинеация Φ , при която $\Phi(OMNA) = OMNA'$. Тъй като $\Phi(o) = \Phi(MN) = \Phi(M)\Phi(N) = MN = o$ и $\Phi(a) = \Phi(OA) = \Phi(O)\Phi(A) = OA' = a$, то $\Phi(A_o) = \Phi(a \cap o) = \Phi(a) \cap \Phi(o) = a \cap o = A_o$. Но тогава проективността Φ_o има три двойни точки M, N, A_o и съгласно Теорема 12.4 $\Phi_o = id$. Следователно колинеацията Φ притежава двоен ред точки o . От Теорема 17.2 следва, че Φ притежава и двоен сноп прави и поради $\Phi(O) = O$, $O \notin o$ и Свойство 1) на всяка хомология, центърът на двойния сноп прави е точка O . Така доказахме, че съществува хомологията $\Phi(O, o; A \rightarrow A')$



Фигура 17.4.1



Фигура 17.4.2



Фигура 17.5

Единственост. Нека $\Phi^*(O, o; A \rightarrow A')$ е втора хомология, удовлетворяваща условията на теоремата. От условието, че O е център на Φ^* , o е ос на Φ^* и Свойства 1) и 2) на хомологията, следва $\Phi^*(OMNA) = OMNA'$. Но и $\Phi(OMNA) = OMNA'$. Тогава съгласно Теорема 15.7 $\Phi^* = \Phi$.

2) Нека $O \in o$.

Съществуване. Избираме произволни точки $B \notin o$, $B \neq A$, $M \in o$, $M \neq O$, $M \neq N$ където $N = AB \cap o$. Нека $BO \cap NA' = B'$ (Фигура 17.4.2). Основавайки се на Теорема 16.7 задаваме колинеацията Φ , така че $\Phi(OMAB) = OMA'B'$. Леко се съобразява, че $\Phi_o(O, M, N) = O, M, N$, т.е. $\Phi_o = id$. Значи o е двоен ред точки, а Φ е хомология с ос o . От $O = AA' \cap BB'$ и Свойство 3) на хомологията, следва, че точка O е центърът на хомологията Φ .

Единственост. Нека $\Phi^*(O, o; A \rightarrow A')$ е втора хомология, удовлетворяваща условията на теоремата. От условието, че O е център на Φ^* , o е ос на Φ^* и Свойства 1) и 2) на хомологията следва $\Phi^*(O, M, N) = O, M, N$. Тогава от Свойства 3) и 4) на хомологията и $B \in AN$ следва, че $\Phi(B) = A'N \cap OB = B'$. Така

$\Phi(OMAB) = \Phi^*(OMAB) = OMA'B'$. Тогава съгласно Теорема 16.7. $\Phi^* = \Phi$.

Следствие 17.1 *Ос и двойка съответни точки определят точно една специална хомология.*

Наистина, центърът на специалната хомология ще бъде пресечната точка на оста със съединителната права на дадената двойка съответни точки.

Теорема 17.5 (дуална на Теорема 17.4) *Нека са дадени три различни прави o, a, a' , минаващи през една точка и нека е дадена точка O , нележаща нито на правата a , нито на правата a' . Съществува точно една хомология Φ с ос o и център O , за която $\Phi(a) = a'$.*

Определение 17.4 Една хомология се нарича хармонична, ако всяка двойка съответни точки A, A' , центърът O и пресечната точка A_o на правата AA' с оста o образуват хармонична група, т.е. $H(AA', OA_o)$.

От определението е ясно, че хармоничната хомология е напълно определена с оста и центъра си.

Теорема 17.6 Достатъчно условие една хомология Φ с център O и ос o да бъде хармонична е да съществува поне една двойка съответни точки A, A' , така че $H(AA', OA_o)$, където точка $A_o = AA' \cap o$.

Доказателство Нека хомологията $\Phi(O, o; A \rightarrow A')$ удовлетворява условието $H(AA', OA_o)$, където точка $A_o = AA' \cap o$ (Фигура 17.5). Нека B е произволна точка и $AB \cap o = T$, $OB \cap o = B_o$, $TA' \cap OB = B'$. Съгласно свойствата на хомологията $\Phi(B) = B'$.

$$\begin{matrix} T \\ = \end{matrix}$$

От $AA'OA_o \wedge BB'OB_o$, условието $H(AA', OA_o)$ и Теорема 9.1 следва $H(BB', OA_o)$. Тъй като B, B' са произволна двойка съответни точки, то доказаното твърдение е в сила за всяка двойка съответни точки на Φ .

Допълване на хомология

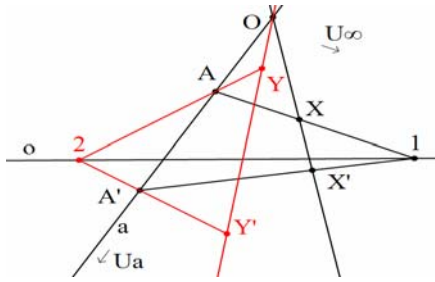
Определение 17.4 *Допълване на хомологията Φ се нарича всяка конструкция, която ни позволява да намираме образа на произволен елемент X (точка или права) и първообраза на произволен елемент Y' (точка или права).*

Следващите основни задачи ще решат въпроса за допълване на хомология.

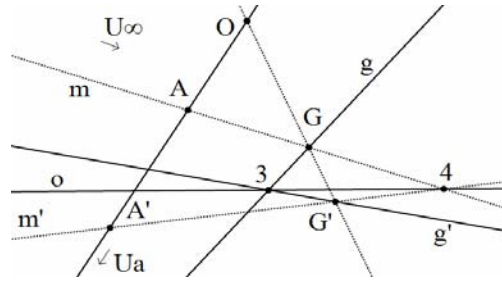
Основна задача 17.1 Нека е дадена хомологията $\Phi(O, o; A \rightarrow A')$ и произволно избраните точки X, Y' и прави g, h' . Да се намерят: $X' = \Phi(X)$, $Y = \Phi(Y')$, $g' = \Phi(g)$, $h = \Phi(h')$.

Решение А) За намирането на точка X' извършваме следните построения (Фигура 17.6 а)):

1. Построяваме правата OX , защото съгласно Свойство 3 на хомологията точка $X' \in OX$;
2. Определяме точка $I = AX \cap o$ и построяваме правата IA' , защото съгласно Свойство 4 на хомологията правите AX и $A'X'$ се пресичат върху оста o . Тъй като правите AX и IA съвпадат, то X' е инцидентна с правата IA' ;
3.
$$X' = OX \cap IA'.$$



Фигура 17.6 а)



Фигура 17.7

Б) За намирането на точка Y' извършваме следните построения (Фигура 17.6):

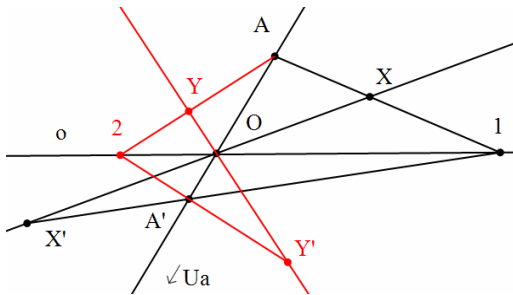
1. Построяваме правата OY ;
2. Определяме точка $2 = AY' \cap o$ и построяваме правата $2A$. Тъй като правите $A'Y'$ и $2A'$ съвпадат, а $\Phi^{-1}(2A') = 2A$, то Y е инцидентна с правата $2A$;
3. $Y = OY' \cap 2A$.

В) За да намерим образа (респ. първообраза) на произволна права е достатъчно да намерим образите (респ. първообразите) на две нейни точки. Удобна е пресечната точка на правата с оста, защото съгласно Свойство 1 на хомологията, тя е двойна точка.

Нека $g \cap o = 3$, а $G \in g$ е произволна точка (Фигура 17.7). Тогава $\phi(g) = \phi(3G) = \phi(3)\phi(G) = 3G'$ където точката G' е намерена по начина, описан в А).

Г) Ако $h' \cap o = 5$ и $H' \in h'$ е произволна точка, то $h = \phi^{-1}(h') = \phi^{-1}(5H') = 5H$.

Фигури 17.6 а) и 17.7 представят решението на задачата в случая, когато хомологията е обща. Само след една трансляция на точка O по правата a докато съвпадне с пресечната точка на a и o ще се получи решението на задачата в случая, когато хомологията е специална (Фигури 17.6 б)).



Фигури 17.6 б)

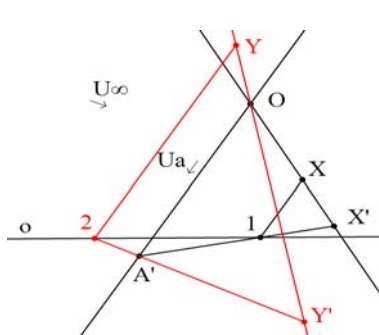
На Фигури 17.6 а) и 17.7 са зададени още и безкрайната точка U_a на правата a , върху която лежат точките O, A, A' , както и произволната безкрайна точка U_∞ . От динамичните чертежи 17.6 а) и 17.7 с помощта на специалната функция РКБТ могат да бъдат получени веднага решенията на следните задачи:

Да се допълни хомологията $\Phi(O, o; U_a \rightarrow A')$; (Фигура 17.8)

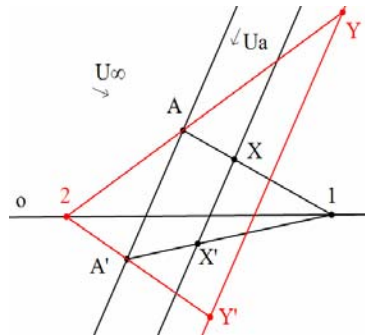
Да се допълни хомологията $\Phi(O, o; A \rightarrow U_a)$;

Да се допълни хомологията $\Phi(U_a, o; A \rightarrow A')$; (Фигура 17.9)

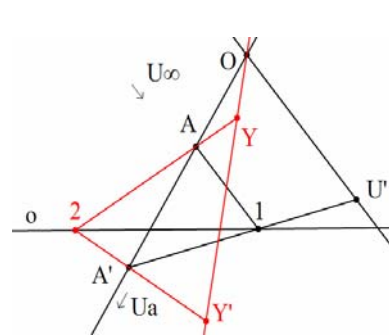
Динамичният чертеж 17.6 а) може да представи и точка $U' = \Phi(U_\infty)$. Достатъчно е с помощта на специалната функция РКБТ да бъдат разменени точките X и U_∞ (Фигура 17.10).



Фигура 17.8



Фигура 17.9

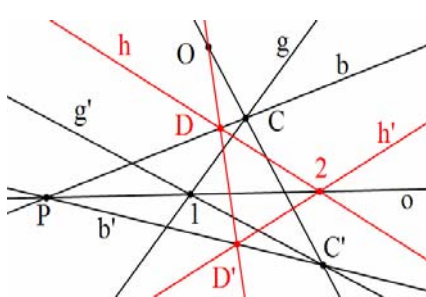


Фигура 17.10

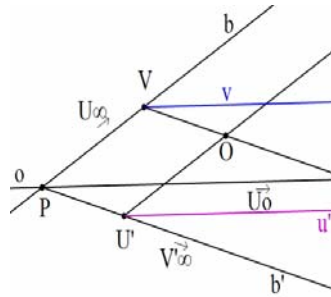
Убежни прави на хомологията Φ се наричат крайните прави u' и v , които са съответно образ и първообраз на безкрайната права ω .

Основна задача 17.2 Нека е дадена хомологията $\Phi(O, o; b \rightarrow b')$ и произволно избраните точки X, Y' и прави g, h' . Да се намерят: $X' = \Phi(X)$, $Y = \Phi^{-1}(Y')$, $g' = \Phi(g)$, $h = \Phi^{-1}(h')$. Да се построят убежните прави на Φ .

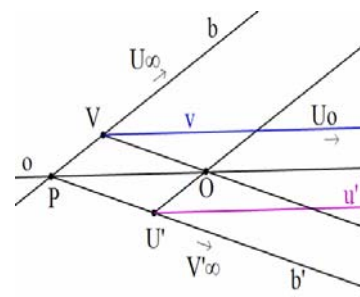
Решение Построяваме произволна права a през центъра на хомологията и нека $a \cap b = B$, $a \cap b' = B'$. Съгласно свойствата на хомологията $\Phi(B) = B'$. Така намирането на точките X' и Y протича с построения, аналогични на тези в А) и Б) на Основна задача 17.1. Намирането на правите g' и h може да се опрости, като се използва точката $C = g \cap b$ (респективно $D' = h' \cap b'$) вместо произволната точка G както е в случая Г) от решението на Основна задача 17.1. Проследете построенията чрез динамичния чертеж 17.11, използвайки панела за презентация.



Фигура 17.11



Фигура 17.12



Фигура 17.13

Построяване на убежните прави на хомологията Φ . Нека $\Phi(\omega) = u'$ и $\Phi^{-1}(\omega) = v$, където ω е безкрайната права. Съгласно Свойство 4 на хомологията правите ω , u' и v се пресичат върху оста o . Тъй като безкрайната права ω пресича оста на хомологията в нейната безкрайна точка U_o , то и убежните прави u' и v ще минат през точката U_o , което означава, че убежните прави са успоредни на оста o . Остава да се намерят образ и първообраз на произволни безкрайни точки. В конкретната задача най-удобният избор е безкрайната точка U_∞ на правата b и безкрайната точка V'_∞ на правата b' , защото $\Phi(U_\infty) = U' = OU_\infty \cap b'$ и $\Phi^{-1}(V'_\infty) = V = OV'_\infty \cap b$. Тогава $u' = U'U_o$, $v = VU_o$ (Фигура 17.12).

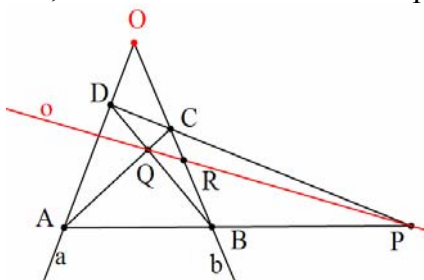
Фигура 17.13 представя убежните прави, когато хомологията е специална и се получава директно от Фигура 17.12.

Упражнение № 8

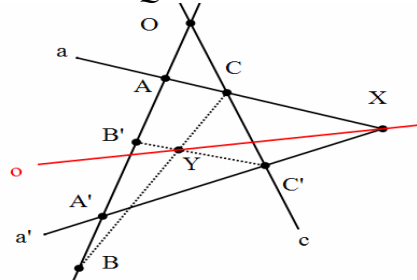
Задача 17.1 Нека в проективната равнина са дадени точките A, B, C, D , никои три от които не са колинеарни и Φ е колинеацията, определена с условието $\Phi(ABCD)=DCBA$. Да се докаже, че Φ е хомология и да се намерят центърът и оста на Φ .

Решение (Фигура 17.14) Да въведем означенията: $AD=a, BC=b, a \cap b=O, AB \cap CD=P, AC \cap BD=Q, PQ \cap b=R$.

От $\Phi(a)=\Phi(A)\Phi(D)=DA=a$ и $\Phi(b)=\Phi(B)\Phi(C)=CB=b$ следва, че правите a и b са двойни за Φ , без да бъдат двойни редове точки. От $\Phi(P)=\Phi(AB) \cap \Phi(CD)=DC \cap BA=P$, $\Phi(Q)=\Phi(AC) \cap \Phi(BD)=DB \cap CA=Q$ и $\Phi(O=a \cap b)=\Phi(a) \cap \Phi(b)=a \cap b=O$ следва, че точките P, Q и O са двойни за Φ . Тогава и правата $o=PQ$ е двойна за колинеацията Φ , която поражда върху o проективността Φ_o . Тъй като и за точка R имаме $\Phi(R)=\Phi(PQ) \cap \Phi(b)=\Phi(o) \cap b=o \cap b=R$, то $\Phi_o(P, Q, R)=P, Q, R$ и тогава съгласно Теорема 12.4 проективността Φ_o съвпада с идентитета, а o е двоен ред точки за Φ . От Теорема 17.4 следва, че колинеацията Φ притежава и двоен сноп прави с център точка O . С това доказахме, че Φ е хомология с център $O=AD \cap BC$ и ос $o=PQ$.



Фигура 17.14



Фигура 17.15

Съгласно Теорема 9.2 имаме следната хармонична група $H(BC, OR)$. Тогава от Определение 17.4 и Теорема 17.6 следва, че Φ е хармонична хомология.

Задача 17.2 Да се намерят центърът и оста на хомологията Φ , ако:

- $\Phi(A, B, P)=A', B', P$, където никои три от дадените точки не са колинеарни;
- $\Phi(a, b, p)=a', b', p$, където никои три от дадените прави не са конкурантни.

Задача 17.3 Дадени са точките $O, A, B, A', B' \in t$ и точка $X \notin t$. Да се намерят оста и убежните прави на хомологията ϕ с център точка O , за която $\phi(A, B, X)=A', B', X$.

Създайте спътници на задачата. Да се формулира и реши дуалната задача.

Упътване Построяваме произволна права $c \ni O$ (Фигура 17.15). Съгласно Свойство 2 на хомологията $\phi(c)=c$. Тъй като $\phi(A, X)=A', X=a'$, то $\phi(C=a \cap c)=a' \cap c=C'$. Тогава точката $Y=BC \cap B'C'$ лежи върху оста o на ϕ или $o=XY$.

Задача 17.4 Дадени са точките $A, B, A', B' \in t$ и права o , неминаваща през никоя от дадените точки. Да се намерят центърът и убежните прави на хомологията ϕ с ос правата o , за която $\phi(A, B)=A', B'$.

Създайте спътници на задачата. Да се формулира и реши дуалната задача.

Упътване Изберете две произволни точки $1, 2 \in o$ и с помощта на правите $1A$, $2B$ и техните образи намерете нова двойка съответни точки за хомологията ϕ .

Задача 17.5 Дадени са хомология Φ с център O и ос o , и правите p и q , които не са съответни за Φ . Да се намери двойка точки P и Q , така че $\Phi(P)=Q$, $P \in p$, $Q \in q$.

- а) $\Phi(O, o; A \rightarrow A')$ е обща хомология, а правите p и q са произволни крайни прави;
- б) $\Phi(O, o; a \rightarrow a')$ е специална хомология, а правите p и q са произволни крайни прави;
- в) $\Phi(O, o; \omega \rightarrow u')$ е обща хомология, а правите p и q са произволни крайни прави;
- г) $\Phi(O, o; A \rightarrow A')$ е обща хомология, а правата $p = \omega$ и q е произволна крайна права.

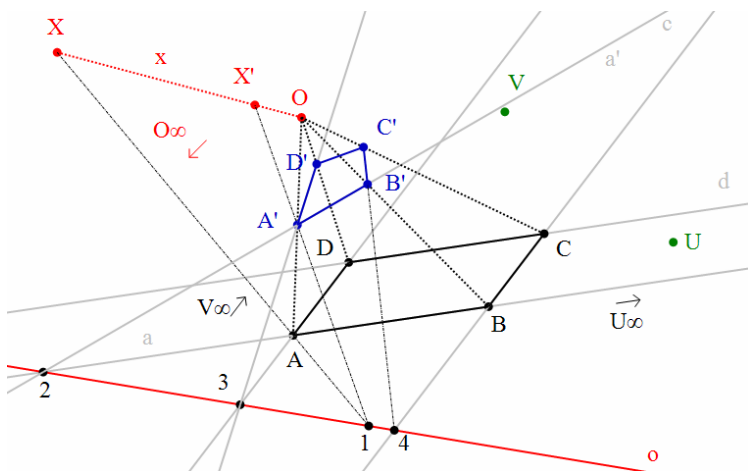
Упътване Намерете правата $p' = \Phi(p)$ и тогава $Q = p' \cap q$, а $P = \Phi^{-1}(Q) = OQ \cap p$.

Задача 17.6 Създайте вашата импровизация върху Задача 17.5.

Задача 17.7 Даден е универсалният успоредник $ABCD$ (виж Фигура 6.4) и хомологията $\Phi(O, o; X \rightarrow X')$. Да се намери фигурата $A'B'C'D' = \Phi(ABCD)$ и убежните прави на Φ .

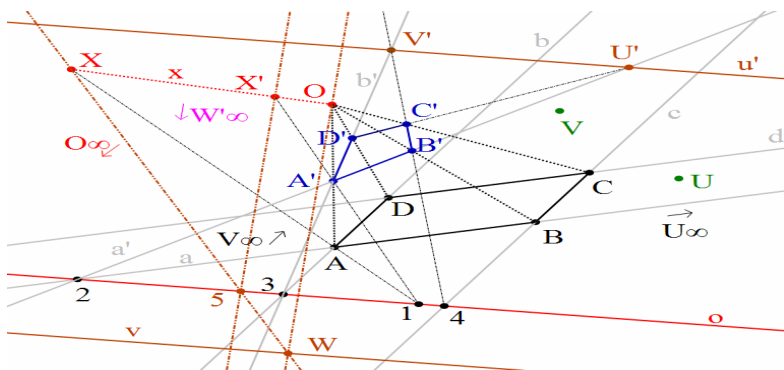
Да се разгледат случаите, когато $ABCD$ е трапец или произволен четириъгълник.

Да се разгледат случаите, когато центърът на хомологията е безкрайна точка.



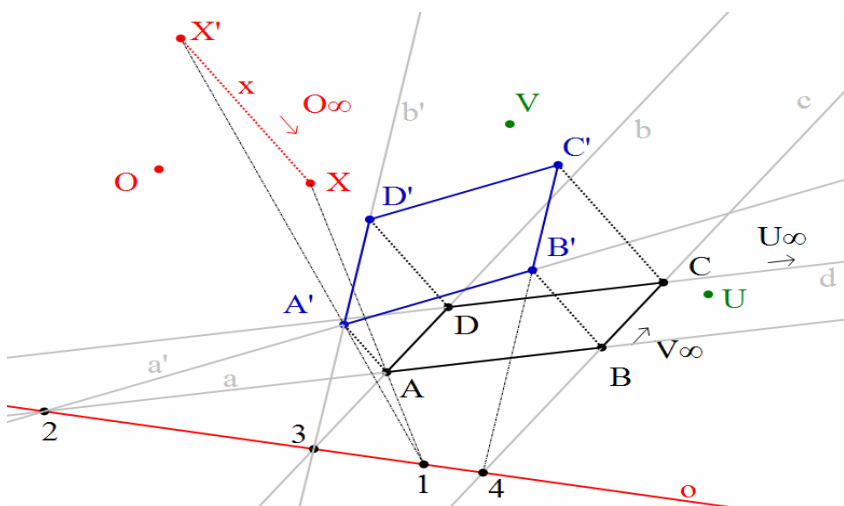
Фигура 17.16

Упътване Проследете построенията, презентирайки динамичния чертеж 17.16. На Фигура 17.17 са добавени и убежните прави u' и v като са използвани точките $U' = \Phi(U_\infty) = \Phi(AB \cap CD) = A'B' \cap C'D'$, $V' = \Phi(V_\infty) = \Phi(AD \cap BC) = A'D' \cap B'C'$ и $W = \Phi^{-1}(W'_\infty) = O W'_\infty \cap 5X$.



Фигура 17.17

Фигура 17.18 е получена от Фигура 17.16 след прилагане на специалната функция РКБТ за точките O и O_∞ . Сега имаме афинна хомология, поради което $A'B'C'D'$ е успоредник.



Фигура 17.18

Задача 17.8 Даден е универсалният успоредник $ABCD$ (виж Фигура 6.4) и хомологията $\Phi(O, o; a \rightarrow a')$. Да се намери фигурата $A'B'C'D' = \Phi(ABCD)$ и убежните прави на Φ .

Да се разгледат случаите, когато $ABCD$ е трапец или произволен четириъгълник.

Да се разгледат случаите, когато центърът на хомологията е безкрайна точка.

Задача 17.9 Даден е четириъгълник $ABCD$ и точка O . Намерете хомология Φ с център O , която трансформира $ABCD$ в успоредник. Постройте $A'B'C'D' = \Phi(ABCD)$.

Упътване Намерете убежната права $v = \Phi^{-1}(o)$.

Задача 17.10 Да се докаже, че произведението на две хомологии с обща ос е хомология със същата ос и центровете на трите хомологии са колинеарни.

Да се формулира дуалната задача.

Упътване. Ако $\phi_1(O_1, o; A \rightarrow A_1)$ и $\phi_2(O_2, o; A \rightarrow A_2)$ са дадените хомологии, то достатъчно е да се докаже, че o е двоен ред точки за $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$, а O_1O_2 е двойна права за $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ като се приложат свойствата на хомологията.

18 Афинна геометрия

Разработването на афинната геометрия чрез координатния метод е добре познато от курса по аналитична геометрия. Синтетичното изложение на афинната геометрия, което ние ще разгледаме, принадлежи на Веблен.

Определение 18.1 Нека в проективната равнина P_2 изберем една произволна права и я наречем безкрайна права. Ще се условим да бележим безкрайната права с ω .

Определение 18.2 Всяка точка A , принадлежаща на безкрайната права ω , наричаме безкрайна и ще я бележим с A_∞ . Останалите точки на P_2 наричаме крайни.

Определение 18.3 Всеки две прави, които се пресичат в безкрайна точка, наричаме успоредни.

Проективната равнина, с избрана върху нея безкрайна права, наричаме **афинна равнина** и означаваме A_2 .

От определението за успоредни прави и аксиома A_3 непосредствено следват познатите твърдения:

1) През дадена точка Q минава точно една права b , успоредна на дадена права a .

Наистина, ако $a \cap \omega = A_\infty$, то единствената права $b = QA_\infty$ е успоредна на a .

2) Всички прави, успоредни на дадена права a са успоредни по между си.

Нека $a \cap \omega = A_\infty$ и $b \parallel a$, $c \parallel a$. Следователно $b \cap \omega = A_\infty$, $c \cap \omega = A_\infty$, което означава $b \cap c = A_\infty$, т.е. $b \parallel c$.

Трябва да отбележим, че когато в афинната равнина се работи само с крайните точки и прави, тогава можем да я разглеждаме като проективна равнина, от която е отстранена безкрайната права ω . Така две успоредни прави в A_2 нямат обща крайна точка.

За простота при изразяването в по-нататъшното изложение ще уточняваме вида на точката или правата, само ако тя е безкрайна.

Наредба на точките, инцидентни с една права, в афинната равнина.

Разглежданията в §10 ни позволиха да разглеждаме проективната права като затворена линия. Афинната права се получава от проективната права след отстраняване на безкрайната ѝ точка. По този начин афинната права се превръща в отворена линия. Тогава релацията разделяне естествено се заменя с релацията между.

Определение 18.4 Ще казваме, че точката B е между точките C и D и бележим B/CD , ако $A_\infty B/CD$, където $A_\infty = \omega \cap CD$ е безкрайната точка на правата CD .

Сега да проследим как ще се префразират аксиомите на наредбата, когато разглеждаме не проективна, а афинна права. Нека A бъде безкрайната ѝ точка.

Съществува права, съдържаща три различни точки.

Ако B/CD , то точките B, C, D са различни и колинеарни.

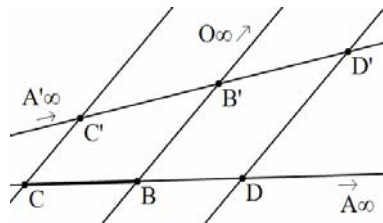
Ако B/CD , то B/DC .

Ако B, C, D са три различни, колинеарни точки, то в сила е точно една от следните три релации: B/CD , C/DB , D/BC .

Ако B/CD и C/BE , то B/DE .

Ако B/CD и $BCD \overset{O_\infty}{\wedge} B'C'D'$, то $B'/C'D'$ или централната перспективност с безкраен център запазва релацията между (Фигура 18.1). Централна перспективност, чийто център е безкрайна точка, се нарича още **успoredно проектиране**.

Докато две точки от проективната права определят два сегмента, за уточняването на които бе необходима и трета точка, то две точки B и C от афинната права определят точно един сегмент, състоящ се от всички точки X , лежащи между B и C .



Фигура 18.1

Този единствен затворен проективен сегмент с краища B и C наричаме **отсечка BC** .

Макар че крайната права вече е отворена, то безкрайната права си остава затворена линия и не може да се укаже коя от дадени три безкрайни точки лежи между другите две. Може само да се каже, че от четири безкрайни точки едната двойка разделя другата. Важно е да отбележим още, че избирайки едната от двете посоки върху безкрайната права за положителна, определяме положителна посока на въртене за всички крайни точки в A_2 .

19 Афинитет. Афинна хомология

Определение 19.1 *Колинеация, за която безкрайната права е двойна права, се нарича афинитет.*

От Определение 19.1 непосредствено следва, че афинитетът изобразява всяка безкрайна точка в безкрайна точка и всяка крайна точка в крайна точка.

Теорема 19.1 *Афинитетът изобразява успoredните прави в успoredни прави.*

Доказателство Нека правите a и b са успoredни, т.е. $a \cap b = U_\infty$ и Φ е афинитет. Следователно $\Phi(U_\infty) = U'_\infty$. Тъй като афинитетът е колинеация, то правите $a' = \Phi(a)$ и $b' = \Phi(b)$ ще бъдат инцидентни с точката U'_∞ (Свойство 3 на колинеацията), от където следва, че правите a' и b' са успoredни.

Теорема 19.2 *Ако ABC и $A'B'C'$ са два триъгълника, то съществува точно един афинитет Φ , така че $\Phi(ABC) = A'B'C'$.*

Доказателство Съществуване. Да означим: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $B'C'=a'$, $C'A'=b'$, $A'B'=c'$. Прилагайки Теорема 16.6 за четиристранниците $abc\omega$ и $a'b'c'\omega'$ заключаваме, че съществува колинеация Φ , така че $\Phi(abc\omega) = a'b'c'\omega'$. От $\Phi(\omega) = \omega$ и Определение 19.1 следва, че Φ е афинитет. От свойството на колинеацията да запазва инцидентността на точка и права следва $\Phi(A) = \Phi(b \cap c) = \Phi(b) \cap \Phi(c) = b' \cap c' = A'$. Аналогично се

проверява и $\Phi(B) = B'$, $\Phi(C) = C'$.

Единственост. Да допуснем, че съществува втори афинитет със свойството $\Phi^*(ABC) = A'B'C'$. Отчитайки че Φ^* е колинеация, намираме $\Phi^*(a) = \Phi^*(BC) = \Phi^*(B)\Phi^*(C) = B'C' = a'$, $\Phi^*(b) = \Phi^*(CA) = C'A' = b'$, $\Phi^*(c) = c'$. От това, че Φ^* е афинитет следва $\Phi^*(\omega) = \omega$. Така получихме $\Phi(abc\omega) = \Phi^*(abc\omega) = a'b'c'\omega$, от където следва $\Phi^* = \Phi$.

Определение 19.2 *Проективност на реда точки g върху реда точки g' (и двата с крайни носители), при която на безкрайната точка на g съответства безкрайната точка на g' се нарича подобност.*

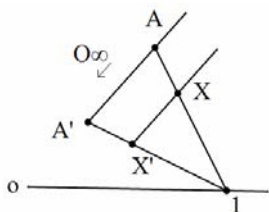
От Определения 19.1, 19.2 и Теорема 16.3 следва верността на

Теорема 19.3 *Афинитетът индуцира между съответните редове точки с крайни носители подобност.*

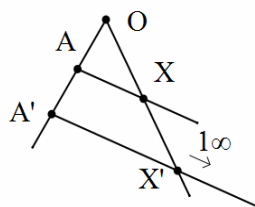
Определение 19.3 *Афинитет, който е едновременно и хомология, се нарича хомоложен афинитет или афинна хомология.*

От свойствата на хомологията знаем, че двойните прави на хомологията са оста и правите през центъра ѝ и само те. Следователно за безкрайната права ω съществуват следните две възможности:

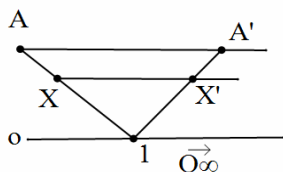
- 1) ω съвпада с оста на хомологията;
- 2) ω минава през центъра на хомологията.



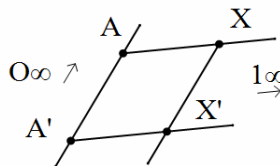
Фигура 19.1



Фигура 19.2



Фигура 19.3



Фигура 19.4

Във връзка с тези две възможности за ω и двата вида хомологии – обща и специална – афинната хомология може да бъде един от следните четири случая:

- а) Обща хомология с безкраен център и крайна ос (Фигура 19.1) ;
- б) Обща хомология с краен център и безкрайна ос (Фигура 19.2) ;
- в) Специална хомология с безкраен център и крайна ос (Фигура 19.3) ;
- г) Специална хомология с безкраен център и безкрайна ос (Фигура 19.4) .

На Фигура 19 афинната хомология е зададена в изброените по-горе четири случая с

център O , ос o и двойка съответни точки A и A' . На всеки от чертежите е построен и образът на произволна точка X .

Определение 19.4 *Афинната хомология от тип б) се нарича хомотетия.*

Афинната хомология от тип г) се нарича транслация.

Афинната хомология няма убежни прави, защото безкрайната права е двойна.

Теорема 19.4 *Афинитетите образуват група от преобразувания в A_2 .*

Верността на теоремата следва от Теорема 16.1 и Определение 19.1.

Групата на афинитетите се нарича афинна.

Определение 19.5 *Казваме, че две отсечки, които са успоредни или лежат върху една и съща права са конгруентни, когато са съответни при транслация.*

Без доказателство, само ще формулираме следната теорема.

Теорема 19.5 *Средата R на отсечката PQ е хармонично спрегната на безкрайната точка на правата PQ относно двойката точки PQ .*

Любознателният читател може да намери доказателството в [6].

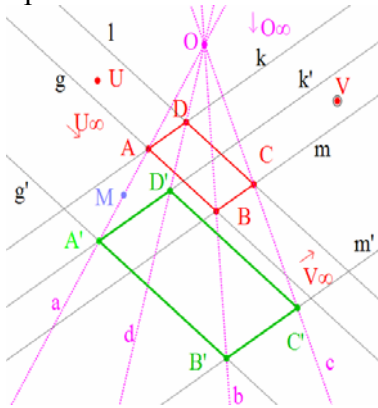
В афинната геометрия можем да сравняваме само отсечки, които лежат върху успоредни прави или върху една и съща права. Въвеждайки единична отсечка върху една от тях, можем и да измерваме тези отсечки.

Упражнение № 9

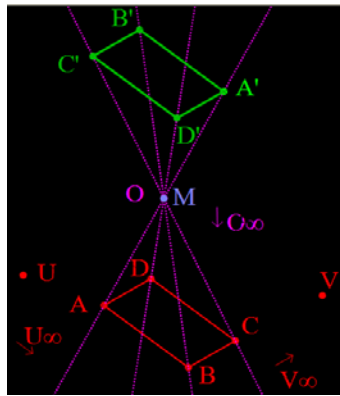
Задача 19.1 Посочете в кои от задачите на §17 хомологията е афинна.

Задача 19.2 Дадена е хомотетия $\Phi(O, A \rightarrow A')$ и успоредникът $ABCD$. Намерете образа на $ABCD$ при хомотетията Φ , при централна симетрия, при трансляция.

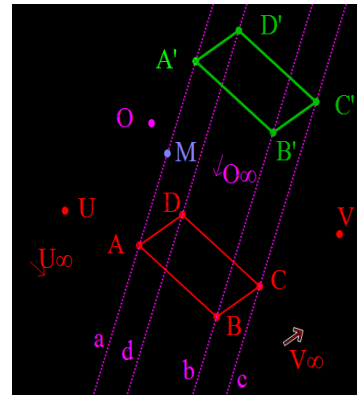
Решение Като са използвани Свойства 3 и 4 на хомологията е намерен успоредникът $A'B'C'D'$ (Фигура 19.5). Построенията могат да се проследят чрез презентация на едноименния динамичен чертеж. Динамиката върху свободните точки O , A или A' променя



Фигура 19.5



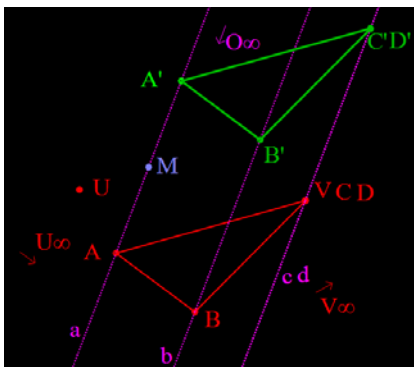
Фигура 19.6



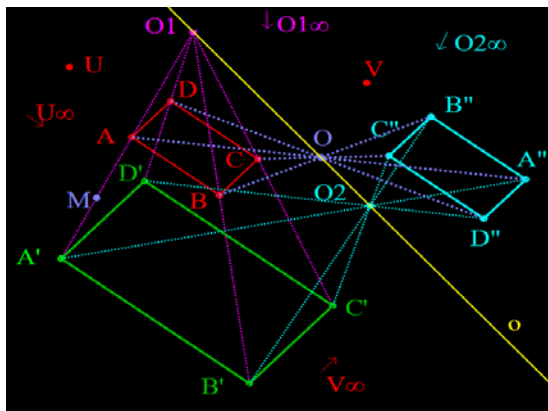
Фигура 19.7

параметрите на хомотетията. Централната симетрия е хармонична афинна хомология с краен център и ос безкрайната права, защото $H(AA', OU_{AA'})$ или хомотетия с коефициент $k=-1$. За да се намери образа на $ABCD$ при централна симетрия е достатъчно да се определи средата M на отсечката AA' чрез инструмента „скаларна точка” и да се избере A' , така че точките O и M да съвпадат (Фигура 19.6). Предпочетен е черен фон, за да се скрият линиите от Фигура 19.5, с помощта на които е получен образът $A'B'C'D'$. На края след размяна на точките O и O_∞ се получава образа на $ABCD$ при трансляция (Фигура 19.7).

Изборът $ABCD$ да бъде универсалният успоредник позволява да се представи веднага и решението на аналогична задача за трапец, произволен четириъгълник или триъгълник само след прилагане на специалната функция РКБТ на ДГС Sam (Фигура 19.8).



Фигура 19.8



Фигура 19.9

Задача 19.3 Намерете образа на универсалния успоредник $ABCD$ чрез две последователни хомотетии $\Phi_1(O_1, A \rightarrow A')$ и $\Phi_2(O_2, A' \rightarrow A'')$. Докажете, че изображението $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ е хомотетия или трансляция.

Упътване Проследете построенията чрез презентация на динамичния чертеж 19.9. Вижте задача 16.10.

Задача 19.4 Създайте вашата импровизация върху Задача 19.3. Отчитайте, че безкрайните точки U_∞ и V_∞ , свързани с универсалния успоредник, са двойни както за Φ_1 така и за Φ_2 , но след размяната им с крайни точки загубват това свойство.

20 Евклидова геометрия

Нека зададем една елиптическа инволюция ψ върху безкрайната права и да я наречем абсолютна инволюция. От проективна гледна точка всички елиптически инволюции са равностойни. Но с отделянето на една от тях, именно абсолютната инволюция, ние ѝ отреждаме по-специална роля.

Определение 20.1 *Ще казваме, че две прави са перпендикулярни, когато техните безкрайни точки са съответни за абсолютната инволюция.*

Афинната равнина, със зададена абсолютна инволюция върху безкрайната ѝ права, наричаме **евклидова равнина** и означаваме с E_2 .

Много свойства на перпендикулярността, познати в евклидовата равнина E_2 , следват непосредствено от това определение. Например:

Две прави a и b , перпендикулярни към една и съща права g са успоредни. Наистина, ако $a \cap \omega = A_\infty, b \cap \omega = B_\infty, g \cap \omega = G_\infty$, то съгласно определението имаме $\psi(A_\infty) = G_\infty, \psi(B_\infty) = G_\infty$. Но тъй като инволюцията е биективно изображение, следва $B_\infty = A_\infty$. А сега от Определение 18.3 следва $a \parallel b$.

Съответствието между перпендикулярните прави в един сноп прави е симетрично и няма двойни прави. И тези свойства на перпендикулярните прави в един сноп прави се удовлетворяват, ако изходим от нашата дефиниция. Наистина, нека O е произволна крайна точка и π е перспективността на $S(O)$ върху ω . Тогава в снопа прави $S(O)$ се индуцира проективността $\varphi = \pi \circ \psi \circ \pi^{-1}$.

Тъй като $\varphi^2 = \pi \circ \psi \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ \psi \circ \pi^{-1} = \pi \circ \psi^2 \circ \pi^{-1} = \pi \circ \pi^{-1} = id$, то φ е **инволюция, която наричаме правоъгълна**. Правоъгълната инволюция е елиптическа, защото и абсолютната инволюция, която я поражда е елиптическа. Ако $x \in S(O)$ е произволна права и $\varphi(x) = x'$, то и $\varphi(x') = x$ и x, x' са перпендикулярни прави в смисъл на Определение 20.1.

Определение 20.2 *Афинитет, който запазва абсолютната инволюция, се нарича подобност.*

Нека Φ е подобност и $\psi(U_\infty) = V_\infty, \Phi(U_\infty, V_\infty) = U'_\infty, V'_\infty$. Подобността запазва

абсолютната инволюция, т.е. $\psi(U'_\infty) = V'_\infty$. Следователно подобността изобразява перпендикулярните прави в перпендикулярни.

Един пример на подобност е хомотетията, тъй като тя, явявайки се хомоложен афинитет с ос безкрайната права, изобразява всяка безкрайна точка в себе си и по този начин запазва абсолютната инволюция.

Определение 20.3 Казваме, че два ъгъла $\angle(a, b)$ и $\angle(c, d)$ са конгруентни, когато са съответни при подобност и записваме $\angle(a, m) = \angle(m, b)$.

Определение 20.4 Казваме, че две фигури са подобни, когато едната се изобразява в другата чрез подобност.

Определение 20.5 Ъгъл, определен от правите a и b се нарича прав, когато правите a и b са перпендикулярни.

Съгласно Определения 20.1, 20.2, 20.3, 20.4 в сила е

Теорема 20.1 Всеки два прави ъгъла са конгруентни.

Определение 20.6 Ако три прави a, b, m се пресичат в една точка и $\angle(a, m) = \angle(m, b)$, то казваме, че правата m е ъглополовяща на $\angle(a, b)$.

В сила е следната теорема, която ще приемем без доказателство.

Теорема 20.2 Ако $H(ab, mn)$ като правите m и n са перпендикулярни, то m и n са ъглополовящи на $\angle(a, b)$.

Любознателният читател може да намери доказателството в [6].

Определение 20.7 Конично сечение, за което инволюцията на спрегнатите диаметри съвпада с праоъгълната инволюция, се нарича окръжност.

Теорема 20.3 През дадена точка минава точно една окръжност с център в друга дадена точка.

Верността на твърдението следва от факта, че коничното сечение C се определя еднозначно по дадени точка $A \in C$, двойка полюс и поляра P и p , инволюция на спрегнатите точки върху p . Съгласно Определения 19.3 и 20.7 задаването на точка $A \in C$ и център Z за окръжността C означава задаване на точка $A \in C$, двойка полюс и поляра Z и ω и правоъгълната инволюция в φ в снопа прави $S(Z)$. Последното условие е заменимо със задаването на абсолютната инволюция ψ върху ω .

Определение 20.8 Ще казваме, че отсечките OA и OB , лежащи върху пресичащи се прави, са конгруентни, когато точките A и B лежат върху окръжност с център O .

В резултат на Определение 20.8 следва да отбележим, че радиусите на окръжността са конгруентни.

Определение 20.9 Ще казваме, че отсечките OA и $O'B'$ са конгруентни, когато съществува отсечка OB , така че OB и $O'B'$ са съответни за трансляция, а точките A и B лежат върху окръжност с център O .

Въведените с Определения 19.4, 20.8, 20.9 релации за конгруентност на отсечки, притежават свойствата рефлексивност, симетричност и транзитивност, поради което всяка от тях е релация на еквивалентност. Следователно вече може да се определя дължина на произволна отсечка с помощта на друга отсечка, приета за единица.

Така въвеждането на абсолютната инволюция върху безкрайната права обуславя евклидовата метрика в евклидовата равнина E_2 .

Определение 20.10 Подобност, при която съответните отсечки са конгруентни, се нарича еднаквост.

С помощта на Теорема 19.3 и Определение 20.2 леко се проверява верността на **Теорема 20.4** Подобностите образуват група от преобразувания в E_2 .

Групата на подобностите се нарича метрична.

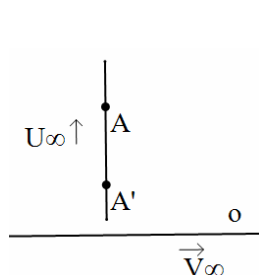
Определение 20.11 Главни направления на афинна хомология с крайна ос се нарича двойката перпендикулярни направления, чиито образи при афинната хомология са също перпендикулярни направления.

Основна задача 20.1 Да се построят главните направления на афинната хомология $\phi(o, A \rightarrow A')$.

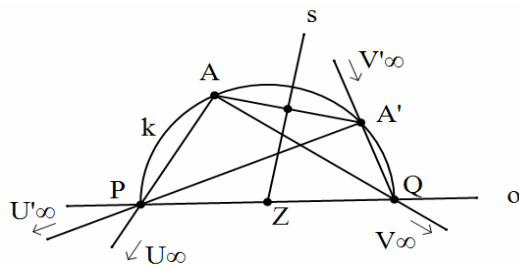
Достатъчно е да намерим двойка безкрайни точки U_∞, V_∞ , които са съответни за абсолютната инволюция ψ и техните образи при ϕ също са съответни за ψ или ако $\psi(U_\infty) = V_\infty$ и $\phi(U_\infty, V_\infty) = U'_\infty, V'_\infty$, то $\psi(U'_\infty) = V'_\infty$.

1. Нека правата AA' е перпендикулярна на оста o (Фигура 20.1).

Тогава точките $AA' \cap \omega = U_\infty$ и $o \cap \omega = V_\infty$ са търсените, тъй като те са съответни за ψ и всяка от тях е двойна за ϕ (U_∞ е център на ϕ , а V_∞ принадлежи на оста на ϕ).



Фигура 20.1



Фигура 20.2

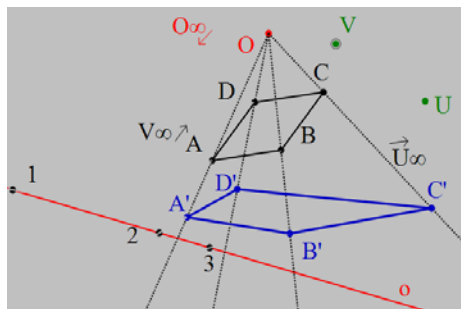
2. Нека правата AA' не е перпендикулярна на оста o (Фигура 20.2).

Нека правата s е симетрала на отсечката AA' и $s \cap o = O$. Нека $k(O, r = OA)$ е окръжност и $k \cap o = P, Q$. Тогава $\phi(AP, AQ) = A'P, A'Q$. Безкрайните точки U_∞ и V_∞ с представители съответно правите AP и AQ са търсените.

Упражнение № 10

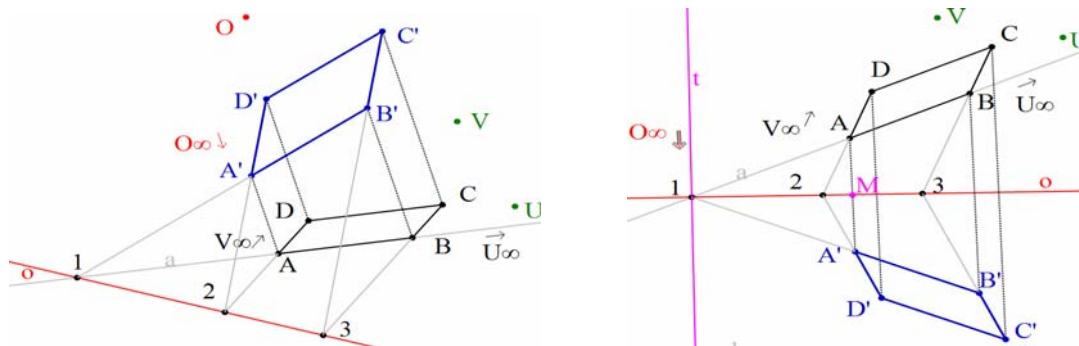
Задача 20.1 Дадена е хомологията $\Phi(O, o; A \rightarrow A')$ и успоредникът $ABCD$. Намерете образа на $ABCD$ при хомологията Φ , при афинната хомология $\Phi(O_\infty, o; A \rightarrow A')$, при осева симетрия с ос o .

Решение На Фигура 20.3 са представени успоредникът $ABCD$ и неговият образ



Фигура 20.3

четириъгълникът $A'B'C'D'$. След смяна на фона с бял ще се появят и всички помощни линии. Размяната на точките O и O_∞ ще превърне дадената хомология Φ в афинна хомология. Съгласно Теорема 19.1 образът $A'B'C'D'$ на успоредника $ABCD$ също е



Фигура 20.4

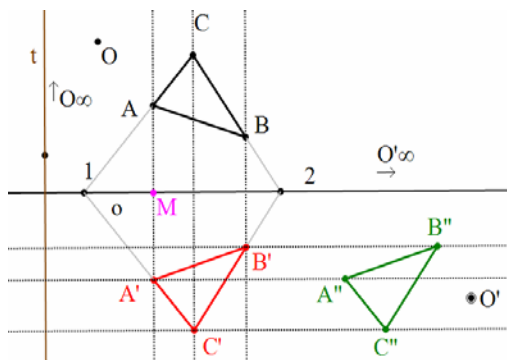
Фигура 20.5

успоредник както показва и Фигура 20.4.

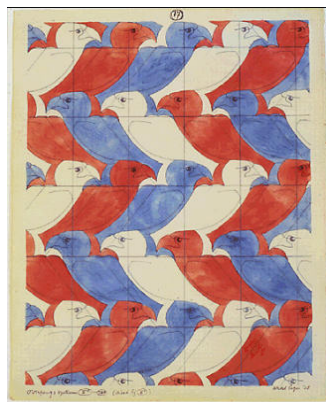
Осевата симетрия е хармонична афинна хомология с крайна ос и безкраен център, чието направление е перпендикулярно на оста, т.е. за всяка двойка съответни точки A, A' е в сила $H(AA', MO_\infty)$, където $M = AA' \cap o$. Това позволява от Фигура 20.4 да се получи Фигура 20.5. Достатъчно е точката O_∞ да принадлежи на правата t , която е перпендикулярна на оста o и средата M на AA' да лежи върху оста o . Сега вече двата успоредника $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са еднакви.

Задача 20.2 Дадена е осева симетрия Φ_o с ос o и триъгълник ABC . Да се намери $A'B'C' = \tau \circ \Phi_o(ABC)$, където τ е транслация с център $O'_\infty = U_o$ (безкрайната точка на оста o).

Композицията от осева симетрия и транслация с център безкрайната точка на оста на осевата симетрия се нарича плъзгаща или транслационна симетрия.



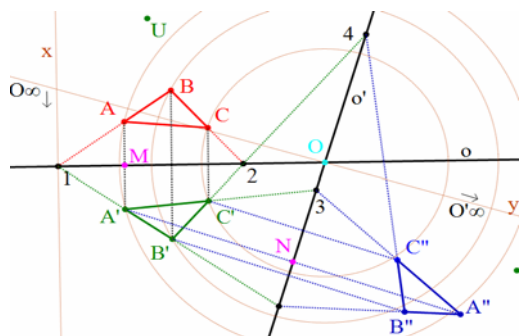
Фигура 20.6



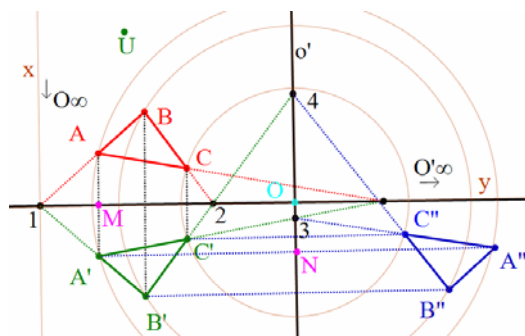
Фигура 20.7

Решение Фигура 20.6 представя решението. Динамика върху свободните обекти o, A, B, C, A'' променя само изгледа, но не и същността на плъзгащата симетрия. Ако използвате специалната функция РКБТ на ДГС Sam ще получите образа на $\triangle ABC$ чрез три различни композиции: хомология и транслация, хомология и хомотетия, осева симетрия и хомотетия. ДГС GeoGebra има макроси, които изобразяват директно образите на фигурите при осева или централна симетрия, при транслация, при ротация и т.н. Една илюстрация на плъзгаща симетрия е рисунката на известния холандски художник Морис Ешер (1898-1972) (Фигура 20.7).

Задача 20.3 Дадени са осевите симетрии Φ_o с ос o , $\Phi_{o'}$ с ос o' и триъгълник ABC . Да се намери триъгълникът $A'B'C' = \Phi_{o'} \circ \Phi_o(ABC)$. Проверете експериментално известния факт, че произведението на две осеве симетрии с перпендикулярни оси е ротация с център пресечната точка на двете оси.



Фигура 20.8



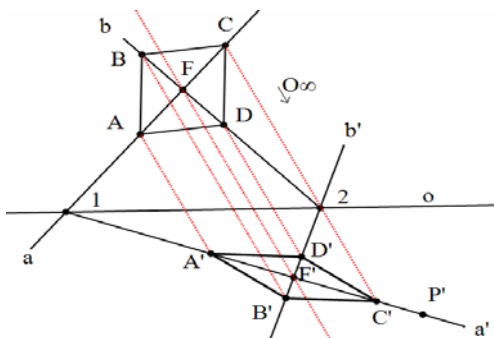
Фигура 20.9

Упътване Презентирайте динамичните чертежи 20.8 и 20.9, чиито кадри са Фигура 20.8 и Фигура 20.9. Създайте от тях композиции от други хомологии и афинни хомологии и изследвайте връзките между първообраза и образа.

Задача 20.4 Дадени са успоредник $ABCD$, точка P' и права o , неминаваща през връх на успоредника и през точка P' . Намерете афинна хомология Φ с ос правата o , която преобразува $ABCD$ в ромб с диагонал $A'C'$, минаващ през точка P' . Постройте ромба.

Решение Тъй като оста е крайна права, то следва, че центърът трябва да бъде безкрайна точка. Тогава за уточняване на афинната хомология е достатъчно да намерим двойка съответни точки.

Нека въведем означенията: $AC=a$, $BD=b$, $a \cap o=1$, $b \cap o=2$, $a \cap b=F$ (Фигура 20.10).



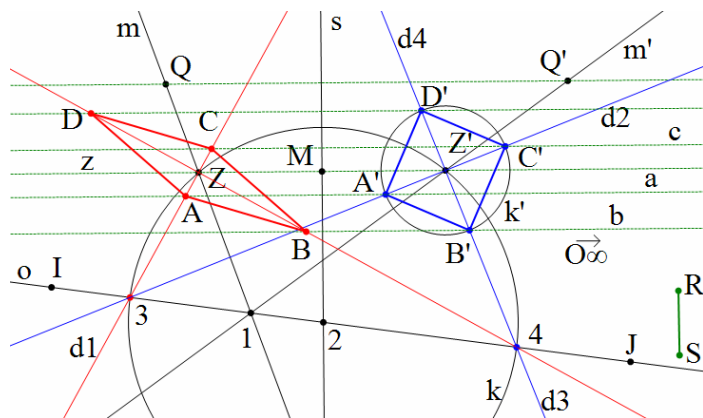
Фигура 20.10

Тогава $\Phi(a)=IP'=a'$ и $\Phi(b)=b'$, където правата b' е перпендикулярна на a' и минава през точка 2. Точките F и $F'=a' \cap b'$ са съответни за Φ , а безкрайната точка O_∞ на правата FF' е центърът на Φ . Остава да се намерят точките $\Phi(A)=A'=A \cap O_\infty \cap a'$, $\Phi(C)=C'=C \cap O_\infty \cap a'$, $\Phi(B)=B'=B \cap O_\infty \cap b'$, $\Phi(D)=D'=D \cap O_\infty \cap b'$.

Задача 20.5 Нека Φ е афинна хомология с ос крайната права o и двойка съответни точки Q и Q' . Да се построи ромб с даден център Z , който чрез Φ се изобразява в квадрат с дължина на страната a см.

Упътване. Постройте главните направления на афинната хомология Φ като използвате двойката съответни точки Z, Z' (Фигура 20.11). Върху двойките перпендикулярни прави, минаващи през Z и Z' ще лежат диагоналите съответно на ромба

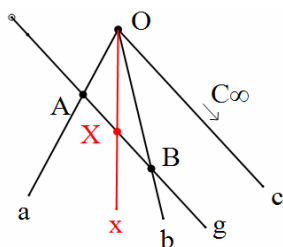
и на квадрата. Проследете всички построения, презентирайки едноименния динамичен чертеж.



Фигура 20.11

Задача 20.6 Да се построи правата x от хармоничната група $H(ab, cx)$, където a, b, c са дадени прави

Решение Задача 20.6 е познатата ни вече Задача 9.4. Теорема 19.4 позволява да опростим решението, заменяйки произволната права g с права, която е успоредна на c (Фигура 20.12). Тогава $g \cap c = C_\infty$, $H(AB, C_\infty X)$



Фигура 20.12

21 Корелация и полярност

Определение 21.1 Биективно изображение в P_2 , което притежава свойствата:

- 1) на точка съответства права;
 - 2) на права съответства точка;
 - 3) на инцидентни точка и права съответстват инцидентни права и точка
- се нарича корелация.

Корелация може да се зададе и между елементите на две различни полета, но тъй като в този курс изучаваме геометрията на P_2 ще се ограничим с горната дефиниция.

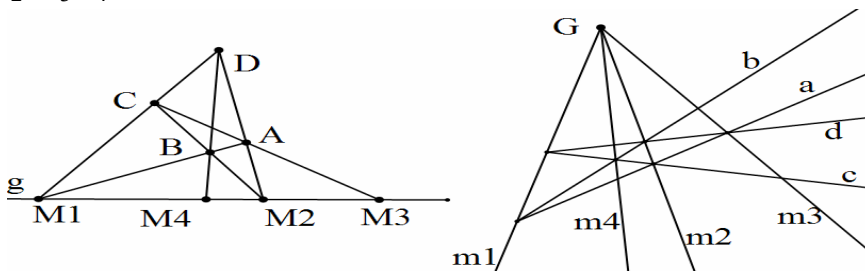
От определението е ясно, че корелацията изобразява ред точки в сноп прави и сноп прави в ред точки.

От Определения 16.5 и 21.1 следва, че произведението на две корелации е колинеация, а произведението на колинеация и корелация е корелация.

Теорема 21.1 Корелациите запазват хармоничните групи.

Доказателство: Нека точките M_1, M_2, M_3, M_4 образуват хармонична група, т.е. съществува пълен четириъгълник $ABCD$, за който M_1 и M_2 са диагонални точки, а M_3 и M_4 лежат върху двойката срещуположни страни, минаващи през третата диагонална точка R (Фигура 21.1).

Нека Φ е корелация и $\Phi(M_1, M_2, M_3, M_4) = m_1, m_2, m_3, m_4$. От $\Phi(ABCD) = abcd$ и Свойство 3) на корелацията следва, че правите m_1 и m_2 са диагонални за пълния четиристранник $abcd$, а правите m_3 и m_4 минават през двойката срещуположни върхове, лежащи на третата диагонална права $r = (ac)(bd)$. Съгласно Определение 8.2 имаме $H(m_1 m_2, m_3 m_4)$.



Фигура 21.1

Теорема 21.2 Корелацията индуцира между съответните едноизмерими фигури проективност.

Доказателство Корелацията индуцира биективно изображение между съответните едноизмерими фигури, което съгласно Теорема 21.1 запазва хармоничните групи. От Определение 12.1 следва, че това биективно изображение е проективност.

Теорема 21.3 Ако $ABCD$ и $a'b'c'd'$ са съответно пълен четириъгълник и пълен четиристранник, то съществува точно една корелация Φ , така че $\Phi(ABCD) = a'b'c'd'$.

Доказателството на Теорема 21.3 протича в същия ред както и доказателството на Теорема 16.6, поради което ще го предоставим на любознателния читател. (за справка може да се използва [6]).

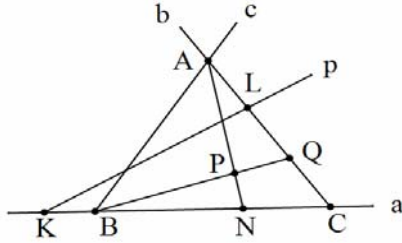
Определение 21.2 Една корелация κ се нарича полярност, когато $\kappa^2 = id$.

От определението ($\kappa^{-1} = \kappa$) е ясно, че ако $\kappa(P) = p$, то и $\kappa(p) = P$. В този случай точка P и права p се наричат съответно **полюс и поляра** относно κ .

Определение 21.3 Полярите на върховете и полюсите на страните на даден триъгълник образуват нов триъгълник, който се нарича полярен на дадения триъгълник.

Определение 21.4 Триъгълник, на който всеки връх е полюс на срещуположната му страна, се нарича автополярен.

Теорема 21.4 Всяка корелация, която притежава автополярен триъгълник, е полярност.



Фигура 21.2

Доказателство Да разгледаме корелацията κ , при която $\kappa(ABCP) = abcp$, където правите $a = BC, b = CA, c = AB$ са страни на триъгълника ABC , а P е четвърти връх на пълния четириъгълник $ABCP$ (Фигура 21.2). Да означим:

$p \cap a = K, p \cap b = L, AP \cap a = N, BP \cap b = Q$. Тъй като κ е корелация, то имаме

$$\kappa(a) = \kappa(BC) = \kappa(B)\kappa(C) = b \cap c = A,$$

$$\kappa(b) = \kappa(CA) = \kappa(C)\kappa(A) = c \cap a = B,$$

$$\kappa(c) = \kappa(AB) = \kappa(A)\kappa(B) = a \cap b = C,$$

$$\kappa(AP) = \kappa(A)\kappa(P) = a \cap p = K,$$

$$\kappa(BP) = \kappa(B)\kappa(P) = b \cap p = L.$$

Така получихме $\kappa^2(ABC) = ABC$. Сега ще докажем, че и за произволната точка P и правата $p = \kappa(P)$ е в сила $P = \kappa(p)$, т.е. $\kappa^2(P) = P$.

Да разгледаме проективността $\psi_1 = \pi_1 \circ \kappa_a$, където κ_a е проективността на реда точки a върху снопа прави $S(A)$, индуцирана от κ , а π_1 е перспективността на $S(A)$ върху a . От

$$\psi_1(B) = \pi_1 \circ \kappa_a(B) = \pi_1(b) = C,$$

$$\psi_1(C) = \pi_1 \circ \kappa_a(C) = \pi_1(c) = B$$

и Теорема 15.1 следва, че ψ_1 е инволюция. Тъй като $\kappa(N) = \kappa(a \cap AP) = \kappa(a)\kappa(AP) = AK$, то $\psi_1(N) = \pi_1 \circ \kappa_a(N) = \pi_1(AK) = K$. Но тогава и $\psi_1(K) = N$.

Понеже $\kappa_a = \pi_1^{-1} \circ \psi_1$ и $K \in a$, то

$$\kappa(K) = \kappa_a(K) = \pi_1^{-1} \circ \psi_1(K) = \pi_1^{-1}(N) = AN = AP. \quad (17.1)$$

Ще проведем аналогични разсъждения за проективността $\psi_2 = \pi_2 \circ \kappa_b$, където κ_b е проективността на реда точки b върху снопа прави $S(B)$, индуцирана от κ , а π_2 е

перспективността на $S(B)$ върху b . От

$$\begin{aligned}\psi_2(C) &= \pi_2 \circ \kappa_b(C) = \pi_2(c) = A, \\ \psi_2(A) &= \pi_2 \circ \kappa_b(A) = \pi_2(a) = C\end{aligned}$$

и Теорема 15.1 следва, че ψ_2 е инволюция. Тъй като $\kappa(Q) = \kappa(b \cap BP) = \kappa(b)\kappa(BP) = BL$, то $\psi_2(Q) = \pi_2 \circ \kappa_b(Q) = \pi_2(BL) = L$. Но тогава и $\psi_2(L) = Q$.

Понеже $\kappa_b = \pi_2^{-1} \circ \psi_2$ и $L \in b$, то

$$\kappa(L) = \kappa_b(L) = \pi_2^{-1} \circ \psi_2(L) = \pi_2^{-1}(Q) = BQ = BP. \quad (17.2)$$

Използвайки резултатите (17.1) и (17.2) получаваме $\kappa(p) = \kappa(KL) = \kappa(K)$ $\kappa(L) = AP \cap BP = P$. И така, от получения резултат $\kappa^2(ABCP) = \kappa(abcp) = ABCP$ и Теорема 16.5 получаваме $\kappa^2 = id$, т.е. κ е полярност.

Следствие 21.1 Полярността е напълно определена, ако са дадени автополярен триъгълник и двойка съответни полюс и поляра.

Ако автополярният триъгълник отбележим с ABC , а полюсът и полярата – P и p , то полярността κ ще бележим по следния начин: $\kappa(ABC; Pp)$.

22 Спрегнати точки относно полярност

Определение 22.1 Ако точка B лежи на полярата a на точка A относно полярността κ , то точка B се нарича спрегната на точка A относно κ .

Теорема 22.1 Ако точка B е спрегната на точка A относно полярността κ , то и точката A е спрегната на точка B относно κ .

Доказателство Нека $\kappa(A, B) = a, b$. Съгласно условието $B \in a$. Тъй като κ е корелация, то $\kappa(a) = A$ и инцидентността се запазва. Следователно $A \in b$. Тогава от Определение 22.1 следва, че и точка A е спрегната на точка B относно κ .

Въз основа на теорема 22.1 ще казваме, че A и B са спрегнати точки относно полярността κ .

Чрез принципа за дуалност формулираме

Определение 22.2 Ако права b минава през полюса A на права a относно полярността κ , то правата b се нарича спрегната на правата a относно κ .

Теорема 22.2 Ако права b е спрегната на права a относно полярността κ , то и права a е спрегната на права b относно κ .

Определение 22.3 Ако точка A лежи на своята поляра a относно полярността κ , т.е. A е самоспрегната точка за κ , то A се нарича особена точка за κ . Ако права a минава през своя полюс A относно полярността κ , т.е. a е самоспрегната права за κ , то a се нарича особена права за κ .

Очевидно е, че ако A е особена точка за полярността κ , то и полярата ѝ a е особена права за κ .

Теорема 22.3 Върху всяка особена права за полярността κ , лежи точно една особена точка и тя е полюсът ѝ.

Доказателство Нека a е особена права относно полярността κ , т.е. ако $\kappa(a) = A$, то $A \in a$. От Определение 22.3 веднага следва, че полюсът A е особена точка за κ . Да допуснем, че върху правата a лежи още една особена точка $B \neq A$. Това означава, че ако,

$\kappa(B)=b$, то $B \in b$. Но тогава от $B \in a$ и κ е корелация, следва $A \in b$. Така получаваме $a=b=AB$. От друга страна поради $A \neq B$ и това, че κ е биективно изображение следва $a \neq b$. Стигнахме до две противоречиви твърдения, което отхвърля допускането, че съществува точка B , различна от A , която да е особена относно κ и да лежи върху особената права a .

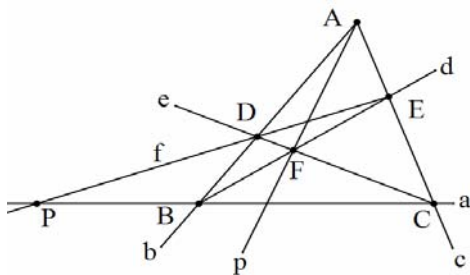
Дуалната теорема гласи:

Теорема 22.4 През всяка особена точка за полярността κ , минава точно една особена права и тя е полярата ѝ

Теорема 22.5 Върху всяка права има неособена точка за полярността κ .

Доказателство 1) Нека a е произволна особена права. Съгласно Теорема 22.3 единствената особена точка за κ върху нея е полюсът ѝ. Следователно всички останали точки са неособени.

2) Нека a е произволна неособена права с полюс A . Да изберем две различни точки



Фигура 22.1

B и C , лежащи на a (Фигура 22.1). Ако поне едната от тях е неособена, то твърдението е доказано. За това да предположим, че B и C са особени точки. Тогава $\kappa(B)=BA=b$, $\kappa(C)=CA=c$

Нека $D \in b$ е произволна точка и $D \neq A, D \neq B$. Тогава правата $d = \kappa(D)$ минава през точка B и е различна от правите a и b . Нека $d \cap c = E$. Последователно намираме $\kappa(E) = DC = e$; $e \cap d = F$, $\kappa(F) = ED = f$; $f \cap a = P$, $\kappa(P) = FA = p$. Точките A, F, P са неколинеарни, защото са диагонални точки за пълния четириъгълник $BCDE$ (Аксиома A_6). С това доказахме, че съществува точка $P \in a$, която не лежи на своята поляра относно κ , т.е. P е неособена точка за κ .

Теорема 22.6 (дуална на Теорема 22.5) През всяка точка минава неособена права за полярността κ .

Теорема 22.7 1) Две точки, лежащи върху неособената права a за полярността κ , са спрегнати относно κ , тогава и само тогава, когато те са съответни за

проективността $\psi = \pi \circ \kappa_a$, където $a \underset{\kappa_a}{\wedge} S(A) \underset{\pi}{\wedge} a$ и $A = \kappa(a)$.

2) Проективността ψ е инволюция.

Доказателство: 1) Нека $P \in a$ е произволна точка и $\kappa(P) = p$. Тъй като $\psi(P) = \pi \circ \kappa_a(P) = \pi(p) = p \cap a$, то P и P' са спрегнати $\Leftrightarrow P' \in p \Leftrightarrow \psi(P) = P'$.

2) Съгласно Теорема 22.5 върху правата a съществува неособена точка P . Следователно $\psi(P) = P' \neq P$. От Теорема 22.1 и Твърдение 1) на разглежданата теорема следва $\psi^2(P) = \psi(P') = \pi \circ \kappa_a(P') = \pi(AP) = AP \cap a = P$. Тогава прилагайки Теорема 15.1 заключаваме, че ψ е инволюция.

Инволюцията $\psi = \pi \circ \kappa_a$, индуцирана върху неособената права a се нарича **инволюция на двойките спрегнати точки относно κ върху a** .

Следствие 22.1 *Една точка върху неособената права a е особена за κ тогава и само тогава, когато е двойна за инволюцията ψ , индуцирана върху a .*

Отчитайки Следствие 22.1 и това, че инволюциите са или елиптични, или хиперболични, достигаем до верността на следната теорема:

Теорема 22.8 *Върху всяка неособена права относно полярността κ има 0 или 2 особени точки за κ .*

Дуалните твърдения на Теорема 22.7, Следствие 22.1 и Теорема 22.8 гласят:

Теорема 22.9 *1) Две прави, минаващи през неособената точка A за полярността κ , са спрегнати относно κ , тогава и само тогава, когато те са съответни за проективността $\psi = \pi \circ \kappa_A$, където $S(A) \underset{\kappa_A}{\wedge} a \underset{\pi}{\wedge} S(A)$ и $a = \kappa(A)$.*

2) Проективността ψ е инволюция.

Следствие 22.2 *Една права през неособената точка A е особена за κ тогава и само тогава, когато е двойна за инволюцията ψ , индуцирана от κ върху $S(A)$.*

Теорема 22.10 *През всяка неособена точка относно полярността κ минават 0 или 2 особени прави за κ .*

23 Криви от втора степен и втори клас

Изучаването на коничните сечения датира от 430 г. пр.н.е., когато атиняни, страдащи от чума, се обръщат за помощ към делоския оракул. Той обещал избавление от страданието, ако бъде удвоен обема на олтара на Аполон, без да се променя неговата кубична форма. Ако означим с a ръба на първоначалния куб, а с x – ръба на удвоения куб, то изискването на оракула се изразява чрез следното уравнение $x^3 = 2a^3$.

С решаването на тази задача се заема Хипократ – един от забележителните геометри на 5 век пр.н.е. Той е написал първото системно съчинение по геометрия, което обхващало материала на първите четири книги на евклидовите "Елементи". Хипократ свел задачата на Делоския оракул до намирането на такива значения на x и y , които да удовлетворяват уравненията $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

Около 340 г. пр.н.е. Менехем дал две решения на тази задача, като в едното използвал двете параболи $y^2 = 2ax$ и $x^2 = ay$, а във второто – параболата $x^2 = ay$ и правоъгълната хипербола $xy = 2a^2$. Като се има предвид, че тогава не е имало никаква представа за алгебрична символика, може да се счита, че решението на тази задача е било забележително постижение, а самият Менехем е предугадал с почти 2000 години откритието на аналитичната геометрия, сторено значително по-късно от Декарт и Ферма. Изглежда, че тези криви са били получени като равнинни сечения на кръгов конус, от където е дошло и названието им.

Евклид първи е построил конично сечение като геометрично място на точки, разстоянието на всяка от които до неподвижна точка (фокус) е пропорционално на разстоянието ѝ до неподвижна права (директриса). Названията елипса, хипербола, парабола са дадени от Аполоний (262-200 г. пр.н.е.), който открива много техни свойства.

Следващите резултати принадлежат на Пап и после в продължение на 1200 години коничните сечения са забравени.

Съществуват два подхода при изграждане теорията на кривите от втора степен и втори клас (коничните сечения). Единият от тях се основава на дефиницията на Щаут и в този курс по синтетична геометрия ние ще следваме този подход. Другият подход се основава на дефиницията на Щайнер, която тук само ще споменем. Тя гласи:

Ако $S(A)$ и $S(B)$ са два снопа прави с несъвпадащи центрове и σ е неперспективна проективност на $S(A)$ върху $S(B)$, то множеството от пресечните точки на двойките съответни прави при σ се нарича крива от втора степен.

Чрез дуалния принцип се получава дефиницията на крива от втори клас:

Ако a и b са два реда точки с несъвпадащи носители и σ е неперспективна проективност на a върху b , то множеството от съединителните прави на двойките съответни точки при σ се нарича крива от втори клас.

Христиан фон Щаут е роден през 1798 г. в Ротенбург на Таубе и е починал през 1867 г. в Ерланген. От 1822 до 1827 е учител в гимназията във Вюрцбург и същевременно е хоноруван доцент в тамошния университет. От 1835 г. е професор в Ерлангенския университет. Главното негово научно постижение е обосноваването на проективната геометрия, независимо от метричните разглеждания. Той първи разглежда поляриността независимо от коничното сечение и дори я полага в основите на определението на коничното сечение.

Якоб Щайнер е роден през 1796 г. в Утценщорф и е починал през 1863 г. в Берн. Той е син на

селянин и израства без училищно образование. Начални познания придобива при Писталоци. По-късно следва в Хайделберг, после работи като преподавател в Берлинския университет. Щайнер се счита за основател на синтетичната геометрия, която изгражда системно. Характерен белег на неговите работи е почти пълното избягване на алгебрични методи при геометричните разглеждания.

Теорема 23.1 *Ако съществува поне една особена точка за полярността κ , то съществува еднопараметрично множество особени точки за κ .*

Доказателство: Нека A е особена точка за полярността κ , т.е. $\kappa(A) = a$ и $A \in a$. Нека $g \in A, g \neq a$ е произволна права. Тогава съгласно Теорема 22.4 правата g е неособена. Тъй като върху неособената права g вече има една особена точка, то от Теорема 22.8 следва, че върху нея има точно още една особена точка. И така в снопа прави $S(A)$ има еднопараметрично множество прави и върху всяка от тях освен точката A има точно по още една особена точка.

Дуалната теорема гласи:

Теорема 23.2 *Ако съществува поне една особена права за полярността κ , то съществува еднопараметрично множество особени прави за κ .*

Очевидно е, че ако съществува особена точка за κ , то нейната поляра е особена права за κ .

Определение 23.1 *Полярност, която има особени точки и особени прави се нарича хиперболична.*

Определение 23.2 *Множеството k от особените точки за хиперболичната полярност κ се нарича крива от втора степен, породена от κ и означаваме $k(\kappa)$.*

Определение 23.3 *Множеството K от особените прави за хиперболичната полярност κ се нарича крива от втора клас, породена от κ и означаваме $K(\kappa)$.*

Ще приемем, че във всички следващи разглеждания полярността ще бъде хиперболична и няма да го отбелязваме всеки път.

Определение 23.4 *Една права се нарича допирателна на дадена крива от втора степен, когато има с нея точно една обща точка.*

Една точка се нарича допирна на дадена крива от втори клас, когато през нея минава точно една права от кривата от втори клас.

Теорема 23.3 *Ако $k(\kappa)$ и $K(\kappa)$ са крива от втора степен и крива от втори клас, породени от една и съща полярност, то множеството от допирателните на $k(\kappa)$ съвпада с $K(\kappa)$.*

Доказателство: 1). Нека a е допирателна права на $k(\kappa)$ и с A да означим единствената ѝ обща точка с k . Нека $\kappa(A) = a'$. Тъй като A е особена точка, то и полярата ѝ a' е особена права за κ . Да допуснем, че правите a и a' са различни. Следователно a е неособена права. Прилагайки Теорема 22.8 заключаваме, че върху a съществува и втора особена точка B . Но тогава $B \in k$ и правата a ще има две общи точки с k , което противоречи на условието, че a е допирателна. Това показва, че допускането не е вярно и правите a и a' съвпадат. Но тогава a е особена права за κ и съгласно Определение 23.3 $a \in K(\kappa)$.

2). Нека $a \in K(\kappa)$, т.е. a е особена права за κ . Тогава и точка $A = \kappa(a)$ е особена за κ и следователно A е обща точка за a и k . Съгласно Теорема 22.3 върху особената права a няма друга особена точка. Значи a и k имат точно една обща точка или a е допирателна за $k(\kappa)$.

Теорема 23.4 (дуална теорема на Теорема 23.3) Ако $k(\kappa)$ и $K(\kappa)$ са крива от втора степен и крива от втори клас, породени от една и съща полярност, то множеството от допирните точки на $K(\kappa)$ съвпада с $k(\kappa)$.

Въз основа на Теорема 23.3 и 23.4 въвеждаме следното определение:

Определение 23.5 Обединението на крива от втора степен и крива от втори клас, породени от една и съща полярност κ , наричаме конично сечение, породено от κ и означаваме $C(\kappa)$.

24 Полус и поляра относно конично сечение

Определение 24.1 Ако точка и права са полюс и поляра относно полярността κ , то казваме, че те са полюс и поляра и относно коничното сечение $C(\kappa)$.

Ако две точки (прави) са спрегнати относно полярността κ , то казваме, че те са спрегнати и относно коничното сечение $C(\kappa)$.

За всяка инволюция, индуцирана от полярността κ , ще казваме, че е индуцирана и от коничното сечение $C(\kappa)$.

По-нататък, когато разглеждаме само една полярност κ и няма опасност от недоразумения, в интерес на простотата на изразите ще изпускате пояснението, че коничното сечение C е породено от κ .

Определение 24.2 Неособената права a за полярността κ , върху която лежат 0 или 2 особени точки за κ , т.е. a има 0 или 2 общи точки с кривата от втора степен $k(\kappa)$, се нарича съответно несекателна или секателна за $k(\kappa)$.

Определение 24.3 Неособената точка A за полярността κ , през която минават 0 или 2 особени прави за κ , т.е. $S(A)$ има 0 или 2 общи прави с кривата от втора клас $K(\kappa)$, се нарича съответно вътрешна или външна точка за $K(\kappa)$.

От Определения 24.2, 24.3 и Следствия 22.1, 22.2 следват:

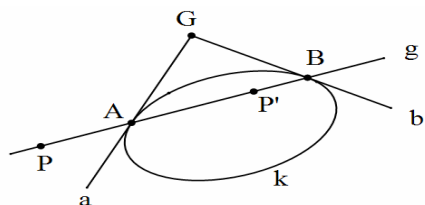
Теорема 24.1 Инволюцията, индуцирана от дадено конично сечение C върху произволна неособена права a е елиптическа (хиперболична) тогава и само тогава, когато a е несекателна (секателна) права за C .

Теорема 24.2 Инволюцията, индуцирана от дадено конично сечение C в произволна неособена точка A е елиптическа (хиперболична) тогава и само тогава, когато A е вътрешна (външна) точка за C .

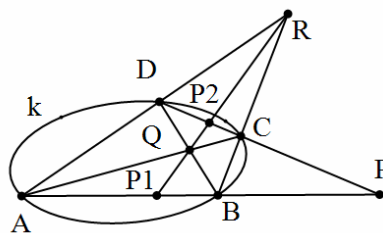
Теорема 24.3 (Теорема за хармоничните свойства на спрегнатите точки) Всеки две точки, лежащи върху секателна за коничното сечение C са спрегнати относно C тогава и само тогава, когато те са хармонично спрегнати относно двойката пресечни точки на C с тази секателна.

Доказателство: Да означим секателната с g , а пресечните ѝ точки с коничното сечение $C(\kappa)$ с A, B (Фигура 24.1). Нека още $\psi = \pi \circ \kappa_g$, където $g \underset{\kappa_a}{\wedge} S(G) \underset{\pi}{\wedge} g$, а $G = \kappa(g)$ и ψ е инволюцията, индуцирана от C върху g (виж Теорема 22.7). Тъй като g е секателна права за C , то инволюцията ψ е хиперболична. Тогава от Теорема 22.7 и Следствие 15.2 за точките $P, P' \in g$ следва:

P и P' са спрегнати относно $C \Leftrightarrow \psi(P) = P' \Leftrightarrow H(AB, PP')$.



Фигура 24.1



Фигура 24.2

Теорема 24.4 (Теорема за хармоничните свойства на спрегнатите прави) *Всеки две прави, минаващи през външна точка за коничното сечение C са спрегнати относно C тогава и само тогава, когато те са хармонично спрегнати относно двойката допирателни прави на C през тази външна точка.*

Теорема 24.5 *Диагоналният триъгълник на всеки пълен четириъгълник, вписан в конично сечение, е автополярен.*

Доказателство: Да означим върховете на пълния четириъгълник, вписан в коничното сечение $C(k)$ с A, B, C, D . Нека $P = AB \cap CD, Q = AC \cap BD, R = AD \cap BC$ са диагоналните му точки (Фигура 24.2). Ако $QR \cap AB = P_1, QR \cap CD = P_2$. то от Теорема 9.2 следват хармоничните групи: $H(AB, PP_1), H(CD, PP_2)$. Сега основавайки се на Теорема 24.3 заключаваме, че точките P, P_1 , както и P, P_2 са спрегнати относно $C(k)$. Но тогава правата $P_1P_2 = QR$ е поляра на точка P относно C , т.е. $\kappa(P) = QR$.

Аналогично се доказва и $\kappa(Q, R) = RP, PQ$.

Упражнение № 11

Задача 24.1 Докажете, че полярата на всяка външна точка за конично сечение C съединява допирните точки на допирателните прави към C през тази точка.

Формулирайте дуалното твърдение.

Решение Нека точка G е външна за коничното сечение $C(\kappa)$, породено от полярността κ (Фигура 24.1). Да означим с a и b допирателните прави през G към C , а допирните им точки да означим съответно с A и B . Тъй като точките A и B принадлежат на $C(\kappa)$, то те са особени точки за полярността κ и са инцидентни със своите поляри съответно $a = \kappa(A)$ и $b = \kappa(B)$. От Определение 22.1, Теорема 22.1 и Определение 24.1 следва, че точките G и A , както G и B са спрегнати относно $C(\kappa)$, което означава, че полярата на G е правата $g = AB$.

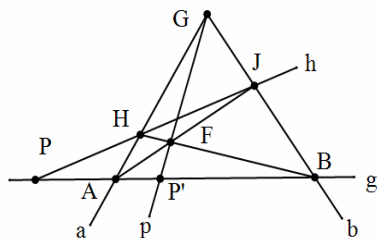
Дуално твърдение: Полюсът на всяка секуща на коничното сечение C е пресечната точка на допирателните прави към C през пресечните точки на секущата с C .

Задача 24.2 Нека G и g са полюс и поляра относно коничното сечение C като g пресича C в точките A и B . Ако $P \in g$ е произволна точка, намерете полярата p на P относно коничното сечение C . Разгледайте случаите, когато:

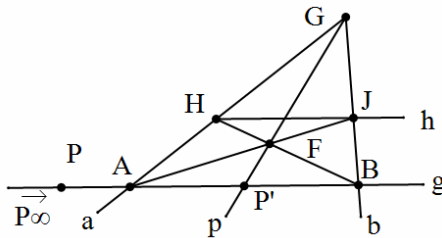
- точката $P \in g$ е крайна;
- точката $P \in g$ е безкрайната точка на секущата g .

Решение От условието, че G и g са полюс и поляра, а $P \in g$, веднага следва, че правата p ще мине през точката G . Остава да се намери още една точка P' от търсената поляра p на точката P . За целта ще използваме Теорема 24.3, съгласно която имаме следната хармонична група $H(AB, PP')$

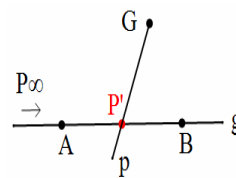
а) За намирането на точка P' следваме Основната задача от §8, като тук ще използваме правите $a = GA$ и $b = GB$, които съгласно Задача 24.1 са допирателните към C в точките A и B (Фигура 24.3). Ако h е произволна права през P и $h \cap a = H$, $h \cap b = J$, то допълваме $\triangle GHJ$ до пълния четириъгълник $GHJF$, така че A и B да са диагонални точки. Тогава $P' = GF \cap g$, а, $p = GP'$.



Фигура 24.3



Фигура 24.4



Фигура 24.5

б) Задаваме на Фигура 24.3 (динамичния чертеж в Библиотеката) безкрайната точка P_∞ на секущата g и извършваме размяната на точките P и P_∞ . Сам със своята специална функция РКБТ, която избрахме чрез менюто „Подбрано“, ни представя Фигура 24.4, където правата h вече е успоредна на g .

Тъй като сега хармоничната група е $H(AB, P_\infty P)$, то съгласно Теорема 19.4 точка P' е среда на отсечката AB . Тя би могла да се намери и директно чрез инструмента „скаларна точка“ (Фигура 24.5).

25 Определяне на крива от втора степен с помощта на точки или точки и прави

Теорема 25.1 *Съществува точно една крива от втора степен, която минава през пет дадени точки, никои три от които не са колинеарни.*

Доказателство: Съществуване. Нека дадените точки отбележим с A, B, C, D, E (Фигура 25.1). Построяваме точките $P = AB \cap CD, S = AB \cap DE$ и точките K, L, M, N , определени чрез следните хармонични групи:

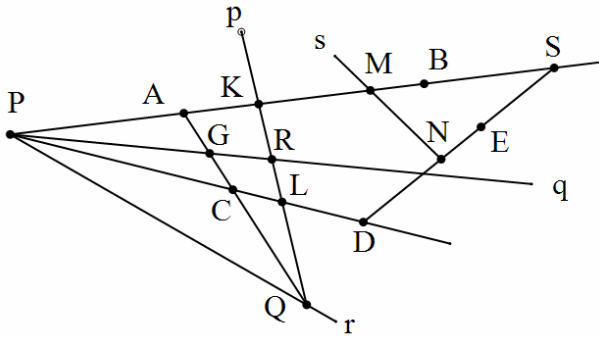
$K : H(AB, PK), L : H(CD, PL), M : H(AB, SM), N : H(DE, SN)$. Да построим още правите $p = KL$ и $s = MN$, точка $Q = AC \cap p$ и точка $G : H(AC, QG)$. Нека $q = PG, R = p \cap q, r = PQ$. Да зададем корелацията κ , при която $\kappa(PQRS) = pqrs$. Тъй като триъгълникът PQR е автополярен за κ , то съгласно Теорема 21.4 κ е полярност.

Да означим с $k(\kappa)$ кривата от втора степен, породена от κ . Ще покажем, че $k(\kappa)$ минава през дадените точки.

Ако с ψ означим инволюцията на спрегнатите точки върху правата AB , породена от κ (виж Теорема 22.7), то имаме $\psi(P) = K, \psi(S) = M$.

Да означим с ϕ хиперболичната инволюция върху правата AB с двойни точки A и B . Тогава от $H(AB, PK)$ и $H(AB, SM)$ следва, че $\phi(P) = K$ и $\phi(S) = M$.

И така получихме, че инволюциите ψ и ϕ имат две общи двойки спрегнати точки. Съгласно Теорема 15.3 инволюциите ψ и ϕ съвпадат. Тогава A и B са двойни точки и за инволюцията ψ , от където следва, че те са особени точки за полярността κ и значи $A, B \in k(\kappa)$.



Фигура 25.1

От хармоничните свойства на спрегнатите точки и

$$A \in k(\kappa), \kappa(Q) = q, H(AC, QG) \Rightarrow C \in k(\kappa);$$

$$C \in k(\kappa), \kappa(P) = p, H(CD, PL) \Rightarrow D \in k(\kappa);$$

$$D \in k(\kappa), \kappa(S) = s, H(DE, SN) \Rightarrow E \in k(\kappa).$$

Единственост. Да допуснем, че съществува втора крива от втора степен k^* , породена от полярността κ^* , която минава през точките A, B, C, D, E . От хармоничните свойства на спрегнатите точки и

$B \in k(\kappa)$, $\kappa(Q) = q$, $H(BC, QS) \Rightarrow C \in k(\kappa)$.

Единственост. Единствеността на кривата от втора степен k се установява както в Теорема 25.1. Предоставяме на читателя сам да проведе доказателството.

Кривата от втора степен, минаваща през точките A, B, C и допираща се до правите a и b съответно в точките A и B ще бележим накратко $k(A \in a, B \in b, C)$ или $k(Aza, Bzb, C)$.

Теорема 25.4 (дуална на теорема 25.1) *Съществува точно една крива от втори клас, съдържаща пет дадени прави, никои три от които не минават през една точка.*

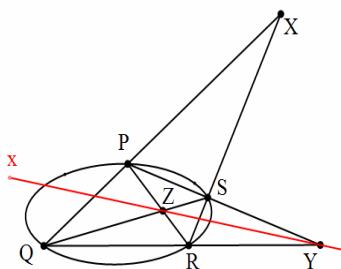
Теорема 25.5 (дуална на теорема 25.2) *Съществува точно една крива от втори клас, съдържаща четири дадени прави, никои три от които не минават през една точка и допираща се до една от тях в дадена нейна точка.*

Теорема 25.6 (дуална на теорема 25.3) *Съществува точно една крива от втори клас, съдържаща три дадени прави, които не минават през една точка и допираща се до две от тях съответно в две дадени техни точки.*

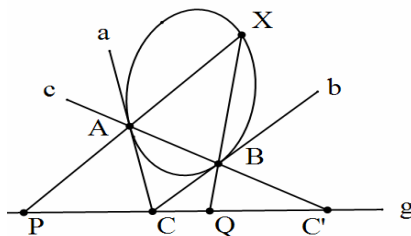
26 Теорема на Щаут и Щайнер

Теорема 26.1 (Теорема на Щаут.) *Всяка права, спрегната с една от страните на триъгълник, вписан в дадено конично сечение C , пресича другите му две страни в спрегнати точки относно C .*

Доказателство: Нека триъгълникът PQR е вписан в коничното сечение C (Фигура 26.1). За да изберем произволна права x , спрегната със страна на триъгълника, достатъчно е да изберем полюсът ѝ да лежи върху тази страна.



Фигура 26.1



Фигура 26.2

Нека $X \in PQ$ е произволна точка. Съгласно разглежданията в §24 построяването на полярата x на точка X относно C се извършва в следния ред: $XR \cap C = S$, $PS \cap QR = Y$, $PR \cap QS = Z$, $x = YZ$. Тъй като триъгълникът XYZ е диагонален за пълния четириъгълник $PQRS$, вписан в C , то съгласно Теорема 24.5 точките $Y = x \cap QR$ и $Z = x \cap PR$ са спрегнати относно C .

Теорема 26.2 (Дуална на теорема 26.1.) *Съединителните прави на всяка точка, спрегната с връх на триъгълник, описан около дадено конично сечение C , с другите му два върха са спрегнати прави относно C .*

Теорема 26.3 (Теорема на Щайнер.) *От две различни точки върху една крива от втора степен, точките ѝ се проектират в два проективни снопа прави.*

Доказателство: Нека A и B са две различни фиксирани точки върху кривата от

втора степен k , а правите a и b са съответно техните допирателни към k (Фигура 26.2).

Нека $a \cap b = C$, а g е произволна права през точка C . Очевидно, ако κ е полярността, която поражда k , то $\kappa(C) = AB$, а g и AB са спрегнати прави относно κ .

Нека $X \in k$ е произволна точка и $AX \cap g = P, BX \cap g = Q, AB \cap g = C'$. Съгласно Теоремата на Щаут P и Q са спрегнати точки в инволюцията ψ , индуцирана върху g от κ (виж Теорема 22.7.) Нека сега точка X се движи по k . Тогава между двата снопа прави $S(A)$ и $S(B)$ се установява съответствие σ , което има следното представяне $\sigma = \pi_2 \circ \psi \circ \pi_1$, където

$$S(A) \underset{\pi_1}{\wedge} g \underset{\psi}{\wedge} g \underset{\pi_2}{\wedge} S(B).$$

Наистина, $\sigma(AX) = \pi_2 \circ \psi \circ \pi_1(AX) = \pi_2 \circ \psi(P) = \pi_2(Q) = BX$.

В частност, когато $X = A$, т.е. $AX = a$, имаме

$$\sigma(a) = \pi_2 \circ \psi \circ \pi_1(a) = \pi_2 \circ \psi(C) = \pi_2(C') = BC' = BA,$$

а когато $X = B$, т.е. $AX = AB$ имаме $\sigma(AB) = \pi_2 \circ \psi \circ \pi_1(AB) = \pi_2 \circ \psi(C') = \pi_2(C) = BC = b$.

Теорема 26.4 (дуална на Теорема 26.3) *Две произволни прави от една крива от втори клас пресичат правите ѝ в два проективни снопа прави.*

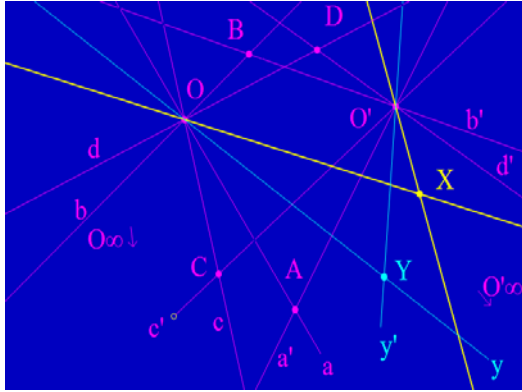
С теоремата на Щайнер и нейната дуална показахме, че всяко конично сечение, дефинирано по Щаут, съвпада с коничното сечение, дефинирано по Щайнер.

Теорема 26.5 (Обратна теорема на теоремата на Щайнер или построение на Щайнер) *Ако σ е неперспективна проективност на снопа прави $S(A)$ върху снопа прави $S(B)$, то множеството от пресечните точки на двойките съответни прави за σ е крива от втора степен, която минава през точките A и B .*

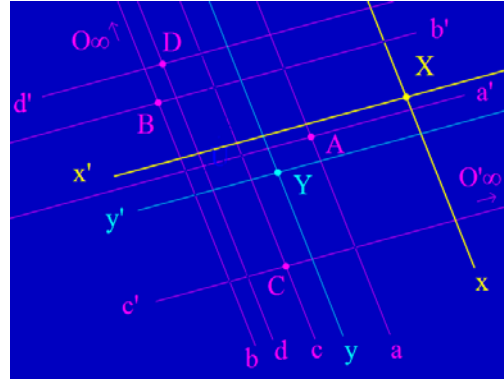
Доказателство: Тъй като проективността σ е различна от перспективност, то съществуват прави $a \in S(A)$ и $b \in S(B)$, така че $\sigma(a) = BA$, $\sigma(AB) = b$. Нека $x \in S(A)$ е произволна права и ако $\sigma(x) = x'$, нека $x \cap x' = X$ (Фигура 26.2). Съгласно Теорема 25.3 съществува точно една крива от втора степен $k(A \in a, B \in b, X)$. От Теоремата на Щайнер следва, че k индуцира проективността σ' на $S(A)$ върху $S(B)$, при която $\sigma'(a, x, AB) = BA, x', b$. Прилагайки Теорема 12.6, намираме $\sigma = \sigma'$, т.е. множеството на пресечните точки на двойките съответни прави при σ съвпада с кривата от втора степен k .

Проективността σ се нарича проективност на Щайнер или произвеждаща за кривата от втора степен k и бележим $k(A, B; \sigma)$.

Нека допълним динамичния чертеж 13.3 с пресечните точки A, B, C, D, X, Y съответно на двойките съответни прави $\varphi(a, b, c, d, x, y) = a', b', c', d', x', y'$, където φ е проективността на снопа прави с център O върху снопа прави с център O' (Фигура 26.3 а)). Следователно точките A, B, C, D, X, Y принадлежат на кривата от втора степен $k(O, O'; \varphi)$. Когато правата x (или y) описва снопа $S(O)$ (или $S(O')$), то точката X (или Y) ще описва $k(O, O'; \varphi)$, минавайки и през центровете O и O' . Ето защо, когато те са безкрайни точки, както е



Фигура 26.3 а)

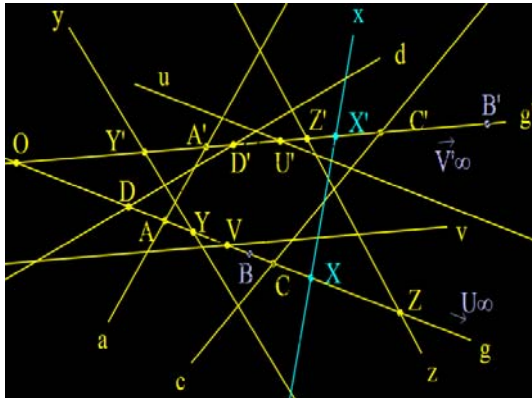


Фигура 26.3 б)

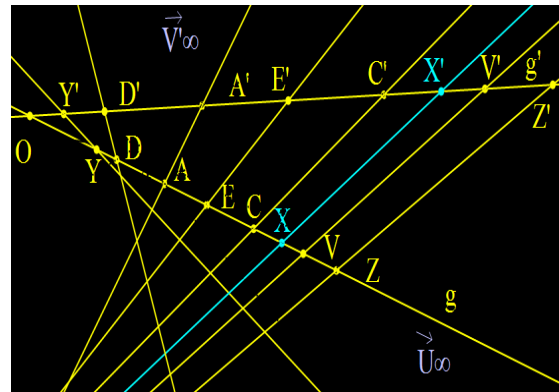
на Фигура 26.3 б), кривата $k(O_\infty, O'_\infty; \varphi)$ ще има винаги две безкрайни точки. При смяна на синия фон с бял ще се появят всички използвани точки и прави и ще могат да се проследят стъпка по стъпка всички построения.

Теорема 26.6 (дуална на теорема 26.5) Ако φ е неперспективна проективност на реда точки $S(a)$ върху реда точки $S(b)$, то множеството от съединителните прави на двойките съответни точки за φ е крива от втори клас, която съдържа правите a и b .

Нека допълним динамичния чертеж 13.1 със съединителните прави a, c, d, u, v, x, y, z съответно на двойките съответни точки $\varphi(A, C, D, U_\infty, V, X, Y, Z) = A', C', D', U', V'_\infty, X', Y', Z'$, където φ е проективността на реда точки g върху реда точки g' (Фигура 26.4 а)). Следователно правите a, c, d, u, v, x, y, z принадлежат на кривата от втори клас $K(g, g'; \varphi)$. Когато точката X (или Y') описва реда точки g (или g'), то правата x (или y) ще описва $K(g, g'; \varphi)$. Фигура 26.4 б) е получена по аналогичен начин от динамичния чертеж 13.1, където



Фигура 26.4 а)



Фигура 26.4 б)

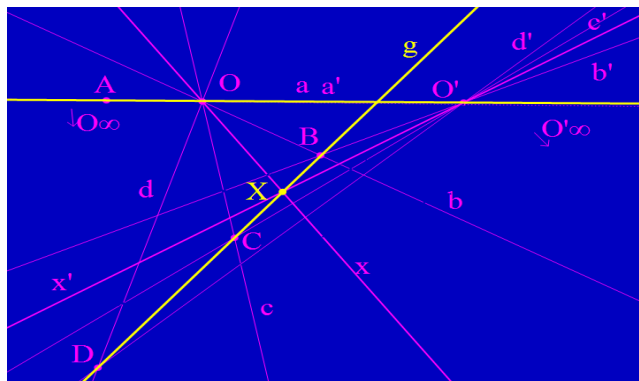
φ е подобност, поради което безкрайната права $\omega = U_\infty V_\infty$ принадлежи на кривата от втори клас $K(g, g'; \varphi)$.

С последните две теореми доказахме и че всяко конично сечение, дефинирано по Щайнер, съвпада с коничното сечение, дефинирано по Щаут.

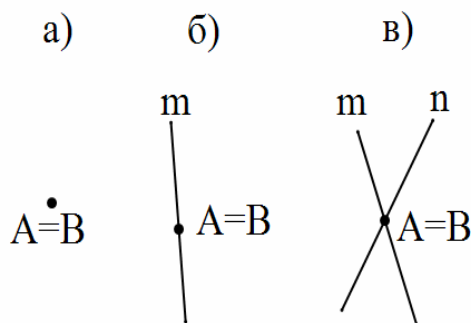
Тъй като установихме еквивалентност на определенията на конично сечение по Щаут и Щайнер, то по-нататък можем да се позоваваме и на двете определения.

Използвайки определението на Щайнер, ще разширим класа на разглежданите конични сечения. Всеки път, когато не е спазено едно от условията в дефиницията на Щайнер, ще казваме, че съответното **конично сечение е изродено**.

1). Ако $S(O)$ и $S(O')$ са два снопа прави с различни центрове, а φ е перспективност с ос g , то всички точки от перспективната ос g и от правата OO' и само те принадлежат на изродената крива от втора степен $k(O, O'; \varphi)$. Визуализацията на тази изродена крива



Фигура 26.5



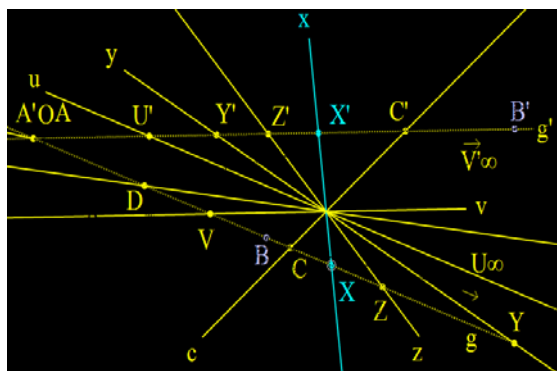
Фигура 26.6

от втора степен се постига когато общата права на двата снопа прави стане двойна за φ (виж Теорема 12.8). За целта е достатъчно да завъртим правата a докато мине през точката O' , а после да завъртим правата a' докато мине през точката O (Фигура 26.5). Така постигаме правата $OO' = a = a'$ да стане двойна за φ и наблюдаваме как точката X пробягва правата g , инцидентна с B, C, D както и правата OO' .

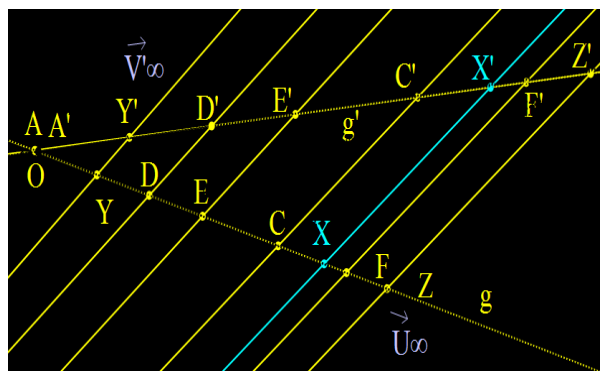
2). Ако $S(A)$ и $S(B)$ са два снопа прави със съвпадащи центрове, а σ е проективност, различна от идентитета, то σ има 0, 1 или 2 двойни прави и тогава изродената крива от втора степен $k(A, B; \sigma)$ се състои съответно от точка $A = B$ (Фигура 26.6 а)), всички точки на единствената двойна права за σ и само те (Фигура 26.6 б)) или от всички точки на двете двойни прави за σ и само те (Фигура 26.6 в)).

По аналогичен начин се описват изродените криви от втори клас.

1). Ако g и g' са два реда точки с различни носители, а φ е перспективност с център U , то всички прави през перспективния център U и през точката O и само те принадлежат на изродената крива от втора клас $K(O, O'; \varphi)$. Визуализацията на тази изродена крива от втора степен се постига когато общата точка на двата реда точки стане двойна за φ (виж Теорема 12.7). За целта е достатъчно чрез движение на A върху g и на A' върху g' да постигнем съвпадане на точките O, A, A' . (Фигура 26.7). Така постигаме точката $O = g \cap g'$ да стане двойна за φ и наблюдаваме как, когато точката X пробягва правата g , правата x описва снопа прави с център U . Фигура 26.7 а) е получена от Фигура 26.4 а), а Фигура 26.7 б) е получена от Фигура 26.4 б) и съответства на случая, когато φ е подобност. Тъй като сега безкрайната права, съединявайки двете съответстващи си безкрайни точки, принадлежи на снопа с център U , то U е безкрайна точка и правите от изродената крива от втори клас са успоредни.



Фигура 26.7 а)



Фигура 26.7 б)

27 Теорема на Паскал и Брианшон

Блез Паскал е роден през 1623 г. в Клермон Феран и починал през 1662 г. в Париж. Баща му Етиен Паскал бил административен чиновник, математически добре образован: неговото име носи известната крива, наречена охлюв на Паскал. Блез Паскал първоначално е обучаван от баща си, а по-късно се самообразова. През 1641 г. той построява първата сметачна машина. Паскал и Ферма се считат за създатели на теория на вероятностите. Паскал се занимава и с теория на интегрирането и постига съществени резултати както в хидростатиката така и в продължаването на опитите на Торичели. След 1641 г. Блез Паскал се присъединява към сектата на янсенистите и неговият по-нататъшен живот се определя в по-голяма степен от фанатична религиозна вяра. В своите философски съчинения той се колебае между рационализма и скептицизма.

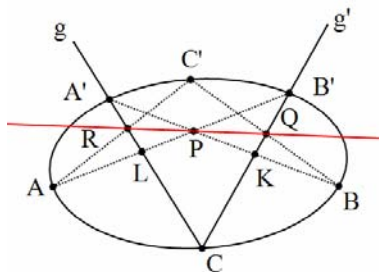
На 16 годишна възраст Блез Паскал е написал обширен трактат върху коничните сечения, който за нещастие е загубен. Лайбниц е видял този трактат и разказвал, че в него е включена теоремата за мистичния шестоъгълник. Не е известно как Паскал е доказал тази теорема и до сега са намерени много различни нейни доказателства.

Теорема 27.1 (Теорема на Паскал). Шестоъгълникът $AB'CA'BC'$ е вписан в коничното сечение C тогава и само тогава, когато точките

$$P = AB' \cap A'B, Q = B'C \cap BC', R = CA' \cap C'A \text{ са колинеарни.}$$

Доказателство: Тъй като коничното сечение се определя с пет точки, нека да разгледаме коничното сечение $C(A, B', C, A', B)$ и да приведем формулировката на теоремата на Паскал в следния вид:

$$\text{Точка } C' \in C(A, B', C, A', B) \Leftrightarrow P, Q, R \text{ са колинеарни точки.}$$



Фигура 27.1

Да означим $CA' = g, CB' = g'$ (Фигура 27.1). Проективността $\sigma: S(A) \rightarrow S(B)$, при която $\sigma(AB', AC', AA') = BB', BC', BA'$ е проективност на Щайнер за C . Да разгледаме проективността φ , която се индуцира между g и g' по следната схема

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{\sigma} & S(B) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ g & \xrightarrow{\varphi} & g' \end{array}$$

където π_1 и π_2 са перспективности. Ако $L = CA' \cap AB', K = CB' \cap BA'$, то от

$$\begin{aligned} \varphi(C, A', L) &= \pi_2 \circ \sigma \circ \pi_1^{-1}(C, A', L) = \pi_2 \circ \sigma(AC, AA', AL) \\ &= \pi_2(BC, BA', BB') = C, K, B' \end{aligned}$$

и Теорема 12.7 следва, че φ е централна перспективност с център

$$A'K \cap LB' = A'B \cap AB' = P, \text{ т.е. можем да запишем } g \underset{\varphi}{\overset{P}{\wedge}} g'.$$

1. Нека $C' \in C$. Следователно $\sigma(AC') = BC'$.

Тогава $\varphi(R) = \pi_2 \circ \sigma \circ \pi_1^{-1}(R) = \pi_2 \circ \sigma(AR = AC') = \pi_2(BC') = BC' \cap g' = BC' \cap CB' = Q$, което означава, че правата RQ минава през точка P .

2. Нека точките P, Q, R са колинеарни. Следователно $\varphi(R) = Q$.

Тогава $\sigma(AC' = AR) = \pi_2^{-1} \circ \varphi \circ \pi_1(AC') = \pi_2^{-1} \circ \varphi(R) = \pi_2^{-1}(Q) = BQ = BC'$, което означава, че точката $AC' \cap BC' = C'$ принадлежи на коничното сечение C .

Правата, определена от точките P, Q, R се нарича **права на Паскал** за шестоъгълника $AB'CA'BC'$, вписан в коничното сечение C .

Сигурно читателят забелязва голямото сходство между Теоремата на Паскал и Теоремата на Пап (Теорема 13.1).

Теоремата на Пап може да се разглежда като Теорема на Паскал, приложена в случая, когато кривата от втора степен е изродена и се разпада на две различни прави.

Теорема 27.2 (Теорема на Брианшон). Шестостранникът $ab'sa'bc'$ е описан около коничното сечение C тогава и само тогава, когато правите

$p = (ab')(a'b), q = (b'c)(bc'), r = (ca')(c'a)$ минават през една точка.

Точката, през която минават правите p, q, r се нарича **точка на Брианшон** за шестостранника $ab'sa'bc'$, описан около коничното сечение C .

Шарл Брианшон (1783–1864) е работил като военен във френската армия и като професор в Артилерийското училище в Париж. Занимавал се е главно с геометрични проблеми като напр. криви от висока степен. 170 години след Паскал му се отдава да докаже теорема, дуална на неговата. Много скоро след това е открит дуалният принцип.

Частни случаи от теоремата на Паскал.

Теоремите на Паскал и Брианшон са в сила и в частните случаи, когато точка от коничното

сечение се замени с допирателна или обратно. За приложението им е важен следният факт:
Ако точка A принадлежи на коничното сечение κ , то под съединителна права на точка A със себе си разбираме допирателната към κ в точка A .

Ако правата α е допирателна към коничното сечение κ , то под пресечна точка на α със себе си разбираме допирната точка на α с κ .

Във връзка с по-голямата яснота и простота при изказване на частните случаи, ще префразираме теоремата на Паскал във вид, в който тя се среща много често в литературата:

Шестте точки A, B', C, A', B, C' , никои три от които не са колинеарни, принадлежат на едно конично сечение $\mathcal{C}$ тогава и само тогава, когато точките $P = AB' \cap A'B, Q = B'C \cap BC', R = CA' \cap C'A$ са колинеарни.

Да заменим условието $C' \in \mathcal{C}$ с условието $\mathcal{C}$ се допира до правата $a \ni A$, т.е. изискваме $C' = A$. Тогава в сила е следната теорема:

Теорема 27.3 *Петте точки $A, B', C, A', B, C' = A$ (или A, B', C, A', B, A), никои три от които не са колинеарни, принадлежат на едно конично сечение $\mathcal{C}$, което се допира до правата $a \ni A$ тогава и само тогава, когато точките*

$P = AB' \cap A'B, Q = B'C \cap BA, R = CA' \cap a$ са колинеарни.

Верни теореми се получават и когато към условието $C' = A$ прибавим още $B' = C$ или $B' = C$ и $A' = B$.

Теорема 27.4 *Четири точки $A, B' = C, C, A', B, C' = A$ (или A, C, C, A', B, A), никои три от които не са колинеарни, принадлежат на едно конично сечение $\mathcal{C}$, което се допира до правите $a \ni A$ и $c \ni C$ тогава и само тогава, когато точките*

$P = AC \cap A'B, Q = c \cap BA, R = CA' \cap a$ са колинеарни.

Теорема 27.5 *Трите точки $A, B' = C, C, A' = B, C' = A$ (или A, C, C, B, B, A), които не са колинеарни, принадлежат на едно конично сечение $\mathcal{C}$, което се допира до правите $a \ni A$, $c \ni C$ и $b \ni B$ тогава и само тогава, когато точките $P = AC \cap b, Q = c \cap BA, R = CB \cap a$ са колинеарни.*

Доказателството на тези теореми се провежда аналогично на доказателството на Теоремата на Паскал.

Теорема 27.6 (дуална на Теорема 27.3) *Петте прави $a, b', c, a', b, c' = a$ (или a, b', c, a', b, a), никои три от които не минават през една точка, принадлежат на едно конично сечение $\mathcal{C}$, което се допира в точката $A \in a$ тогава и само тогава, когато правите $p = (ab')(a'b), q = (b'c)(ba), r = (ca')A$ минават през една точка.*

Теорема 27.7 (дуална на Теорема 27.4) *Четири прави $a, b' = c, c, a', b, c' = a$ (или a, c, c, a', b, a), никои три от които не минават през една точка, принадлежат на едно конично сечение $\mathcal{C}$, което се допира в точките $A \in a$ и $C \in c$ тогава и само тогава, когато правите $p = (ac)(a'b), q = C(ba), r = (ca')A$ минават през една точка.*

Теорема 27.8 (дуална на Теорема 27.5) *Трите прави $a, b' = c, c, a' = b, b, c' = a$ (или a, c, c, b, b, a), които не минават през една точка, принадлежат на едно конично сечение $\mathcal{C}$, което се допира в точките $A \in a$, $C \in c$ и $B \in b$ тогава и само тогава, когато правите $p = (ac)B, q = C(ba), r = (cb)A$ минават през една точка.*

Упражнение № 12

Задача 27.1 Нека $\triangle ABC$ е вписан в конично сечение C и с a, b, c да означим допирателните прави към C съответно в точките A, B, C . Ако въведем и точките

$A' = b \cap c, B' = c \cap a, C' = a \cap b$, да се докаже :

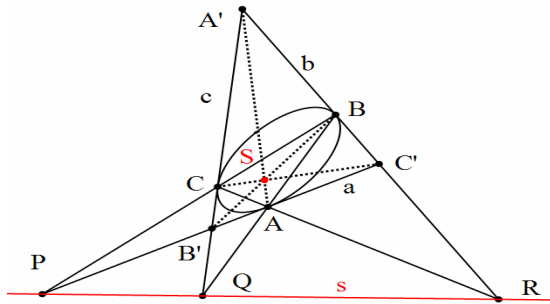
1) пресечните точки на страните на $\triangle ABC$ с допирателните прави към k в срещуположния връх на триъгълника лежат на една права s ;

2) правите AA', BB', CC' минават през една точка S ;

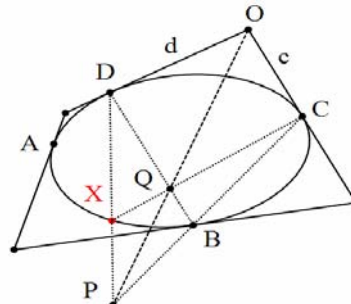
3) точка S и права s са полюс и поляра относно k .

Решение (Фигура 27.2) 1) Съгласно Теоремата на Паскал, приложена за точките $AABBCC$, намираме:

Точките $AA \cap BC = a \cap BC = P, AB \cap CC = AB \cap c = Q, BB \cap CA = b \cap CA = R$ са колинеарни.



Фигура 27.2



Фигура 27.3

2) Съгласно Теоремата на Брианшон, приложена за правите $aabbcc$, намираме:

Правите $p = (aa)(bc) = AA', q = (ab)(cc) = C'C, r = (bca')(c'a) = BB'$ са конкурантни.

3) Да означим с κ полярността, която поражда конично сечение C . Тогава, отчитайки Задача 24.1 имаме $\kappa(AA') = \kappa(A) \cap \kappa(A') = a \cap BC = P$; $\kappa(BB') = \kappa(B) \cap \kappa(B') = b \cap AC = R$.

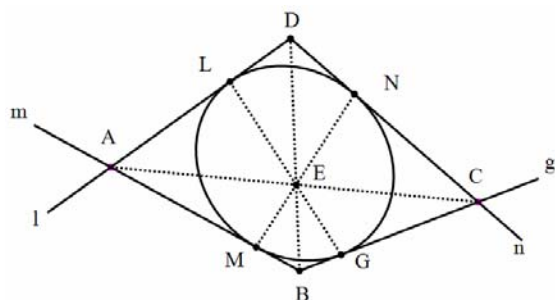
На края тъй като $S = AA' \cap BB'$, то $\kappa(S) = \kappa(AA') \cap \kappa(BB') = PR = s$.

Задача 27.2 Нека четириъгълникът $abcd$, описан около коничното сечение C има допирни точки съответно A, B, C, D , а X е произволна точка върху C . Да се докаже, че точките $P = BC \cap DX, Q = BD \cap CX$ и $O = c \cap d$ са колинеарни.

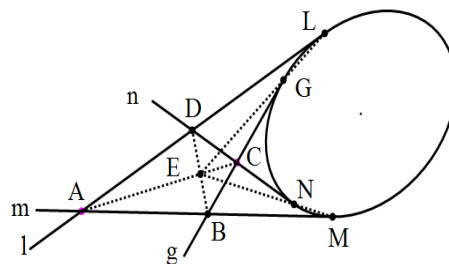
Упътване (Фигура 27.3) Приложете Теоремата на Паскал за точките $CCBDDX$. Експериментирайте върху динамичния чертеж 27.3 като движете точка X по кривата.

Задача 27.3 Нека $ABCD$ е четириъгълник, описан около коничното сечение C . Да се докаже, че правите AC, BD и правите, съединяващи допирните точки на срещуположните му страни с C , се пресичат в една точка.

Решение От проективна гледна точка Фигура 27.4 а) и Фигура 27.4 б) не са различни. Доказателството протича в два етапа, защото се касае за конкурантност на четири прави, а инструментът е Теоремата на Брианшон, посредством която се доказва конкурантност на три прави.



Фигура 27.4 а)



Фигура 27.4 б)

i) Четиристранникът $mlng$ е описан за C като правите m и n се допират до C съответно в точките M и N тогава и само тогава, когато правите MN, AC, BD минават през една точка.

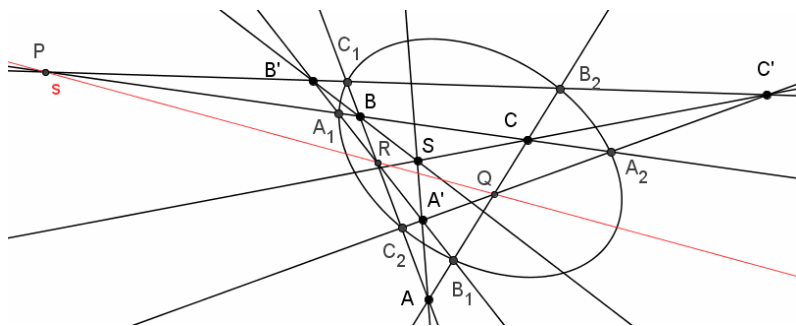
Достатъчно е да приложим Теоремата на Брианшон за правите $mmlnng$. Следва, че правите $(mm)(nn) = MN, (ml)(ng) = AC, (ln)(gn) = DB$ се пресичат в една точка, т.е. $MN \cap AC \cap BD = E$

ii) Четиристранникът $mlng$ е описан за C , като правите g и l се допират до C съответно в точките L и G тогава и само тогава, когато правите LG, AC, BD минават през една точка. Достатъчно е да приложим Теоремата на Брианшон за правите $llmggn$. Следва, че правите $(ll)(gg) = LG, (lm)(gn) = AC, (mg)(nl) = BD$ се пресичат в една точка, т.е. $LG \cap AC \cap BD = E' = E$.

Следователно $LG \cap MN \cap AC \cap BD = E$.

Задача 27.4 Ако два триъгълника са перспективни, то шестте пресечни точки на несъответните им страни лежат върху едно конично сечение.

Решение (Фигура 27.5) Да означим перспективните триъгълници с ABC и $A'B'C'$. Върху тяхната перспективна ос s лежат точките $P = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', R = AB \cap A'B'$



Фигура 27.5

Да въведем точките: $A_1 = BC \cap A'B', A_2 = BC \cap A'C', B_1 = AC \cap A'B', B_2 = AC \cap A'C', C_2 = AB \cap A'C', C_1 = AB \cap A'B'$ и да разгледаме шестоъгълника $A_1 B_1 B_2 C_2 C_1 A_2$.

Тъй като точките $A_1 B_1 \cap C_2 C_1 = A'B' \cap AB = R, B_1 B_2 \cap C_1 A_2 = AC \cap A'C' = Q, B_2 C_2 \cap A_2 A_1 = B'C' \cap BC = P$ лежат върху перспективната ос s , то съгласно Теоремата на Паскал шестоъгълникът $A_1 B_1 B_2 C_2 C_1 A_2$ е вписан в конично сечение.

Задача 27.5 Шестоъгълникът $ABCDEF$ е вписан в коничното сечение C , а правите a, b, c, d, e, f са допирателни към C във върховете му. Да се докаже, че правата на Паскал за шестоъгълника $ABCDEF$ и точката на Брианшон за шестостранника $abcdef$ са полюс и поляра относно C .

Интересно е да отбележим, че ако шест точки принадлежат на едно конично сечение, с тях се свързват 60 прави на Паскал, в зависимост от това как сме пренаредили точките. Като прибавим и вписаните петогълници, четиригълници и тригълници с допълващите ги допирателни до шест обекта, принадлежащи на коничното сечение, се очертава огромен обем от задачи. Проективният подход за решаване на тези задачи чрез Теоремата на Паскал ги обединява в един тип задачи, решими кратко и универсално. Аналогично стои въпросът с описаните многогълници и Теоремата на Брианшон.

Задачите 27.1 1), 2), 27.2, 27.3 са в сила за произволно конично сечение, следователно и за окръжност. След извършване на тази замяна в условието им те могат да се предложат и на учениците в средното училище.

За четиригълника $ABCD$ от Задача 27.3 съществуват две възможности: да бъде описан около окръжността (Фигура 27.4 а)) или да бъде външно описан за окръжността (Фигура 27.4 б)). Доказателствата чрез средствата на елементарната геометрия и за двата случая са твърде пространни и различни, докато проективният подход предлага кратко и общо решение.

28 Проективни свойства на коничните сечения

Определение 28.1 *Проективно свойство на геометричната фигура F , се нарича всяко нейно свойство, което се запазва при произволна колинеация.*

Теорема 28.1 *Свойството на една фигура да бъде конично сечение е проективно.*

Доказателство: Нека $k(\kappa)$ е крива от втора степен, породена от полярността κ , а Φ е произволна колинеация.

Да разгледаме корелацията $\kappa' = \Phi \circ \kappa \circ \Phi^{-1}$.

Понеже $\kappa'^2 = \Phi \circ \kappa \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \kappa \circ \Phi^{-1} = \Phi \circ \kappa^2 \circ \Phi^{-1} = \Phi \circ \Phi^{-1} = id$, то κ' е полярност. Да означим с k' кривата от втора степен, породена от полярността κ' .

Ще докажем, че ако $\Phi(k) = F'$, то F' съвпада с $k'(\kappa')$.

1. Нека $A' \in F'$ е произволна точка, т.е. $\Phi^{-1}(A') = A, A \in k(\kappa)$. Това означава, че A е особена точка за κ . Тогава правата $a = \kappa(A)$ е допирателна на k в точка A . Нека $\Phi(a) = a'$. От $A \in a$ и трето свойство на колинеацията следва $A' \in a'$. Освен това $\kappa'(A') = \Phi \circ \kappa \circ \Phi^{-1}(A') = \Phi \circ \kappa(A) = \Phi(a) = a'$. С това доказахме, че A' е особена точка за κ' и следователно $A' \in k'$.

Забележка. От заключението, че A' е особена точка за κ' следва, че и полярата ѝ е особена права за κ' или колинеацията изобразява допирателна права към k в допирателна права към k' .

2. Нека $B' \in k'$, т.е. $\kappa'(B') = b'$ и $B' \in b'$. Ако $\Phi^{-1}(B') = B$ и $\Phi^{-1}(b') = b$, то от трето свойство на колинеацията следва $B \in b$. Тъй като още $\kappa(B) = \Phi^{-1} \circ \kappa' \circ \Phi(B) = \Phi^{-1} \circ \kappa'(B') = \Phi^{-1}(b') = b$, то $B \in k$. Тогава от $\Phi(B) = B'$ следва $B' \in F'$.

Така доказахме:

Свойството на едно множество от точки да бъде крива от втора степен е проективно.

Дуалното му твърдение гласи:

Свойството на едно множество от прави да бъде крива от втора клас е проективно.

От последните две твърдения и Определение 23.5 следва верността на теоремата.

От забележката в хода на доказателството на горната теорема следва верността на следната теорема:

Теорема 28.2 *Свойството на една права да е допирателна към крива от втора степен е проективно.*

Теорема 28.3 *Свойството на една права да е секателна или несекателна за едно конично сечение е проективно.*

Доказателство: Нека g е секателна права за коничното сечение k и да означим $k \cap g = \{M, N\}$. Нека Φ е колинеация и $\Phi(k) = k', \Phi(g) = g'$. От трето свойство на колинеацията и Теорема 28.1 следва, че ако $\Phi(M) = M'$ и $\Phi(N) = N'$, то точките $M', N' \in k' \cap g'$, т.е. g' е секателна за k' .

Сега нека g е несекателна права за коничното сечение. За правата g' съществуват три възможности: допирателна, секателна или несекателна за k' . Да допуснем, че g' е допирателна или секателна. Тъй като Φ^{-1} също е колинеация, то съгласно Теорема 28.2 и първата част на настоящата теорема следва, че и правата g е съответно допирателна или секателна за коничното сечение k . Това противоречи на условието, че g е несекателна права за k , с което се изключват възможностите g' да е допирателна или секателна. Остава третата възможност – g' е несекателна за k' .

Теорема 28.4 *Свойството на точка и права да са полюс и поляра относно конично сечение е проективно.*

Доказателство: Нека точка P и права p са полюс и поляра относно коничното сечение k , т.е. $\kappa(P) = p$. Нека Φ е колинеация и $\Phi(k) = k'$, $\Phi(P) = P'$, $\Phi(p) = p'$. Изображението $\kappa' = \Phi \circ \kappa \circ \Phi^{-1}$ е полярност, пораждаща коничното сечение k' (виж Теорема 28.1). От $\kappa'(P') = \Phi \circ \kappa \circ \Phi^{-1}(P') = \Phi \circ \kappa(P) = \Phi(p) = p'$ следва, че точка P' и права p' са полюс и поляра относно коничното сечение $k'(\kappa')$.

Теорема 28.5 *Свойството на две точки да са спрегнати относно конично сечение е проективно.*

Доказателство: Нека A и B са спрегнати точки относно коничното сечение $C(\kappa)$, т.е. ако $\kappa(A) = a$ и $\kappa(B) = b$, то $A \in b$ и $B \in a$. Нека Φ е произволна колинеация и $\Phi(C(\kappa), A, B, a, b) = C'(\kappa'), A', B', a', b'$. От Теорема 28.4 следва, че A' и a' , както B' и b' са двойки полюс и поляра относно C' , а от трето свойство на колинеациите следва, че инцидентността ще се запази – или $A' \in b'$ и $B' \in a'$. А всичко това означава, че точките A' и B' са спрегнати точки относно коничното сечение $C'(\kappa')$.

Теорема 28.6 (Дуална на Теорема 28.5) *Свойството на две прави да са спрегнати относно конично сечение е проективно.*

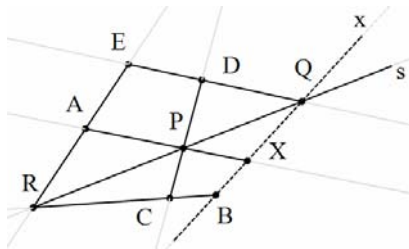
Упражнение № 13

Теоремата на Паскал се прилага, когато се търси втората пресечна точка на дадено конично сечение с дадена права, т.е. едната пресечна точка вече е известна.

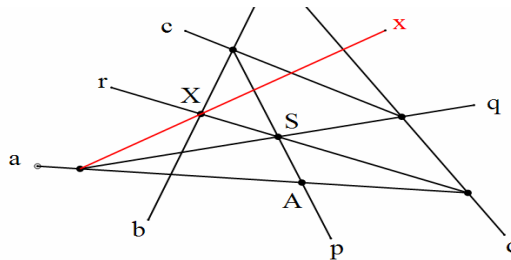
Задача 28.1 Дадена е кривата от втора степен $k(A,B,C,D,E)$. Изберете произволна точка X от k .

Решение Построяваме произволна права x през една от дадените точки, например B и търсим втората ѝ пресечна точка X с k (Фигура 28.1). Търсената точка X се явява шестата точка. Нейното място е в съседство с точка B . Прилагаме Теоремата на Паскал за точките $AXBCDE$. Точките A,X,B,C,D,E принадлежат на една крива от втора степен, тогава и само тогава, когато точките $P=AX \cap CD$, $Q=XB \cap DE$, $R=BC \cap EA$ са колинеарни. От тук следват построенията:

1) $Q=x \cap DE$; 2) $R=BC \cap EA$; 3) $s=QR$; 4) $P=s \cap CD$; 5) $X=PA \cap BQ=PA \cap x$.



Фигура 28.1



Фигура 28.2

Теоремата на Брианшон се прилага, когато се търси втората допирателна права на дадено конично сечение през дадена точка, т.е. едната допирателна вече е известна.

Задача 28.2 Дадена е кривата от втори клас $K(azA,b,c,d)$. Изберете произволна права x от K .

Решение Кривата от втори клас е зададена с четири прави и допирната точка на едната от тях. Еквивалентният запис на тази крива от втори клас е $K(a,a,b,c,d)$, като точката $a \cap a = A$ е допирната точка на правата a .

Избираме произволна точка X върху една от дадените прави, например b и търсим втората права x през точка X , принадлежаща на K (Фигура 28.2). Търсената права x се явява шеста права. Нейното място е в съседство с правата b . Прилагаме Теоремата на Брианшон за правите aa, x, b, c, d . Правите a, a, x, b, c, d принадлежат на една крива от втори клас, тогава и само тогава, когато правите $p=(aa)(bc)$, $q=(ax)(cd)$, $r=(xb)(da)$ са конкурентни. От тук следват построенията:

1) $p=A(bc)$; 2) $r=X(da)$; 3) $S=p \cap r$; 4) $q=S(cd)$; 5) $x=(aq)(br)=(aq)X$.

Задача 28.3 Нека $k(ABCDE)$ е крива от втора степен, минаваща през точките A,B,C,D,E , никое три от които не са колинеарни. Да се построи допирателната b към k в точка B .

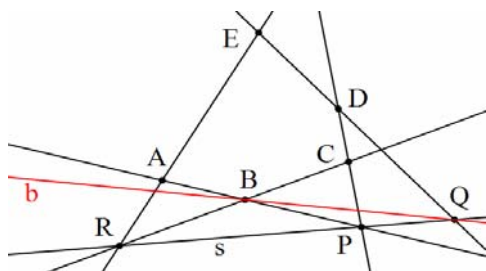
Решение Допирателна права се намира чрез Теоремата на Паскал като два пъти последователно се запише допирната точка.

Прилагаме Теоремата на Паскал за точките $ABBCDE$:

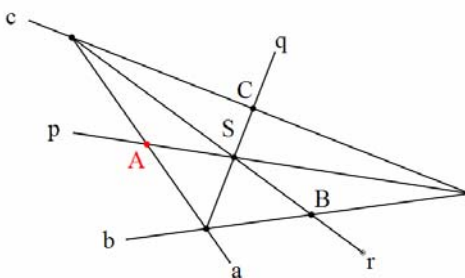
$$A, B \in b, C, D, E \in k(ABCDE) \Leftrightarrow P = AB \cap CD, \quad Q = b \cap DE, \quad R = BC \cap EA$$

са колинеарни.

Построения (Фигура 28.3): 1) P ; 2) R ; 3) $s = PR$; 4) $Q = s \cap DE$; 5) $b = BQ$.



Фигура 28.3



Фигура 28.4

Задача 28.4 Нека $K(a,bzB,czC)$ е крива от втори клас, зададена с неконкурантните прави a, b, c и допирните точки B и C съответно на b и c . Да се построи допирната точка A на правата a с K .

Решение Допирна точка се намира чрез Теоремата на Брианшон като два пъти последователно се запише допирателната права.

Да запишем $K(a,bzB,czC)$ само чрез прави $K(a,b,b,c,c)$. Прилагаме Теоремата на Брианшон за правите $aabbcc$: Триъгълникът abc се допира съответно в точките A, B, C до K тогава и само тогава, когато правите $A(bc)=p$, $(ab)C=q$, $B(ca)=r$ са конкурантни.

Построения (Фигура 28.4): 1) q ; 2) r ; 3) $S = q \cap r$; 4) $p = S(bc)$; 5) $A = a \cap p$.

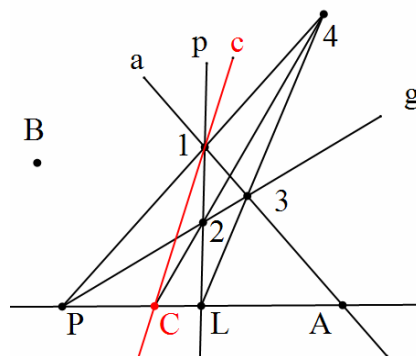
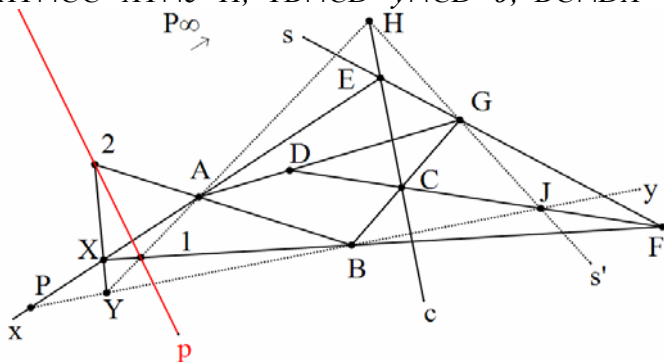
Задача 28.5 Дадена е кривата от втора степен $k(A,B,CzC,D)$. Да се направи преход към крива от втори клас.

Упътване Постройте допирателните прави към k в две от точките A, B, D .

Задача 28.6 Дадена е кривата от втора степен $k(A,B,CzC,D)$ и точката P . Да се построи полярата p на точка P относно k .

Решение Трябва да впишем в k пълен четириъгълник с диагонална точка P . Съгласно Теорема 24.5 полярата p на точка P трябва да мине през другите две диагонални точки на построения вписан пълен четириъгълник. За целта построяваме правите $PA=x$ и $PB=y$ и търсим вторите им пресечни точки съответно X и Y с k (Фигура 28.5). Прилагаме Теоремата на Паскал за точките $AXBCCD$ и $AYBCCD$.

Ако въведем означенията $AX \cap CC = x \cap c = E$, $XB \cap CD = F$, $BC \cap DA = G$ и $AY \cap CC = AY \cap c = H$, $YB \cap CD = y \cap CD = J$, $BC \cap DA = G$, то следват построенията:



Фигура 28.5

Фигура 28.6

1) E ; 2) G ; 3) $s=EG$; 4) $F=s\cap CD$; 5) $X=FB\cap AE=FB\cap x$; 6) J ; 7) $s'=JG$ 8) $H=s'\cap c$;
9) $Y=HA\cap BJ=HA\cap y$.

Разглеждаме пълния четириъгълник $AXYB$, от където следва, че $p=12$, където $1=AY\cap BX$, $2=AB\cap XY$.

Задача 28.7 Дадена е кривата от втора степен $k(A, B, C, z, D)$ и правата q . Да се построи полюсът Q на права q относно k .

Упътване Използвайте свойството на спрегнатите точки всяка да лежи върху полярата на другата. Достатъчно е да изберете две произволни точки P и R върху q и да намерите техните поляри съответно p и r . Правото на избор на точките P и R ще намали построенията, ако поискаме, например $P=q\cap AB$ и $R=q\cap CD$.

Задача 28.8 Дадена е кривата от втора степен $k(A, z, a, B; P, p)$, където точка P и права p са полюс и поляра относно k . Да се намерят още две точки от k .

Решение Нека $AP\cap p=L$, $AP\cap k=C$ (Фигура 28.6). Тогава съгласно Теорема 24.3 имаме хармоничната група $H(PL, AC)$, където неизвестна е само точка C . Нейното място върху правата PL се определя чрез построенията, посочени в Основната задача на §8 и могат да се проследят чрез презентация на динамичния чертеж 28.6. От хармоничната група $H(PL, AC)$, перспективността $\pi: P, L, A, C \rightarrow IP, p, a, c$ и Теорема 9.1 следва хармоничната група

$H(IP, p, a, c)$. Тогава, от спрегнатостта на правите IP и p и Теорема 24.4 следва, че правата c е допирателна в точка C към k . Така кривата от втора степен $k(A, z, a, B; P, p)$ вече е определена с три точки и допирателните прави в две от тях $k(A, z, a, B, C, z, c)$.

29 Афинни свойства на коничните сечения

Определение 29.1 *Афинно свойство на геометричната фигура F се нарича всяко нейно свойство, което е инвариантно относно произволен афинитет.*

Определение 29.2 *Коничното сечение C се нарича елипса, парабола или хипербола, когато безкрайната права ω е съответно несекателна, допирателна или секателна за C .*

И така, елипсата няма безкрайни точки, параболата има една безкрайна точка, а хиперболата има две безкрайни точки. Тъй като всяка безкрайна точка е външна за елипсата, то през всяка безкрайна точка минават точно две крайни и успоредни допирателни към елипсата. Понеже параболата се допира до безкрайната права, то тя не притежава успоредни допирателни. Безкрайната права разделя хиперболата на два клона, разположени въвн от ивицата, образувана от две нейни произволни успоредни допирателни.

Теорема 29.1 *Свойството едно конично сечение C да бъде елипса, парабола или хипербола е афинно.*

Доказателство: Нека Φ е произволен афинитет и $\Phi(C, \omega) = C', \omega$. Тъй като всеки афинитет е и колинеация, то съгласно Теорема 28.1, 28.2, 28.3 C' е конично сечение и ω запазва свойството си да бъде несекателна, допирателна или секателна. Следователно, ако коничното сечение C е било парабола, т.е. ω е била допирателна към C , то ω ще бъде допирателна и към C' или C' отново е парабола.

Определение 29.3 *Полюсът на безкрайната права относно коничното сечение C се нарича център на C .*

Отчитайки Определение 29.2 и разглежданията в § 24 заключаваме, че центърът на всяка елипса е крайна вътрешна точка, центърът на всяка парабола е безкрайната ѝ точка, центърът на всяка хипербола е крайна външна точка.

Елипсата и хиперболата се наричат **централни криви от втора степен**.

Теорема 29.2 *Свойството на една точка да бъде център на конично сечение е афинно.*

Доказателство: Нека точка Z е център на коничното сечение C , т.е. Z е полюс на ω относно C . Нека Φ е произволен афинитет и $\Phi(C, \omega, Z) = C', \omega, Z'$. Тъй като всеки афинитет е колинеация, то съгласно Теорема 28.4 точка Z' и ω са полюс и поляра относно C' , т.е. Z' е център на C' .

Теорема 29.3 *Ако A е точка от коничното сечение C с център Z , то симетричната ѝ точка A' относно Z също принадлежи на C .*

Доказателство: Нека $AZ \cap \omega = U_\infty$, $AZ \cap C = A'$. Отчитайки, че Z и U_∞ са спрегнати точки и прилагайки Теорема 28.3 намираме $H(AA', ZU_\infty)$. Съгласно Теорема 19.4 точка Z е среда на отсечката AA' .

Определение 29.4 *Полярата на всяка безкрайна точка относно конично сечение се нарича диаметър.*

От Теорема 22.2 и Определение 29.4 следва, че произволен диаметър на коничното сечение и безкрайната права ω са спрегнати прави. Значи всеки диаметър на конично сечение минава през центъра му и обратно, всяка права през центъра на едно конично сечение е негов диаметър. Тогава всички диаметри на параболата са успоредни, тъй като

нейният център е безкрайна точка.

Определение 29.5 Два диаметъра, които са спрегнати прави относно коничното сечение C , се наричат спрегнати диаметри относно C .

Теорема 29.4 Свойството на една права да бъде диаметър е афинно. Свойството на два диаметъра да бъдат спрегнати е афинно.

Доказателство: Нека d е диаметър на коничното сечение C , т.е. d е поляра на точка D_∞ относно C , а Φ е афинитет, при който $\Phi(D_\infty, d, C) = D'_\infty, d', C'$. Тъй като всеки афинитет е колинеация, то съгласно Теорема 28.4 D'_∞ и d' са полюс и поляра относно C' т.е. d' е диаметър на C' .

Нека $D_{1\infty}, d_1$ и $D_{2\infty}, d_2$ са две двойки полюс и поляра относно C и $D_{2\infty} \in d_1$. Следователно и $D_{1\infty} \in d_2$, т.е. d_1 и d_2 са спрегнати диаметри относно C . Нека Φ е афинитет и $\Phi(D_{1\infty}, d_1, D_{2\infty}, d_2, C) = D'_{1\infty}, d'_1, D'_{2\infty}, d'_2, C'$. Понеже афинитетът е колинеация, той запазва инцидентността или имаме $D'_{2\infty} \in d'_1, D'_{1\infty} \in d'_2$. Следователно d'_1 и d'_2 са спрегнати диаметри относно C' .

Теорема 29.5 Всеки диаметър на коничното сечение C съдържа средите на хордите, успоредни на неговия спрегнат диаметър.

Доказателство: Нека d_1 и d_2 са двойка спрегнати диаметри относно C и AB е секуща, минаваща през полюса $D_{1\infty}$ на d_1 , т.е. $AB \parallel d_2$. Ако $M = d_1 \cap AB$, то точките M и $D_{1\infty}$ са спрегнати и от Теорема 24.3 следва хармоничната група $H(AB, MD_{1\infty})$. Тогава, прилагайки Теорема 19.4, заключаваме че M е среда на AB .

Определение 29.6 Инволюцията φ на спрегнатите прави (виж Теорема 22.9), индуцирана от централното коничното сечение C в центъра му, се нарича инволюция на спрегнатите диаметри.

Естествено, за инволюция на спрегнатите диаметри може да се говори само при централните криви (елипса и хипербола), защото центърът на параболата е особена точка. Инволюцията на спрегнатите диаметри при елипсата е елиптическа, а при хиперболата е хиперболична, тъй като центровете им са съответно вътрешна и външна точка.

Определение 29.7 Всяка крайна допирателна в безкрайна точка на едно конично сечение се нарича асимптота на това конично сечение.

От определението е ясно, че асимптотите са особени прави и следователно са поляри на собствените си безкрайни точки. Това означава, че те са диаметри и значи минават през центъра на коничното сечение. От Определения 29.2 и 29.7 следва, че хиперболата има точно две асимптоти, а елипсата и параболата нямат асимптоти. Двата клона на хиперболата са разположени в едната двойка срещуположни ъгли, определени от асимптотите.

Теорема 29.6 Свойството на една права да бъде асимптота на конично сечение е афинно.

Верността на теоремата следва от Теорема 28.2 и Определения 19.1 и 29.7.

Теорема 29.7 Асимптотите на хиперболата са двойни елементи в инволюцията на спрегнатите ѝ диаметри и образуват хармонична група с всяка двойка спрегнати диаметри.

Доказателство: Тъй като асимптотата се допирателна до хиперболата в безкрайната си точка, то тя е инцидентна със своя полюс, т.е. тя е особена или самоспрегната права. Така

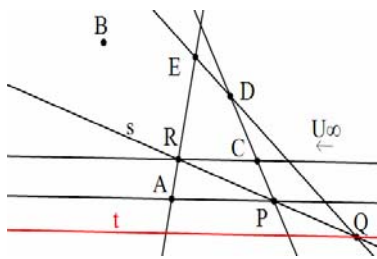
асимптотите се явяват двойни прави в инволюцията на спрегнатите диаметри и образуват хармонична група с всяка двойка спрегнати диаметри (виж Следствие 15.2 на Теорема 15.4).

Упражнение № 14

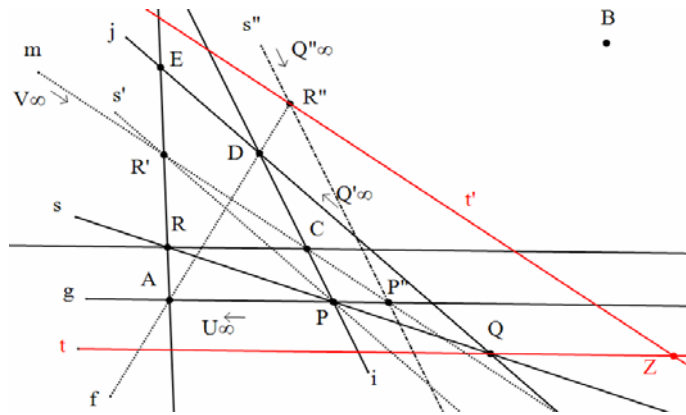
Задача 29.1 Да се построят асимптотите и центъра на хиперболата

а) $h(A, U_\infty, C, D, E)$; б) $h(U_\infty, Aza, Bza)$.

Решение а) $h(A, U_\infty, C, D, E)$ I) Допирателната към h в точката U_∞ е първата асимптота. Фигура 28.3 е кадър на едноименния динамичен чертеж, представящ построяването на допирателната b в точка B към кривата от втора степен $k(ABCDE)$. Ето защо за построяването на първата асимптота t е достатъчно да използваме динамичния чертеж 28.3, да добавим произволна безкрайна точка U_∞ и да извършим замяната на крайната точка B с безкрайна точка U_∞ . Така получаваме Фигура 29.1 а) и спестяваме чертожно време. Ако не разполагаме с подходящ чертеж, както е в случая, ще започнем нов чертеж и ще приложим Теоремата на Паскал за точките $AU_\infty U_\infty CDE$.



Фигура 29.1 а)



Фигура 29.1 б)

II) (Фигура 29.1 б)) Намираме втората пресечна точка V_∞ на безкрайната права ω с хиперболата $h(A, U_\infty, C, D, E)$, прилагайки Теоремата на Паскал за точките: $AU_\infty V_\infty CDE$. Следва, че точките $A U_\infty \cap CD = P' = P$, $U_\infty V_\infty \cap DE = \omega \cap DE = U_{DE} = Q'_\infty$, $V_\infty C \cap EA = R'$ са колинеарни.

Построения: 1) Q'_∞ ; 2) $s' = P Q'_\infty$; 3) $R' = s' \cap EA$; 4) $V_\infty = \omega \cap R'C = U_m$

III) Построяваме втората асимптота t' като допирателна към хиперболата h в точката V_∞ .

Прилагаме Теоремата на Паскал за точките: $AU_\infty V_\infty V_\infty CD$. Следва, че точките

$A U_\infty \cap V_\infty C = P''$, $\omega \cap CD = U_{CD} = Q''_\infty$, $V_\infty V_\infty \cap DA = t' \cap DA = R''$ са колинеарни.

Построения: 5) P'' ; 6) Q''_∞ ; 7) $s'' = P'' Q''_\infty$; 8) $R'' = s'' \cap DA$; 9) $t' = R'' V_\infty$.

IV) Центърът на хиперболата Z е пресечната точка на двете асимптоти.

Проследете всички построения стъпка по стъпка, презентирайки динамичен чертеж 29.1 б).

Задача 29.2 Да се построи произволен диаметър на коничното сечение C , ако:

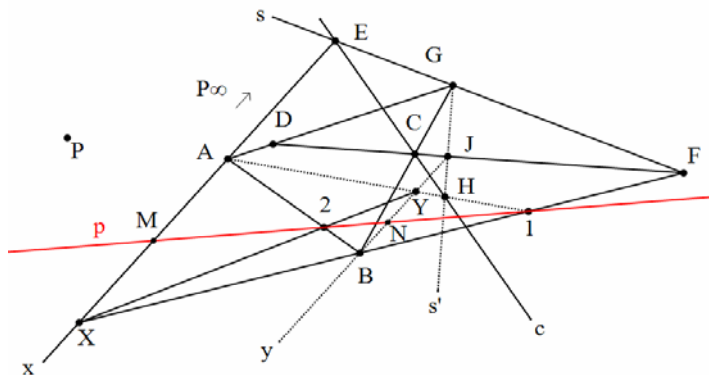
а) $C(A, B, Czc, D)$ е централно конично сечение;

б) $C(Aza, b, c)$ е парабола; в) $C(Aza, Bzb)$ е парабола.

Решение Достатъчно е да намерим полярата p на произволна безкрайна точка P_∞ относно C .

а) Динамичният чертеж, съответстващ на Фигура 28.6, представя построяването на

полярата p на произволна крайна точка P . Изберете произволна безкрайна точка P_∞ и извършете размяната на точките P и P_∞ . Сам ще ви представи диаметъра p заедно с всички предварителни построения (Фигура 29.2). Може да приложите динамика върху свободните обекти, за да постигнете по-добър изглед на чертежа.

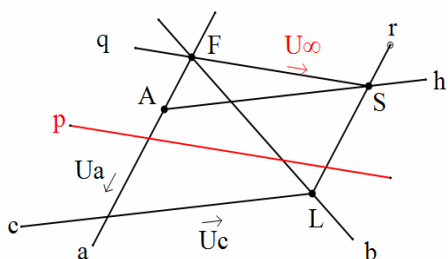


Фигура 29.2

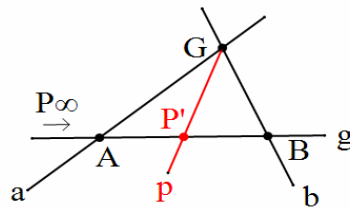
Нека отбележим, че при намиране на диаметър диагоналните точки 1 и 2 могат да се заменят със средите M и N съответно на отсечките AX и BY (виж Задача 24.2 б), Фигура 24.5).

б) Записът $C(Aza, b, c)$ е парабола е еквивалентен на $C(Aza, b, c, \omega)$ или още $C(a, a, b, c, \omega)$. Всички диаметри на параболата минават през нейната безкрайна точка, която е и център на параболата. Следователно най-напред ще намерим безкрайната точка U_∞ на параболата, прилагайки Теоремата на Брианшон за правите $aabc\omega\omega$: Правите a, a, b, c, ω принадлежат на параболата π тогава и само тогава, когато правите $h=AU_c$, $q=(ab)U_\infty$, $r=(bc)U_a$ са конкурантни. Построения:

1) h ; 2) r ; 3) $S=h \cap r$; 4) $q=(ab)S$; 5) $U_\infty=q \cap \omega$.



Фигура 29.3



Фигура 29.4

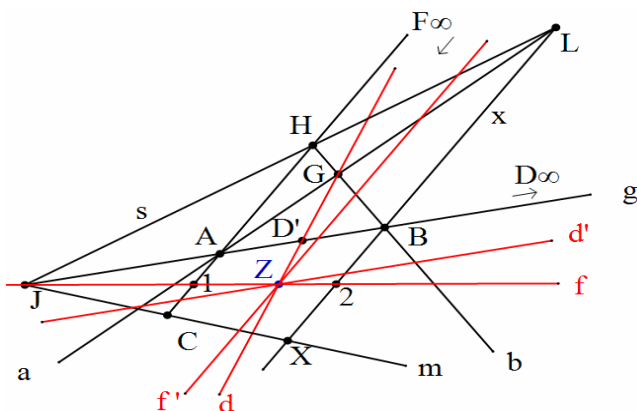
Всяка права $p \perp U_\infty$ е диаметър на параболата.

в) Нека въведем означенията: $a \cap b = G$, $AB = g$, P_∞ е безкрайната точка на g , а точка P' е средата на отсечката AB (Фигура 29.4). Съгласно Задача 24.2 б) правата $p = GP'$ е полярата на P_∞ . Следователно p е диаметър и всяка права, която е успоредна на p , също е диаметър на параболата $\pi(Aza, Bzb)$.

Задача 29.3 Да се намери центърът Z на централното конично сечение k и да се зададе инволюцията на спрегнатите диаметри φ , ако:

- $k(Aza, Bzb, C)$; б) $k(U_\infty z t, A, B, C)$; в) $k(U_\infty z t, Aza, B)$;
- $k(Aza, B; P_\infty, p)$, където P_∞ и p са полюс и поляр относно k ;
- $k(Aza, U_\infty; P_\infty, p)$, където P_∞ и p са полюс и поляр относно k .

Решение а) (Фигура 29.5) Ако $AB \cap \omega = D_\infty$, то следвайки решението на Задача 29.2 в), намираме първия диаметър $d = GD'$, където $G = a \cap b$, а D' е средата на отсечката AB .



Фигура 29.5

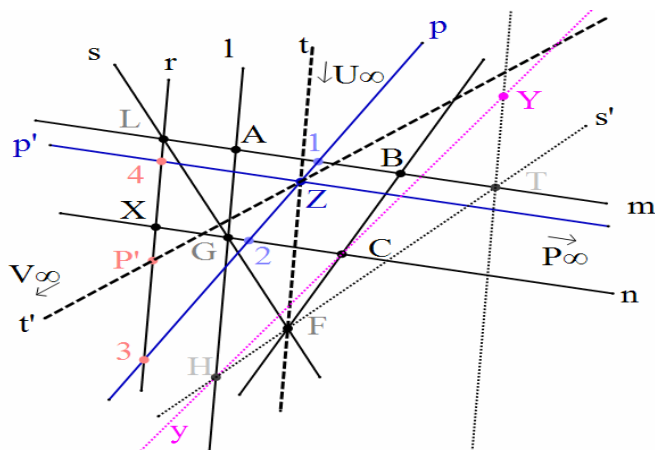
Нека означим: $AC \cap \omega = F_\infty$, $BX = x$. Намираме точката $X = x \cap k$, прилагайки Теоремата на Паскал за точките $AABBXC$. Вторият диаметър f минава през средите 1 и 2 съответно на отсечките AC и BX . Центърът на k е $Z = d \cap f$. Спрегнатите диаметри на d и f са съответно $d' = ZD_\infty$ и $f' = ZF_\infty$.

б) Достатъчно е да се намери един диаметър p , като поляра например, на точката $P_\infty = AB \cap \omega$, защото дадената асимптота t също е диаметър. Тогава $Z = p \cap t$, а $p' = ZP_\infty$. Удобно е втората асимптота t' да се определи от хармоничната група $H(pp', tt')$ (виж Задача 20.6).

Построения: I) $P_\infty = AB \cap \omega$;

II) Ако $CP_\infty \cap k = X$, то за намирането на X прилагаме Теоремата на Паскал за точките $U_\infty U_\infty ABCX$.

1) $t \cap BC = F$; 2) $U_\infty A \cap CP_\infty = G$; 3) $s = FG$; 4) $L = s \cap AB$; 5) $X = L U_\infty \cap CG$;



Фигура 29.6

III) $p = l2$, където точките 1 и 2 са среди съответно на отсечките AB и CX ;

IV) $Z=t \cap p$ е центърът на k ;

VI) $\varphi(p)=p'=ZP_{\infty}$;

VII) Тъй като $\varphi(t, t')=t, t'$, то в сила е хармоничната група $H(pp', tt')$. За определянето на t' ще използваме правата r :

1) $r \parallel c$; 2) $r \cap p=3, r \cap p'=4$; 3) P' е среда на отсечката 34 ; 4) $t'=ZP'$;

VIII) На края е построена произволна права u през точка C и е намерена пресечната ѝ точка Y с хиперболата k ($Y: U_{\infty}.U_{\infty}ABCY$). Така при ротация на правата u около точка C , точката Y описва двата клона на хиперболата, преминавайки през безкрайните ѝ точки $U_{\infty}z t$ и $V_{\infty}z t'$

г) Тъй като дадената права p е поляра на безкрайна точка, то тя е диаметър. Остава да се построи още един диаметър.

30 Метрични свойства на коничните сечения

Определение 30.1 Свойство на геометрична фигура, което е инвариантно относно произволна подобност, се нарича метрично.

Теорема 30.1 Свойството на едно конично сечение да бъде окръжност е метрично.

Доказателство: Нека C е окръжност и d_1, d_2 са двойка спрегнати диаметри за C . Съгласно Определение 20.1 d_1, d_2 са перпендикулярни прави. Нека Φ е подобност и $\Phi(C, d_1, d_2) = C', d'_1, d'_2$. Тъй като Φ е афинитет, то d'_1, d'_2 са двойка спрегнати диаметри за кривата от втора степен C' . Но Φ е подобност и следователно правите d'_1, d'_2 са перпендикулярни, както са перпендикулярни и техните първообрази. Като вземем предвид, че двойката спрегнати диаметри d_1, d_2 бе избрана произволно, заключаваме, че инволюцията на спрегнатите диаметри на C' съвпада с правоъгълната инволюция и C' е окръжност.

Определение 30.2 Диаметър на коничното сечение C , който е перпендикулярен на спрегнатите си хорди, се нарича ос на C .

Теорема 30.2 Параболата има точно една ос.

Доказателство: Всички диаметри на параболата са успоредни по между си. Следователно има точно една система успоредни хорди, които са перпендикулярни на диаметрите, а значи има и точно една ос. Тя е поляра на безкрайната точка, явяваща се образ на безкрайната точка на параболата в абсолютната инволюция.

Теорема 30.3 Ако един диаметър е ос на централно конично сечение C , то спрегнатият му диаметър също е ос на C .

Доказателство: Нека o е ос на C и нейният полюс да отбележим с U_∞ . Ако o' е спрегнатият диаметър на o относно C и U'_∞ е неговият полюс, то $U_\infty \in o', U'_\infty \in o$. Следователно диаметърът o' също е перпендикулярен на спрегнатите си хорди, т.е. и o' е ос на C .

Теорема 30.4 Всяко централно конично сечение, различно от окръжност, има точно две оси. Всеки диаметър на окръжността е нейна ос.

Доказателство: От Определение 30.2 и Теорема 30.3 следва, че осите на едно централно конично сечение C могат да се разделят на двойки, като всеки две оси от едната двойка са спрегнати диаметри на C и същевременно перпендикулярни един на друг. Тогава въпросът за определяне броя на осите на едно централно конично сечение се свежда до определяне броя на общите двойки на инволюцията на спрегнатите му диаметри и правоъгълната инволюция, индуцирана в центъра му. От факта, че правоъгълната инволюция е елиптична и Твърдение 15.1 следва, че двете инволюции имат обща двойка.

1. Нека C е конично сечение, различно от окръжност. Значи инволюцията на спрегнатите му диаметри е различна от правоъгълната и ще има с нея точно една обща

двойка или C ще има точно две оси.

2. Нека C е окръжност. Значи инволюцията на спрегнатите ѝ диаметри съвпада с правоъгълната и тогава всеки диаметър на окръжността е неин диаметър.

Теорема 30.5 *Осите на хиперболата са ъглополовящи на ъглите, определени от асимптотите.*

Доказателство: Нека с φ означим инволюцията на спрегнатите диаметри на хиперболата, с m_1, m_2 – асимптотите ѝ, с o_1, o_2 – осите ѝ. От Теорема 29.7 и 30.3 е известно, че $\varphi(m_1, m_2, o_1) = m_1, m_2, o_2$. Съгласно Следствие 15.2 в сила е хармоничната група $H(m_1 m_2, o_1 o_2)$. Като отчетем и факта, че правите o_1, o_2 са перпендикулярни и приложим Теорема 20.2, заключаваме, че o_1, o_2 са ъглополовящи на ъглите, определени от асимптотите.

От хармоничната група $H(m_1 m_2, o_1 o_2)$ следва, че $m_1 m_2 / o_1 o_2$. Значи едната ос на хиперболата е ъглополовяща на онази двойка срещуположни ъгли, определени от асимптотите, в която са разположени двата клона на хиперболата, а втората ос е ъглополовяща на другата двойка срещуположни ъгли, определени от асимптотите. Първата ос се нарича **реална ос, а втората – имагинерна ос на хиперболата.**

Теорема 30.6 *Свойството на една права да бъде ос на конично сечение е метрично.*

Доказателство: Нека правата o е ос на коничното сечение C , Φ е произволна подобност и $\Phi(o, C) = o', C'$. От свойствата на подобността следва, че и o' е диаметър, перпендикулярен на спрегнатите си хорди, т.е. o' е ос на C' .

Определение 30.3 *Пресечните точки на коничното сечение с осите му се наричат негови върхове.*

Елипсата има четири върха, разположени по два върху двете ѝ оси. Параболата има един връх (ще се условим да не приемаме безкрайната ѝ точка за връх). Хиперболата има два върха, които лежат върху реалната ѝ ос.

От Теорема 28.1, 28.3, 30.6 и Определения 20.2, 30.3 следва верността на

Теорема 30.11 *Свойството на една точка да бъде връх на конично сечение е метрично.*

Допирателните прави към коничното сечение във върховете му се наричат **върхови допирателни**. Те минават през полюса на оста, върху която лежат допирните им точки и следователно са перпендикулярни на тази ос.

Упражнение № 15

Задача 30.1 Да се построят асимптотите и осите на хиперболата

- а) $h(A, U_\infty, C, D, E)$; б) $h(U_\infty, Aza, Bza)$; в) $k(U_\infty z t, A, B, C)$; г) $k(U_\infty z t, Aza, B)$;
 д) $k(Aza, U_\infty; P_\infty, p)$, където P_∞ и p са полюс и поляра относно k .

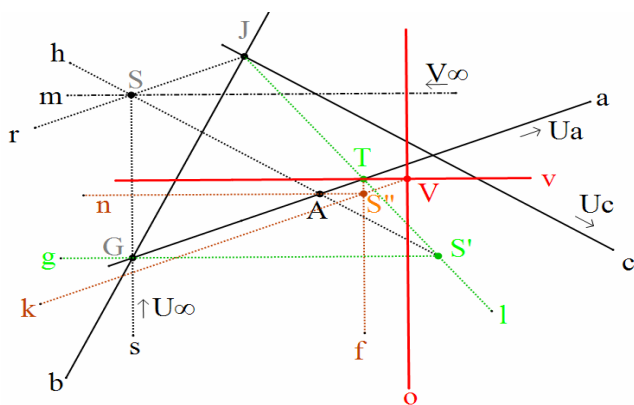
Упътване Задачите са решени или коментирани в §29. Остава да добавите осите като ъглополовящи на ъглите, определени от асимптотите.

Задача 30.2 Да се построят безкрайната точка, върховата допирателна, върхът и оста на параболата π , ако:

- а) $\pi(Aza, b, c)$; б) $\pi(Aza, Bzb)$;
 в) $\pi(Aza; P_\infty, p)$, където P_∞ и p са полюс и поляра относно π

Решение а) (Фигура 30.1) I) Намираме безкрайната точка U_∞ на параболата, прилагайки Теоремата на Брианшон за правите $aabc\omega\omega$: Правите a, a, b, c, ω принадлежат на параболата π тогава и само тогава, когато правите $h=AU_c$, $q=(ab)U_\infty$, $r=(bc)U_a$ са конкурантни. Построения:

- 1) h ; 2) r ; 3) $S=h \cap r$; 4) $s=(ab)S$; 5) $U_\infty=s \cap \omega$.



Фигура 30.1

II) Задаваме в чертожното поле точката V_∞ , която е образ на U_∞ за абсолютната инволюция. Тя е безкрайната точка на произволна права, перпендикулярна на q ;

III) Построяваме върховата допирателна v към π като втора допирателна (освен ω) през точката V_∞ . За целта прилагаме Теоремата на Брианшон за правите $aabc\omega v$. Построения:

- 1) $h=AU_c$; 2) $g=(ab)V_\infty=G V_\infty$; 3) $S'=h \cap g$;
 4) $l=(bc)S'=J S'$; 5) $v=(la)V_\infty=T V_\infty$.

IV) Определяме върха, прилагайки Теоремата на Брианшон за правите $aa\omega\omega v$. Построения:

- 1) $n=(aa)(\omega v)=A V_\infty$; 2) $f=(\omega\omega)(va)=U_\infty T$; 3) $S''=n \cap f$; 4) $k=S''U_a$; 5) $V=k \cap f$.

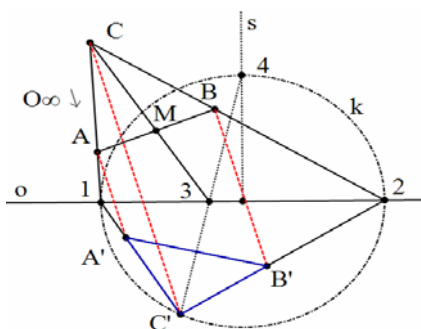
V) Оста $o=V U_\infty$.

Задача 30.2 Да се намери афинна хомология ϕ с дадена крайна ос o , която трансформира:

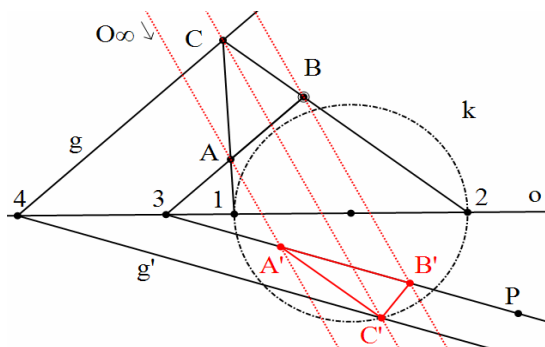
- а) Даден триъгълник ABC в равностранен триъгълник;
- б) Даден триъгълник ABC в правоъгълен равнобедрен триъгълник;
- в) Даден успоредник $ABCD$ в квадрат.
- г) Даден успоредник $ABCD$ в ромб с диагонал $A'C'$ минаващ през дадена точка P' .
- д) Даден триъгълник ABC в правоъгълен триъгълник $A'B'C'$, с хипотенуза $A'B'$ минаваща през дадена точка P .

Постройте образа на дадената фигура.

Решение б) (Фигура 30.2) За да се намери афинната хомология ϕ , удовлетворяваща условията на задачата, е достатъчно да се намери двойка съответни точки. Нека $\phi(ABC) = A'B'C'$ и $\angle A'C'B' = 90^\circ$. Следователно ще потърсим точката $C' = \phi(C)$. Да означим: $AC \cap o = 1$, $BC \cap o = 2$. Тогава точка C' принадлежи на геометричното място на точките, от които отсечката 12 се вижда под прав ъгъл, т.е. C' принадлежи на окръжност $k(d=12)$.



Фигура 30.2



Фигура 30.3

Нека CM е медиана на $\triangle ABC$ и $CM \cap o = 3$. Тогава $\phi(CM) = C'M' = C'3$. Съгласно Теорема 19.4, Теорема 16.3 и Определение 12.1 $C'3$ ще бъде медиана и в $\triangle A'B'C'$. Но тъй като $\triangle A'B'C'$ е равнобедрен, то $C'3$ ще бъде и негова ъглополовяща. Това е възможно, само когато $C'3$ разполовява дъгата $\widehat{12}$, т.е. $C'3 \perp 12$, където $\widehat{14} = \widehat{24}$. Така показахме, че правите $C'3$ и 43 съвпадат или $C' = k \cap 34$. Безкрайната точка $O_\infty = CC' \cap \omega$ е център на търсената афинна хомология. Тогава $A' = AO_\infty \cap 1C'$, $B' = BO_\infty \cap 2C'$.

Упътване а) Решението протича аналогично на решението на б) с единствената разлика, че окръжността $k(d=12)$ се заменя с геометричното място на точки, от които отсечката 12 се вижда под ъгъл 60° ;

в) Диагоналът разделя успоредника на два еднакви триъгълника. Приложете задача 30.2 б) за триъгълника ABC и след построяването на правоъгълния равнобедрен триъгълник $A'B'C'$ го допълнете до квадрат.

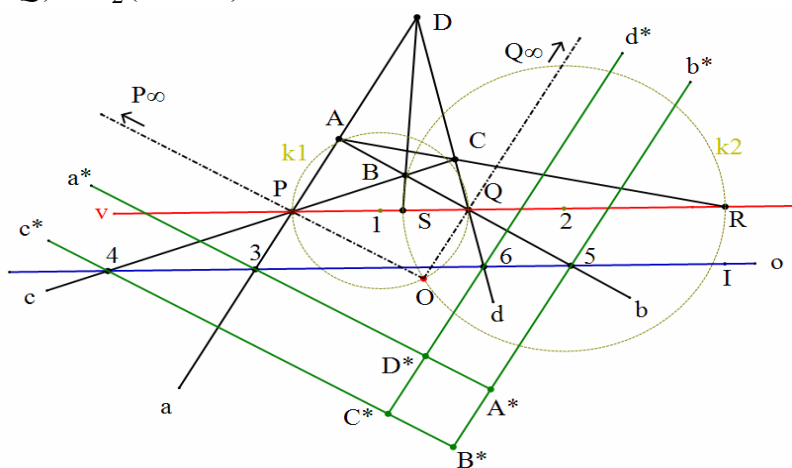
д) Постройте права $g \parallel AB$ и минаваща през върха C . Съгласно условието образът ѝ

при търсената афинна хомология е $g' \parallel 3P$ (Фигура 30.3).

Задача 30.3 Да се намери хомология ϕ , която трансформира даден произволен четириъгълник $ABCD$ в квадрат.

Решение (Фигура 30.4) Нека $AD \cap BC = P$ и $AB \cap CD = Q$. Тъй като срещуположните страни на квадрата са успоредни, то $\phi(P, Q) = P_\infty, Q_\infty$. Следователно $\phi(PQ) = \omega$ или правата $PQ = v$ е убежна права на хомологията ϕ .

Да означим с O центърът на ϕ . Тогава правите OP, OQ ще бъдат представители съответно на безкрайните точки P_∞, Q_∞ . Но съседните страни на квадрата както и диагоналите му са перпендикулярни. Това означава $OP \perp OQ$ и $OR \perp OS$. Поради тези съображения определяме центъра O на ϕ като пресечна точка на окръжностите $k_1(d = PQ)$ и $k_2(d = RS)$.



Фигура 30.4

Оста на ϕ не е еднозначно определена. Всяка права o , която е успоредна на убежната права v може да бъде избрана за ос. Нейният избор е свързан с дължината на страната на квадрата.

Ако въведем точките $AD \cap o = 3$, $BC \cap o = 4$, $AB \cap o = 5$, $DC \cap o = 6$, то:
 $\phi(AD) = \phi(3P) = 3P_\infty^* = a = A^*D^*$, $\phi(BC) = \phi(4P) = 4P_\infty^* = b = B^*C^*$,
 $\phi(AB) = \phi(5Q) = 5Q_\infty^* = d = A^*B^*$, $\phi(CD) = \phi(6Q) = 6Q_\infty^* = c = C^*D^*$. Така получаваме върховете на квадрата $A^* = a \cap d$, $B^* = b \cap d$, $A^* = a \cap d$, $C^* = c \cap b$, $D^* = a \cap c$. Проверка за точността на построенията е колинеарността на тройките точки AOA^* , BOB^* , COC^* , DOD^* .

31 Проективна форма на евклидовата метрика

От разглежданията, направени в §19 и §20 стана ясно, че за да измерваме отсечки върху произволна права е необходимо да решим следните два въпроса:

1) Да се определят единичните отсечки върху всички прави, минаващи през дадена точка;

2) Да се нанася единична отсечка от една права върху произволна, успоредна на нея права и в частност върху самата права.

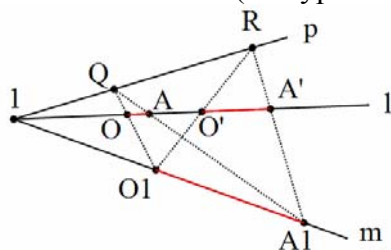
В §20 видяхме, че нанасянето на предварително зададена отсечка OA , чиято дължина приемаме за единична, от точка O върху всички прави, минаващи през O , се свежда до задаване на окръжност C с център O и радиус OA . Тъй като O е полюс на безкрайната права ω и инволюцията на спрегнатите диаметри съвпада с правоъгълната, която винаги можем да считаме за зададена, то окръжността C е единствена. **C се нарича единична окръжност.** Пресечните точки на единичната окръжност с правите от снопа прави $S(O)$ определят върху всяка от тях единична отсечка. Тази закономерност има проективен характер, защото при произволна колинеация окръжността C ще се изобрази в конично сечение C' ; O и ω ще се изобразят съответно в точка P и права p , които ще бъдат отново полюс и поляра относно C' ; на инволюцията на спрегнатите диаметри в $S(O)$ ще съответства инволюция на спрегнатите прави в $S(P)$. **Правата p се нарича абсолютна права.**

Така, изяснявайки си проективния характер на първата основна задача, разбираме че при едно обобщение на евклидовата метрика ролята на единичната окръжност може да изпълнява произволно конично сечение K , тъй като то се определя еднозначно, ако са зададени точка A от него, точка P и нейната поляра p относно K и инволюцията на спрегнатите прави в снопа прави $S(P)$. Инволюцията на спрегнатите прави в снопа прави $S(P)$ може да се замени с инволюцията на спрегнатите точки в реда точки p (да припомним, че именно задаването на абсолютната инволюция върху безкрайната права индуцира правоъгълната инволюция на спрегнатите диаметри в центъра на единичната окръжност в евклидовата геометрия). Коничното сечение K ще наричаме пак единично, а определянето на единичните отсечки върху правите през точка P се свежда до намирането на пресечните им точки с единичното конично сечение K . Нека $x \in P$ е произволна права и $x \cap K = \{X_1, X_2\}$. Тогава отсечката PX_1 приемаме за единична върху правата x в едната посока, а отсечката PX_2 приемаме за единична върху правата x в другата посока.

Съгласно Определение 19.4 пренасянето на една отсечка от една права върху успоредна на нея права или върху самата права се свежда до прилагането на трансляция. Ще припомним, че трансляцията е специална афинна хомология с ос безкрайната права ω .

Но всяка хомология е колинеация с двоен ред точки, поради което и тази операция има проективен характер. Следователно при едно обобщение на евклидовата метрика ролята на трансляцията ще се изпълнява от една специална хомология с ос абсолютната права. На успоредните прави в евклидовата равнина ще съответстват прави, които се пресичат върху абсолютната права.

Така решаването на втората основна задача или задачата за пренасянето на единичната отсечка от една права върху нея самата или върху друга права, която пресича първата в точка от абсолютната права се свежда до следното: Нека означим с OA дадената единична отсечка върху правата l , а с O_1 – точката върху правата m , от която ще нанасяме отсечката OA (Фигура 31.1).



Фигура 31.1

Да разгледаме специалната афинна хомология ϕ с ос p и двойка съответни точки O, O_1 . Тогава центърът на ϕ ще бъде точка $Q = OO_1 \cap p$. Ако $\phi(A) = A_1$, то отсечката O_1A_1 е единичната отсечка върху правата m в избраното от нас направление. Нека сега да пренесем единичната отсечка OA върху правата l в точка O' . Означаваме $O_1O' \cap p = R, RA_1 \cap l = A'$. Разглеждаме специалната хомология $\phi_1(R, p; O_1 \rightarrow O')$. Тъй като $\phi_1(A_1) = A'$, то отсечката $O'A'$ е новото положение на единичната отсечка OA върху същата права.

Ако разглеждаме проективната равнина без да сме посочили абсолютната права, т.е. всички нейни елементи са равноправни, то въпросът за метричните свойства на фигурите няма проективно съдържание. Но ако една права от проективната равнина е приета за абсолютна и върху нея е зададена една инволюция φ , то всички проективни свойства на една фигура, които се определят от взаимното ѝ положение с точките на абсолютната права трябва да бъдат наричани метрични. Евклидовата геометрия е частният случай, когато абсолютната права съвпада с безкрайната права, а инволюцията φ съвпада с абсолютната инволюция.

От направените разсъждения е ясно, че от проективна гледна точка вида на коничното сечение е без особено значение. То дори може да бъде и изродено.

Да разгледаме някои конкретни примери в афинната геометрия.

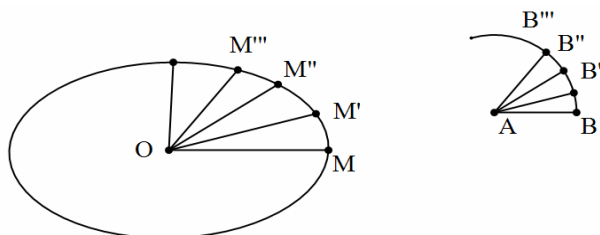
Нека правата p , явяваща се абсолют, да съвпада с безкрайната права. Това означава, че втората основна задача (пренасянето на единичните отсечки върху успоредните прави) и в двата примера, които ще разгледаме ще се решава чрез трансляция, така както е и в евклидовата геометрия.

Но нека инволюцията φ да бъде различна от абсолютната инволюция. Съществуват следните две възможности:

Пример 1. Инволюцията φ е елиптична. Следователно единичното коничното сечение K е елипса (Фигура 31.2). Единичните отсечки OM върху различните прави,

минаващи през центъра O на K са различни и равни на полудиаметрите на елипсата. Единичните отсечки върху всяка права през центъра O на K в двете възможни посоки върху нея са равни, но и различни за различните прави както е видно от Фигура 31.2. Тогава и проективната дължина (AB) на отсечката AB , която се определя с отношението $\frac{|AB|}{OM}$, където $|AB|$ е евклидовата ѝ дължина, е различна върху различните прави.

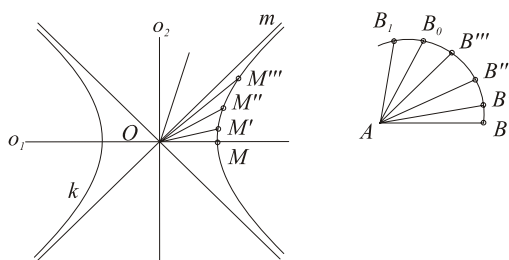
Изискването φ да бъде елиптична инволюция, т.е. единичното конично сечение да няма общи реални точки с абсолюта, не е задължително. То няма проективна мотивировка, а



Фигура 31.2

само е отражение на съществуващото положение в евклидовата равнина.

Пример 2. Инволюцията φ е хиперболична. Следователно единичното конично сечение K е хипербола и пресича абсолюта (безкрайната права) в две реални точки. Тази метрика съществено се отличава от евклидовата. Измерването на отсечките и сега се извършва точно както в евклидовата равнина, но единичните отсечки OM върху различните прави, минаващи през центъра на K са различни и равни на полудиаметрите на хиперболата (Фигура 31.3). Да проследим изменението на проективната дължина на отсечката AB върху различните, неуспоредни прави. Ако отсечката AB се върти около точка A , приемайки положенията $AB, AB', AB'', \dots$ без да изменя своята евклидова дължина, то съответната ѝ единична отсечка OM ще се върти около точка O , заемайки последователно положение $OM, OM', OM'' \dots$, при което $OM < OM' < OM'' < \dots$.



Фигура 31.3

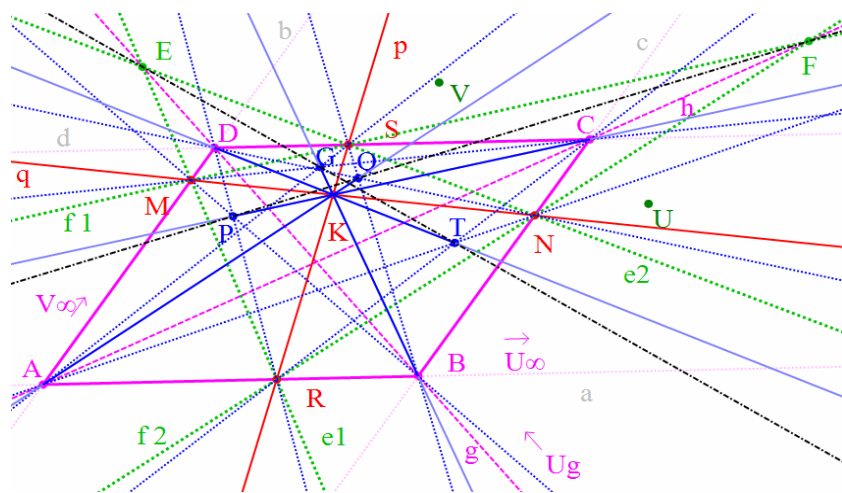
Следователно проективната дължина $(AB) = \frac{|AB|}{OM}$ на отсечката AB ще намалява и когато отсечката AB се приближава до положение, успоредно на асимптота на хиперболата, проективната ѝ дължина ще клони към нула, защото единичната ѝ отсечка ще нараства безкрайно. От тук следва, че трябва да приемем $(AB_0) = 0$, когато отсечката AB_0 е успоредна на асимптота на хиперболата. Така всяка отсечка върху правите, успоредни на някоя от асимптотите на хиперболата, има проективна дължина равна на нула. Да допуснем по-нататък, че отсечката AB продължава своето въртене около точка

A и заема положение AB_1 , така че успоредният ѝ полудиаметър пресича хиперболата в имагинерна точка. Тогава единичната отсечка ще има имагинерна дължина, а следователно и отсечката AB_1 ще има имагинерна дължина. Всичко това внася коренно различие между новата и евклидовата геометрии. Така построената метрика, съответстваща на условието инволюцията φ да бъде хиперболична, се нарича **псевдоевклидова метрика**. Доказано е, че псевдоевклидовата метрика може да се разглежда като геометрична интерпретация на механиката на специалната теория на относителността, а евклидовата геометрия – като геометрична интерпретация на механиката на Нютон (класическата механика).

32 Общи задачи

Задача 32.1 Нека $ABCD$ е произволен успоредник, а e_1 и e_2 са произволни прави от равнината му. Нека означим: $e_1 \cap e_2 = E$, $e_1 \cap AD = M$, $e_1 \cap AB = R$, $e_2 \cap CD = S$, $e_2 \cap BC = N$, $MN \cap RS = K$, $MS \cap RN = F$, $BM \cap DR = P$, $BS \cap DN = Q$, $AS \cap CM = G$, $AN \cap CR = T$. Докажете, че следните твърдения са еквивалентни:

- | | |
|----|----------------------------------|
| 1) | Точките B, D, E са колинеарни; |
| 2) | Точките A, C, F са колинеарни; |
| 3) | Точките A, K, Q са колинеарни; |
| 4) | Точките C, K, P са колинеарни; |
| 5) | Точките B, K, G са колинеарни; |
| 6) | Точките D, K, T са колинеарни; |
| 7) | Точките T, G, E са колинеарни; |
| 8) | Точките P, Q, F са колинеарни. |



Фигура.32.1

Упътване Използвайте Фигура 32.1, която е кадър от едноименния динамичен чертеж. За удобство на читателя отбелязваме, че свободните обекти са: свободните точки, асоциирани с универсалния успоредник, точката E и правите e_1 и e_2 . Изборът на проективен метод за решаване на тази задача осигурява верността на твърдението и за свързаните фигури (трапец и четириъгълник). Визуализацията се

получава веднага чрез прилагане на функцията РКБТ. Моля, ако е необходимо съобразете се със Забележка 1 в §2, използвайки точка B или U .

Задача 32.2 При условието и означенията на Задача 32.1 докажете, че когато правите e_1 и e_2 са успоредни на BD , то точките A, C, F, P, Q са колинеарни.

Защо релацията не се запазва при свързаните фигури трапец и четириъгълник?

Упътване За визуализация на колинеарността на точките A, C, F, P, Q е достатъчно да приложите функцията РКБТ за точките E и U_{BD} , а в хода на доказателството е достатъчно да установите, че точка K лежи върху правата AC .

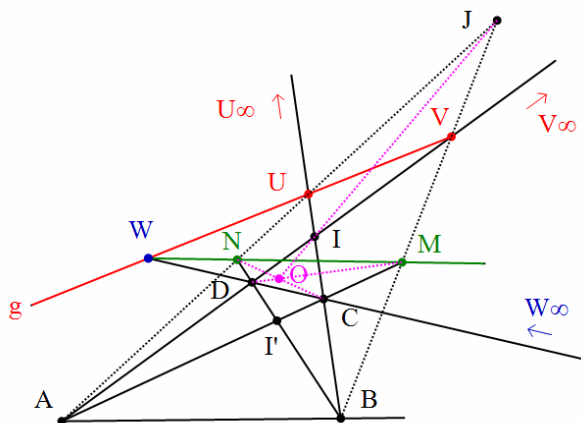
Задача 32.3 Даден е пълният четириъгълник $ABCD$. Върху правите BC и AD са избрани съответно произволните точки U и V (Фигура.32.1).

а) Да се докаже, че точките $M=BV \cap AC$, $N=AU \cap BD$ и $W=CD \cap UV$ лежат на една права, т.е. че правите MN, CD и $g=UV$ са конкурантни;

б) Да се докаже, правите DM, CN и IJ , където $I=AD \cap BC$ и $J=AN \cap BM$, са конкурантни;

в) Да се разгледат случаите, когато U съвпада с безкрайната точка на правата BC ($U=U_{BC}$), или V съвпада с безкрайната точка на правата AD ($V=V_{AD}$), или едновременно $U=U_{BC}=U_\infty$ и $V=V_{AD}=V_\infty$;

г) Съставете аналогични задачи, свързани с други двойки страни на четириъгълника $ABCD$.



Фигура.32.2

Упътване а) Приложете Теоремата на Пап за тройките колинеарни точки B, C, U и A, V, D ;

б) Приложете Теоремата на Дезарг за перспективни триъгълници за $\triangle DCI$ и $\triangle MNJ$

в) За да може Sam да визуализира чрез специалната си функция РКБТ случая, когато едновременно $U=U_{BC}=U_\infty$ и $V=V_{AD}=V_\infty$, премахнете от чертежа съединителната права $g=UV$.

Задача 32.4 Даден е пълният четириъгълник $ABCD$ и правата g .

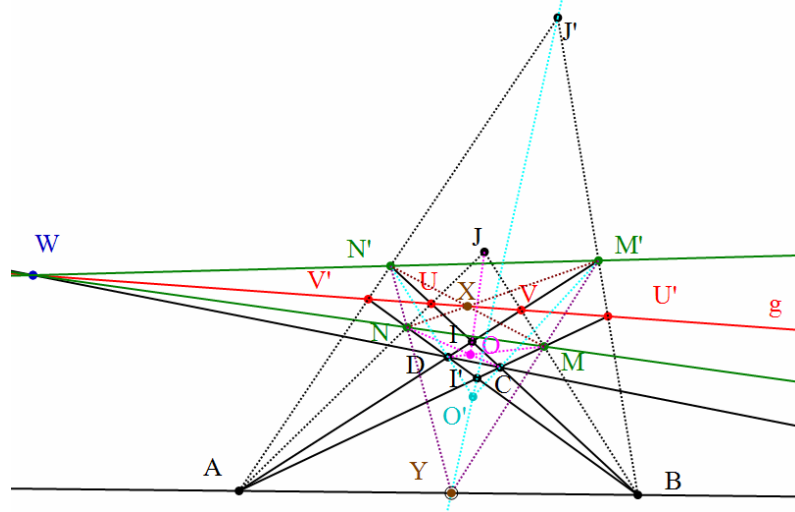
Да въведем означенията:

$g \cap BC=U$, $g \cap AD=V$, $g \cap AC=U'$, $g \cap BD=V'$, $BV \cap AC=M$, $AU \cap BD=N$, $BU' \cap AD=M'$, $AV' \cap BC=N'$, $AD \cap BC=I$, $AC \cap BD=I'$, $AU \cap BV=J$, $AV' \cap BU'=J'$ (Фигура 32.3).

Да се докаже:

- Правите g , MN , $M'N'$ и CD са конкурантни;
- Правите g , MN , $M'N'$ и CD са конкурантни;
- Правите MM' , NN' , IJ , $I'J'$ и AB са инцидентни с една точка Y ;
- Правите MN' , $M'N$ и g са конкурантни;
- Точките M , N , M' , N' , A , B принадлежат на една крива от втора степен k_{AB} ;
- Точката Y и правата g са полюс и поляра относно кривата от втора степен k_{AB} ;

Разгледайте случая, когато g е безкрайната права.



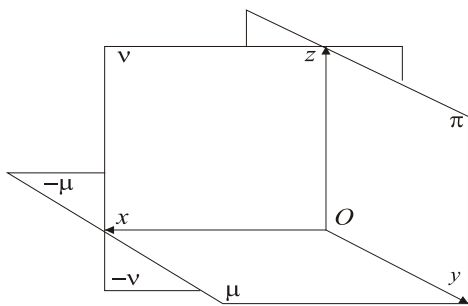
Фигура 32.3

33 Въведение в дескриптивната геометрия

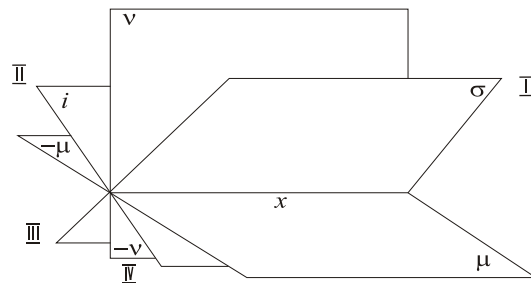
Въвеждането на координатна система уточнява както разположението на обектите в пространството, така и техните взаимни връзки. Когато желаем да притежаваме тази информация не във формата на координати и уравнения, т.е. в аналитичен вид, а нагледно, образно, когато искаме да отразим аналитичната информация за обектите върху чертежен лист или екрана на компютъра, т.е. върху една равнина, ние осъществяваме това чрез проекционните методи.

Изборът на чертежната равнина (наричана още епюр) и центърът на проектиране спрямо пространствената координатна система, към която е отнесен разглежданият обект, определят различните видове проекционни методи.

Нека $Oxyz$ е ортонормирана пространствена координатна система. Ще използваме общоприетите означения за координатните равнини: $(Oxy) = m, (Oxz) = n, (Oyz) = p$. (Фигура 33.1 а)). Хоризонталната равнина m и вертикалната равнина n разделят пространството на 4 квадранта.



Фигура 33.1 а)



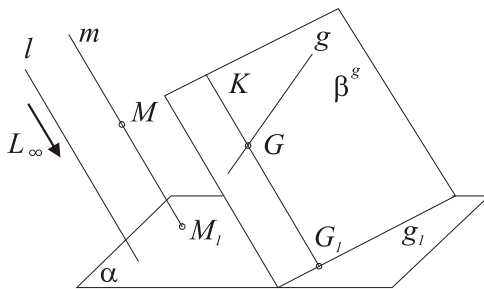
Фигура 33.1 б)

Определение 33.1 Ъглополовящата равнина на първи и трети квадранти се нарича симетрична равнина и се бележи с S (Фигура 33.1 б)).

Определение 33.2 Ъглополовящата равнина на втори и четвърти квадранти се нарича идентична равнина и се бележи с i (Фигура 33.1 б)).

Успоредно проектиране върху равнина. Успоредното проектиране върху равнина е в основата на двата проекционни метода – монжов и аксонометрия.

Нека са дадени равнина α и права l , която я пресича. Равнината α се нарича проекционна, а за правата l казваме, че определя проекционното направление. Още казваме, че проектираме от безкрайната точка $L_{\infty} \in l$.



Ако M е произволна точка в пространството, то точката $M_1 = m \cap \mathfrak{a}$, където $m \in M$, $m \parallel l$ се нарича успоредна проекция на M върху $\mathfrak{a}$. Правата m се нарича

проектираща права за точката M .

Ако g е произволна права в пространството, то правата $g_1 = a \cap b^g$, където $b^g (g \nparallel k)$, $k \parallel l$ се нарича успоредна проекция на g върху a . Равнината b^g се нарича **проектираща равнина за правата g .**

Свойства на успоредното проектиране:

1. На всяка точка от пространството еднозначно съответства точка от проекционната равнина.

2. Успоредната проекция на всяка права, успоредна на проекционното направление, е пресечната точка на правата с проекционната равнина.

3. Успоредната проекция на всяка права g , която не е успоредна на проекционното направление l , е правата $g_1 = a \cap b^g$.

4. Успоредните проекции на инцидентни точка и права са инцидентни точка и права.

5. Успоредните проекции на две успоредни прави, неуспоредни на проекционното направление, са две успоредни или съвпадащи прави.

6. Успоредното проектиране запазва отношението на отсечките, лежащи върху една права, която не е успоредна на проекционното направление.

Ортогонално проектиране се нарича успоредно проектиране, при което проекционното направление е перпендикулярно на проекционната равнина, т.е. $l \perp a$. То е частен случай на успоредното проектиране и следователно притежава всичките му шест свойства.

Ще припомним онези теореми от стереометрията, на които най-често ще се позоваваме в следващите разглеждания:

I . Достатъчно условие права и равнина да са успоредни. Ако една права, която не лежи в дадена равнина, е успоредна на някоя права от равнината, то правата и равнината са успоредни.

II . Достатъчно условие права и равнина да са перпендикулярни. Ако права е перпендикулярна на две пресичащи се прави от една равнина, то тя е перпендикулярна на равнината.

III . Достатъчно условие две равнини да са успоредни. Ако две пресичащи се прави от една равнина са успоредни съответно на две пресичащи се прави от друга равнина, то двете равнини са успоредни.

IV . Достатъчно условие две равнини да са перпендикулярни. Ако една равнина минава през права, която е перпендикулярна на друга равнина, то двете равнини са перпендикулярни.

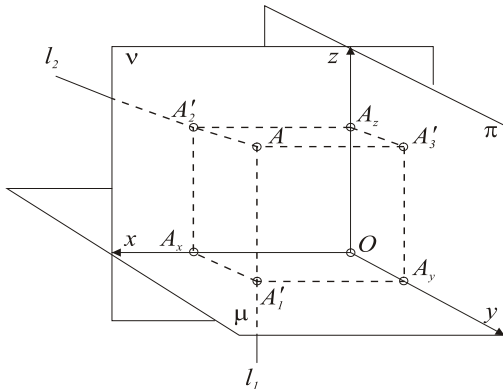
V . Пресечниците на равнина с две успоредни равнини са успоредни прави.

VI . Ако правата g и равнината a са успоредни, то пресечницата на a с произволна равнина, минаваща през g , е успоредна на g .

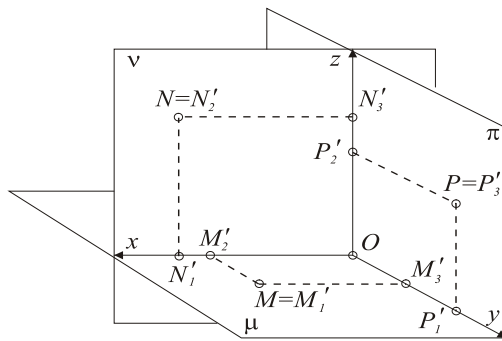
A. Нека A е произволна точка в пространството с координати (x_A, y_A, z_A) относно координатната система $Oxyz$, които се наричат съответно абсциса, ордината и апликата.

Нека точките A'_1, A'_2, A'_3 са ортогоналните проекции на точка A съответно върху координатните равнини m, n, p (Фигура 33.2). От $AA'_1 \perp m \Rightarrow AA'_1 \perp x$ и от

$AA'_2 \perp n \Rightarrow AA'_2 \perp x$. Тогава равнината $\alpha_A(AA'_1A'_2) \perp x$.



Фигура 33.2



Фигура 33.3

Аналогично се аргументират релациите: $b_A(AA'_1A'_3) \perp y, g_A(AA'_2A'_3) \perp z$.

Да означим: $\mathbf{a}_A \cap x = A_x, \mathbf{b}_A \cap y = A_y, \mathbf{g}_A \cap z = A_z$. Тогава

$$\overline{OA_x} = \overline{A_3'A} = x_A, \overline{OA_y} = \overline{A_2'A} = y_A, \overline{OA_z} = \overline{A_1'A} = z_A. \quad (33.1)$$

Теорема 33.1 *Задаването на две от ортогоналните проекции на точка A , определя еднозначно точка A в пространството.*

Доказателство: Наистина, нека за определеност приемем, че са зададени точките A_1' и A_2' . Правите $l_1 \in A_1', l_1 \perp m$ и $l_2 \in A_2', l_2 \perp n$ лежат в равнината α_A , не са успоредни и следователно точката $A = l_1 \cap l_2$ се определя еднозначно.

От Определения 33.1 и 33.2 веднага следват:

$$S \in \mathbf{S} \Leftrightarrow y_S = z_S. \quad I \in i \Leftrightarrow y_I = -z_I.$$

За точки, които лежат в координатните равнини (Фигура 33.3), са в сила твърденията:

Теорема 33.2 *Условията: 2.1) $M \in \mathfrak{m}$; 2.2) $M = M'_1$; 2.3) $M'_2 \in x$; 2.4) $M'_3 \in y$ са еквивалентни.*

Теорема 33.3 *Условията: 3.1) $N \in \mathfrak{n}$; 3.2) $N = N'_2$; 3.3) $N'_1 \in \mathfrak{x}$; 3.4) $N'_3 \in \mathfrak{z}$ са еквивалентни.*

Теорема 33.4 *Условията: 4.1) $P \in p$; 4.2) $P = P'_3$; 4.3) $P'_1 \in y$; 4.4) $P'_2 \in z$ са еквивалентни.*

В. Нека g е права.

В.1. Нека g е произволна права в пространството, която не е перпендикулярна на координатна равнина (Фигура 33.4).

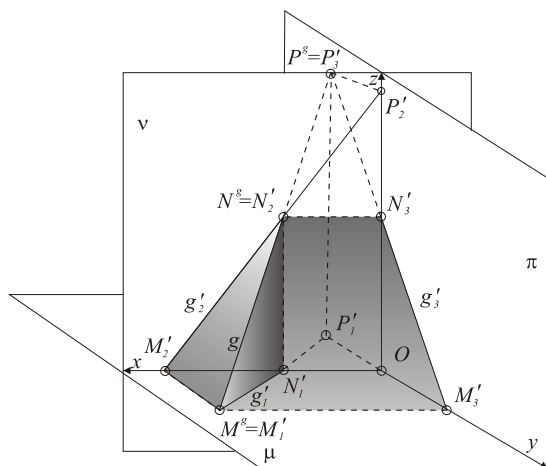
Определение 33.3 Равнините $k^g \ni g, k^g \perp m; t^g \ni g, t^g \perp n; s^g \ni g, s^g \perp p$ се наричат съответно първа, втора, трета проектиращи равнини на правата g .

Определение 33.4 Правите $g_1' = k^g \cap m$, $g_2' = t^g \cap n$, $g_3' = s^g \cap p$ се наричат съответно първа, втора, трета ортогонални проекции на правата g .

Твърдение 33.1 $A \in g \Leftrightarrow A'_i \in g'_i$.

Доказателство: Съгласно Свойство 4. на успоредното проектиране от $A \in g$ следва $A'_i \in g'_i$.

Обратно, нека $A'_i \in g'_i$ за $i=1,2$. Да построим правите $l_1 \ni A'_1, l_1 \perp m$ и $l_2 \ni A'_2, l_2 \perp n$ както и равнините $k^g \ni g'_1, k^g \perp m; t^g \ni g'_2, t^g \perp n$. Ясно е, че $l_1 \in k^g, l_2 \in t^g$. Тогава $(A = l_1 \cap l_2) \in (g = k^g \cap t^g)$.



Фигура 33.4

Определение 33.5 Точките $M^g = g \cap m$, $N^g = g \cap n$, $P^g = g \cap p$ се наричат съответно първа, втора, трета стъпки на правата g .

На Фигура 33.4 са отбелязани трите стъпки на правата g .

В.1.1 Правата g е в общо положение относно координатните оси и координатните равнини. Трите проектиращи равнини са различни и еднозначно определени. Тогава всяка от ортогоналните проекции g'_i е в общо положение относно координатните оси (Фигура 33.4).

Твърдение 33.2 Ако правите a и b не са перпендикулярни на координатна равнина, то правите a и b са успоредни тогава и само тогава, когато две от условията $a'_1 \parallel b'_1$, $a'_2 \parallel b'_2$, $a'_3 \parallel b'_3$ са в сила.

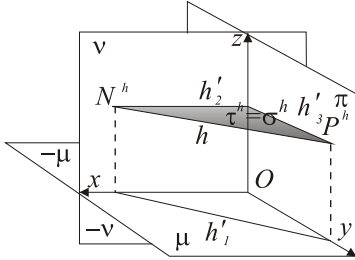
Доказателство: Нека $a \parallel b$. От Свойство 5. на успоредното проектиране следва, че за ортогоналните проекции на успоредните прави a и b , които не са перпендикулярни на координатна равнина можем да запишем: $a'_i \parallel b'_i$, $i=1,2,3$.

Нека сега са изпълнени две от условията $a'_1 \parallel b'_1$, $a'_2 \parallel b'_2$, $a'_3 \parallel b'_3$ напр. $a'_1 \parallel b'_1$, $a'_3 \parallel b'_3$. Тогава като отчетем и Определение 33.3, и Теорема III получаваме $k^a \parallel k^b$, $s^a \parallel s^b$. Тъй като $a = k^a \cap s^a$ и $b = k^b \cap s^b$, то $a \parallel b$.

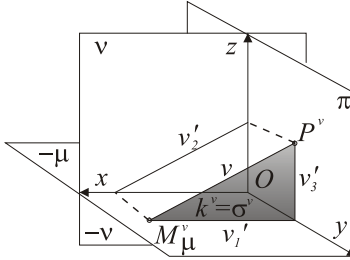
В.1.2 Прави, успоредни на координатна равнина.

Теорема 33.5 Условията : 5.1) $h \parallel m$; 5.2) $h'_2 \parallel x$; 5.3) $h'_3 \parallel n$; 5.4) $h \parallel h'_1$ са еквивалентни.

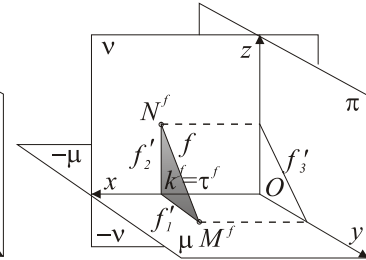
Доказателство: Нека правата h удовлетворява условието $h \parallel m$. Следователно $h \parallel h'_1$ (Теорема VI). За проектиращите равнини t^h и s^h имаме: $t^h(h \times l)$, където $l \perp n$ и $s^h(h \times j)$, където $j \perp p$. От $l \perp n, j \perp p$ следва $l \parallel m$ и $j \parallel m$, поради което t^h и s^h съвпадат и са успоредни на m (Теорема III). Тогава съгласно Теорема V $h'_2 \parallel x$ и $h'_3 \parallel n$.



Фигура 33.5 а)



Фигура 33.5 б)



Фигура 33.5 в)

Нека сега $h'_2 \parallel x$. Тогава равнината $t^h(h'_2 \times l)$, където $l \perp n$, е успоредна на m , а следователно и правата $h \in t^h$ е успоредна на m . Аналогично се доказва, че ако, $h'_3 \parallel n$, то $h \parallel m$ (Фигура 33.5 а)).

Правата h има само втора и трета стъпки.

Теорема 33.6 Условиата : 6.1) $v \parallel n$; 6.2) $v'_1 \parallel x$; 6.3) $v'_3 \parallel z$; 6.4) $v \parallel v'_2$ са еквивалентни.

Доказателство: Нека правата v удовлетворява условието $v \parallel n$. Следователно $v \parallel v'_2$ (Теорема VI). За проектиращите равнини k^v и s^v имаме: $k^v(v \times k)$, където $k \perp m$ и $s^v(v \times j)$, където $j \perp p$. От $k \perp m, j \perp p$ следва $k \parallel n$ и $j \parallel n$, поради което k^v и s^v съвпадат и са успоредни на n (Теорема III). Но тогава съгласно Теорема V $v'_1 \parallel x$ и $v'_3 \parallel z$.

Нека сега $v'_1 \parallel x$. Тогава равнината $k^v(v'_1 \times k)$, където $k \perp m$, е успоредна на n , а следователно и правата $v \in k^v$ е успоредна на n . Аналогично се доказва, че ако $v'_3 \parallel z$, то $v \parallel n$ (Фигура 33.5 б)).

Правата v има само първа и трета стъпки.

Теорема 33.7 Условиата : 7.1) $f \parallel p$; 7.2) $f'_1 \parallel n$; 7.3) $f'_2 \parallel z$; 7.4) $f \parallel f'_3$ са еквивалентни.

Доказателство: Нека правата f удовлетворява условието $f \parallel p$. Следователно $f \parallel f'_3$ (Теорема VI). За проектиращите равнини k^f и t^f имаме: $k^f(f \times k)$, където $k \perp m$ и $t^f(f \times l)$, където $l \perp n$. От $k \perp m, l \perp n$ следва $k \parallel p$ и $l \parallel p$, поради което k^f и t^f съвпадат и са успоредни на p (Теорема III). Но тогава съгласно Теорема V $f'_1 \parallel n$ и $f'_2 \parallel z$.

Нека сега $f'_1 // n$. Тогава равнината $k^f (f'_1 \times k)$, където $k \perp m$, е успоредна на p , а следователно и правата $f \in k^f$ е успоредна на p . Аналогично се доказва, че ако $f'_2 // z$, то $f // p$ (Фигура 33.5 в)).

Правата f има само първа и втора стъпки.

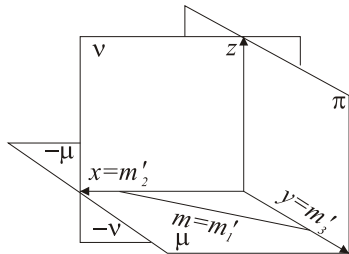
В.1.3 Приви, лежащи в координатна равнина.

Теорема 33.8 Условиата : 8.1) $m \in m$; 8.2) $m'_1 = m$; 8.3) $m'_2 = x$; 8.4) $m'_3 = y$ са еквивалентни.

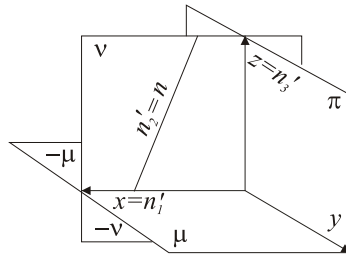
Доказателство: Нека правата $m \in m$. Следователно $t^m = s^m = m$, поради което $m'_1 = m, m'_2 = x, m'_3 = y$ (Фигура 33.6 а)).

От $m'_1 = m$ веднага следва $m \in m$, а от там следват и останалите две условия.

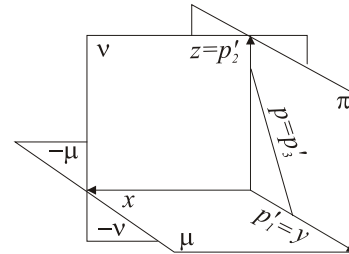
От $m'_2 = x$ и Определения 33.3, 33.4 следва $t^m = m$, което означава, че $m \in m$. От $m'_3 = y$ следва $s^m = m$, което означава, че $m \in m$.



Фигура 33.6 а)



Фигура 33.6 б)



Фигура 33.6 в)

Теорема 33.9 Условиата : 9.1) $n \in n$; 9.2) $n'_1 = x$; 9.3) $n'_2 = n$; 9.4) $n'_3 = z$ са еквивалентни.

Доказателство: Нека правата $n \in n$. Следователно $k^n = s^n = n$, поради което $n'_1 = x, n'_2 = n, n'_3 = z$ (Фигура 33.6 б)).

От $n'_2 = n$ веднага следва $n \in n$, а от там следват и останалите две условия.

От $n'_1 = x$ и Определения 33.3, 33.4 следва $k^n = n$, което означава, че $n \in n$. От $n'_3 = z$ следва $s^n = n$, което означава, че $n \in n$.

Теорема 33.10 Условиата : 10.1) $p \in p$; 10.2) $p'_1 = y$; 10.3) $p'_2 = z$; 10.4) $p'_3 = p$ са еквивалентни.

Доказателство: Нека правата $p \in p$. Следователно $k^p = t^p = p$, поради което $p'_1 = y, p'_2 = z, p'_3 = p$ (Фигура 33.6 в)).

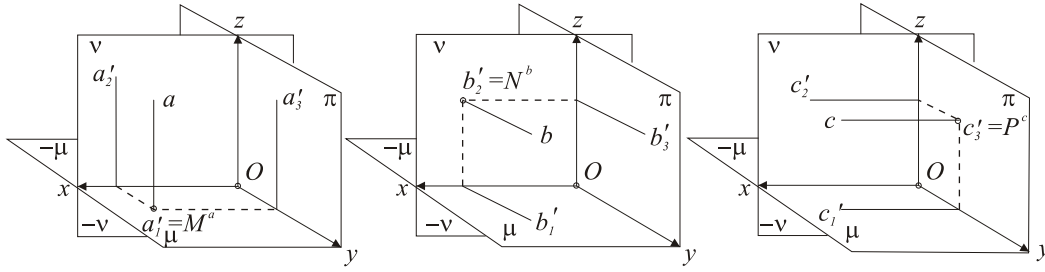
От $p'_3 = p$ веднага следва $p \in p$, а от там следват и останалите две условия.

От $p'_1 = y$ и Определения 33.3, 33.4 следва $k^n = p$, което означава, че $p \in p$. От $p'_2 = z$ следва $t^n = p$, което означава, че $p \in p$.

В.2. Прави, перпендикулярни на координатна равнина.

Теорема 33.11 Условиата : 11.1) $a \perp m$; 11.2) a'_1 е точка, $a'_2 \parallel z$ и $(a'_1, a'_2) \perp x$; 11.3) a'_1 е точка, $a'_3 \parallel z$ и $(a'_1, a'_3) \wedge y$ са еквивалентни.

Доказателство: Нека правата $a \perp m$; ($a \parallel z$). Тъй като a е успоредна на проекционното направление, то съгласно Свойство 2 на успоредното проектиране първата ортогонална проекция a'_1 на a върху m е точката $a \cap m$ (Фигура 33.7 а)).



Фигура 33.7 а)

Фигура 33.7 б)

Фигура 33.7 в)

От $a \parallel z$, $z \in n, z \in p$ и Теорема I следва $a \parallel n$, $a \parallel p$. Тогава съгласно Теорема VI $a'_2 \parallel a'_3 \parallel z$. От $a \perp m$ следва $t^a \perp m, s^a \perp m$. Освен това по определение $t^a \perp n, s^a \perp p$. Следователно $t^a \perp x, s^a \perp y$. В същото време $t^a = (a, a'_2) = (a'_1, a'_2), s^a = (a, a'_3) = (a'_1, a'_3)$. Значи $(a'_2, a'_1) \perp x$, $(a'_3, a'_1) \perp y$.

Нека сега a'_1 е точка, $a'_2 \parallel z$ и $(a'_1, a'_2) \perp x$. Съществува единствена права $a \perp m$, $a \ni a'_1$, за която a'_1, a'_2 са съответно първа и втора ортогонални проекции. От тук и направените по-горе разсъждения следва, че е в сила и третото условие.

Аналогично се доказва как от условие 11.3 следват 11.1 и 11.2.

Очевидно $A \in a \Leftrightarrow A'_1 = a'_1$.

Правата a има само първа стъпка.

Теорема 33.12 Условиата : 12.1) $b \perp n$; 12.2) b'_2 е точка, $b'_1 \parallel y$ и $(b'_1, b'_2) \perp x$; 12.3) b'_2 е точка, $b'_3 \parallel y$ и $(b'_2, b'_3) \wedge z$ са еквивалентни.

Доказателство: Нека правата $b \wedge n$ ($b \parallel y$). Тъй като b е успоредна на проекционното направление, то съгласно Свойство 2 на успоредното проектиране втората ортогонална проекция b'_2 на b върху n е точката $b \cap n$ (Фигура 33.7 б)).

От $b \parallel y$, $y \in m, y \in p$ и Теорема I следва $b \parallel m$, $b \parallel p$. Тогава съгласно Теорема VI $b'_1 \parallel b'_3 \parallel y$.

От $b \perp n$ следва $k^b \perp n, s^b \perp n$. Освен това по определение $k^b \perp m, s^b \perp p$. Следователно $k^b \perp x, s^b \perp z$. В същото време $k^b = (b, b'_1) = (b'_1, b'_2), s^b = (b, b'_3) = (b'_2, b'_3)$. Значи $(b'_1, b'_2) \perp x$, $(b'_2, b'_3) \perp z$.

Нека сега b_2' е точка, $b_1' \parallel y$ и $(b_1', b_2') \perp x$. Съществува единствена права $b \perp n, b \ni b_2'$, за която b_1', b_2' са съответно първа и втора ортогонални проекции. От тук и направените по-горе разсъждения следва, че е в сила и третото условие.

Аналогично се доказва как от условие 12.3 следват 12.1 и 12.2.

Очевидно $B \in b \Leftrightarrow B_2' = b_2'$.

Правата b има само втора стъпка.

Теорема 33.13 Условиата : 13.1) $c \perp p$; 13.2) c_3' е точка, $c_1' \parallel x$ и $(c_1', c_3') \perp y$; 13.3) c_3' е точка, $c_2' \parallel x$ и $(c_2', c_3') \wedge z$ са еквивалентни.

Доказателство: Нека правата $c \wedge p$ ($c \parallel x$) Тъй като c е успоредна на проекционното направление, то съгласно Свойство 2 на успоредното проектиране трета ортогонална проекция c_3' на c върху p е точката $c \cap p$ (Фигура 33.7 в)).

От $c \parallel x$, $x \in m, x \in n$ и Теорема I следва $c \parallel m$ и $c \parallel n$ Тогава съгласно Теорема VI $c_1' \parallel c_2' \parallel x$.

От $c \perp p$ следва $k^c \perp p, t^c \perp p$. Освен това по определение $k^c \perp m, t^c \perp n$. Следователно $k^c \perp y, s^c \perp z$. В същото време $k^c = (c, c_1') = (c_1', c_3'), t^c = (c, c_2') = (c_2', c_3')$. Значи $(c_1', c_3') \perp y, (c_2', c_3') \perp z$.

Нека сега c_3' е точка, $c_1' \parallel x$ и $(c_1', c_3') \perp y$. Съществува единствена права $c \perp p, c \ni c_3'$, за която c_1', c_3' са съответно първа и трета ортогонални проекции. От тук и направените по-горе разсъждения следва, че е в сила и третото условие.

Аналогично се доказва как от условие 13.3 следват 13.1 и 13.2.

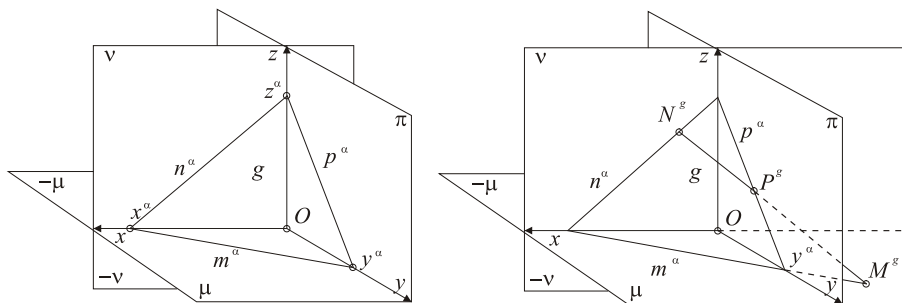
Очевидно $C \in c \Leftrightarrow C_3' = c_3'$.

Правата c има само трета стъпка.

С. Нека a е произволна равнина в пространството. Тя може да бъде зададена с три неколинеарни точки или неинцидентни точка и права, или две пресичащи се прави, или две успоредни прави. Съществена роля имат следните точки и прави от равнината a .

$$x \cap a = X^a(x^a, 0, 0), y \cap a = Y^a(0, y^a, 0), z \cap a = Z^a(0, 0, z^a).$$

Обикновено равнината a се задава с трите точки X^a, Y^a, Z^a като се записват само онези от координатите им, които са различни от нула или $a[x^a, y^a, z^a]$ ((Фигура 33.8).



Фигура 33.8

Фигура 33.9

Определение 33.6 Правите $m^a = a \cap m$, $n^a = a \cap n$, $p^a = a \cap p$ се наричат съответно първа, втора, трета дъри на равнината a .

Очевидно $m^a = X^a Y^a$, $n^a = X^a Z^a$, $p^a = Y^a Z^a$.

От необходимото и достатъчно условие за инцидентност на права и равнина следва

Твърдение 33.3 $g \in a$ тогава и само тогава, когато две от условията

$M^g \in m^a$, $N^g \in n^a$, $P^g \in p^a$ са изпълнени.

С.1. Равнината е успоредна на координатна ос.

Тъй като $z \perp m$, то $b \wedge m \in b \parallel z$. Тъй като $y \perp n$, то $g \wedge m \in g \parallel y$. Тъй като $x \perp p$, то $d \wedge p \in d \parallel x$.

С.1.1 Равнината $b \parallel z$ ($b \wedge m$), т.е. $b[x^b, y^b, \infty]$. От $z \in n$, $z \in p$ и Теорема VI следва $n^b \parallel p^b \parallel z$.

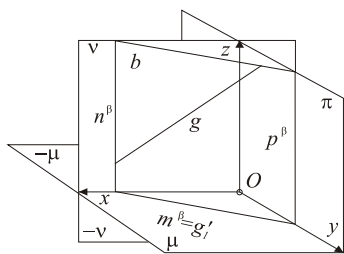
Твърдение 33.4 Ако равнината $b \perp m$, то $g \in b \Leftrightarrow g'_1 = m^b$.

Верността на твърдението следва веднага от факта, че $k^g = b$ (Фигура 33.10 а)).

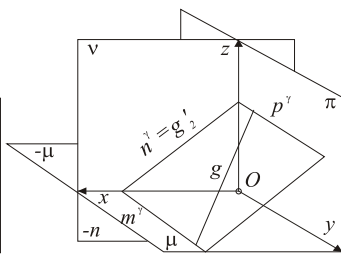
С.1.2 Равнината $g \parallel y$ ($g \wedge n$), т.е. $g[x^g, \infty, z^g]$. От $y \in m$, $y \in p$ и Теорема VI следва $m^g \parallel p^g \parallel y$.

Твърдение 33.5 Ако равнината $g \perp n$, то $g \in g \Leftrightarrow g'_2 = n^g$.

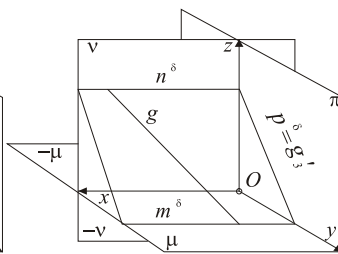
Верността на твърдението следва веднага от факта, че $t^g = g$ (Фигура 33.10 б)).



Фигура 33.10 а)



Фигура 33.10 б)



Фигура 33.10 в)

С.1.3 Равнината $d \parallel x$ ($d \wedge p$), т.е. $d[\infty, y^d, z^d]$. От $x \in m$, $x \in n$ и Теорема VI следва $m^d \parallel n^d \parallel x$.

Твърдение 33.6 Ако равнината $d \perp p$, то $g \in d \Leftrightarrow g'_3 = p^d$.

Верността на твърдението следва веднага от факта, че $s^g = d$ (Фигура 33.10 в)).

С.2. Равнината е успоредна на координатна равнина.

С.2.1 Равнината $e \parallel m$, ($e \parallel x$, $e \parallel y$), т.е. $e[\infty, \infty, z^e]$. Следователно равнината е няма първа дъря, а съгласно Теорема V $n^e \parallel x$ и $p^e \parallel y$.

Въз основа на Твърдения 33.4, 33.5 непосредствено следва:

Твърдение 33.7 Ако равнината $e \parallel m$, то $g \in e \Leftrightarrow g'_2 = n^e$, $g'_3 = p^e$

(Фигура 33.11 а).

С.2.2 Равнината $r \parallel n$ ($r \parallel x, r \parallel z$), т.е. $r[\infty, y^r, \infty]$. Следователно равнината r няма втора дия, а съгласно Теорема V $m^r \parallel x, p^r \parallel z$.

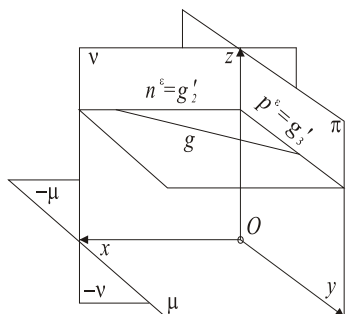
Въз основа на Твърдения 33.3, 33.5 непосредствено следва:

Твърдение 33.8 Ако равнината $r \parallel n$, то $g \in r \Leftrightarrow g'_1 = m^r, g'_3 = p^r$ (Фигура 33.11 б)).

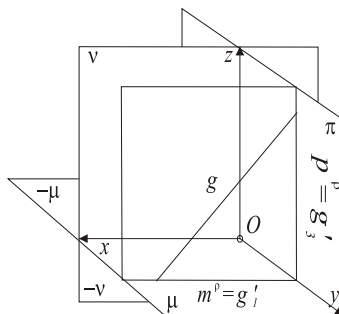
С.2.3 Равнината $s \parallel p$ ($s \parallel y, s \parallel z$), т.е. $s[x^s, \bullet, \bullet]$. Следователно равнината σ няма трета дия, а съгласно Теорема V $m^s \parallel y, n^s \parallel z$.

Въз основа на Твърдения 33.3, 33.4 непосредствено следва:

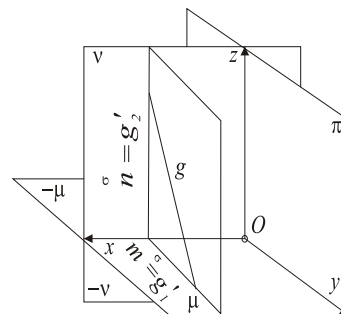
Твърдение 33.9 Ако равнината $s \parallel p$, то $g \in s \Leftrightarrow g'_1 = m^s, g'_2 = n^s$ (Фигура 33.11 в)).



Фигура 33.11 а)



Фигура 33.11 б)



Фигура 33.11 в)

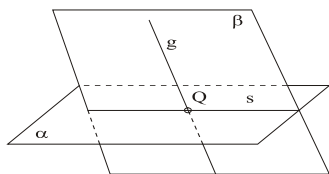
Д Пресечница на две равнини .

Нека a и b са произволни равнини и $a \cap b = s$. От $s \in a, s \in b$ и Твърдение 33.3 следват: $M^s = m^a \cap m^b, N^s = n^a \cap n^b, P^s = p^a \cap p^b$.

Правата s се определя еднозначно чрез две от стъпките си.

Е Пробод на права и равнина.

Нека g и a са съответно права и равнина, които не са успоредни. Следователно те имат обща точка, която да отбележим $Q = g \cap a$.



Фигура 33.12

Определянето на точката Q включва следната последователност от построения:

1. Построяваме равнина $b \ni g$.

Удобно е равнината b да съвпада с някоя от проектиращите равнини на g .

2. Построяваме пресечницата на двете равнини, т.е. намираме правата $s = a \cap b$.

3. Точката $Q = s \cap g$ е търсената (Фигура 33.12).

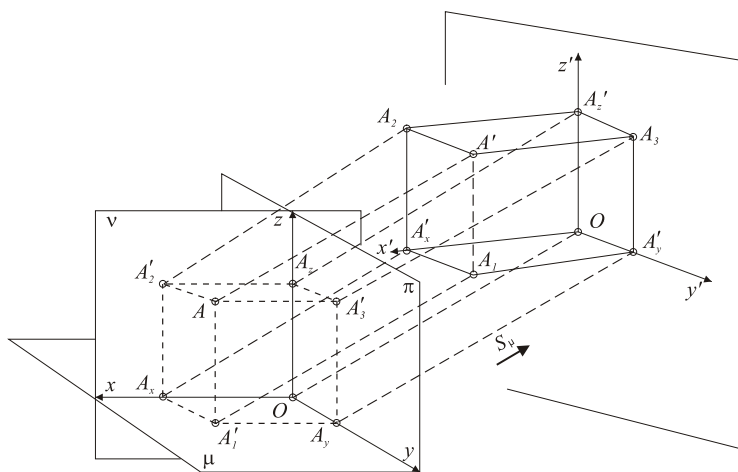
Координатната система участва съществено в проекционните методи, които ще изучаваме. Тя е част от проекционния апарат.

34 Аксонометрия. Определение, видове аксонометрични проекции

Определение 34.1 Аксонометрията е проекционен метод, при който изображеният обект се проектира от безкраен център S_∞ върху една проекционна равнина l ($S_\infty \notin l$) заедно с ортонормираната координатна система $Oxyz$, към която е отнесен в пространството и ортогоналните си проекции върху координатните й равнини.

Проекционната равнина се нарича още чертежна или аксонометрична. Нека $S_\infty x \cap l = x'$, $S_\infty y \cap l = y'$, $S_\infty z \cap l = z'$, $S_\infty O \cap l = O'$. Фигурата $O'x'y'z'$ се нарича аксонометричен кръст.

Нека A е произволна точка в пространството (Фигура 34.1).



Фигура 34.1

Точката $S_\infty A \cap l = A'$ се нарича главен аксонометричен образ на A . Точките $S_\infty A_1 \cap l = A'_1$, $S_\infty A_2 \cap l = A'_2$, $S_\infty A_3 \cap l = A'_3$ се наричат съответно първи, втори, трети вторични аксонометрични образи на A .

Тъй като при успоредно проектиране успоредните прави се проектират в успоредни прави, то

$$A'A_1 \parallel z', A'A_2 \parallel y', A'A_3 \parallel x' \quad (34.1)$$

и стените на правоъгълния паралелепипед $A'_1A_xOA_yAA'_2A_zA'_3$ се изобразяват в чертежната равнина в следните двойки еднакви успоредници :

$$\begin{aligned} O'A'_x A_1 A'_y & \text{ и } A'_z A_2 A'_A_3 \\ O'A'_y A_3 A'_z & \text{ и } A'_x A_1 A'_A_2 \\ O'A'_z A_2 A'_x & \text{ и } A'_y A_3 A'_A_1 \end{aligned} \quad (34.2)$$

Съгласно Теорема 33.1 и свойствата на успоредното проектиране задаването в чертежната

равнина на два от аксонометричните образи на точката определя еднозначно точката в пространството. Прието е точката (както и всеки изобразяван обект) да се задава с главния и един от вторичните си образи, удовлетворяващи условията (34.1).

Нека с e означим единичната отсечка за координатната система $Oxyz$. Тогава имаме: $OE_x = OE_y = OE_z = e$, където $E_x \in x, E_y \in y, E_z \in z$.

Отсечките $O'E'_x = e_x \in x', O'E'_y = e_y \in y', O'E'_z = e_z \in z'$ се наричат **аксонометрични единици**. В общия случай тези мерни единици са различни за различните оси. Тази особеност е дала и името аксонометрия на разглеждания проекционен метод.

Отчитайки отново Свойство 6 на успоредното проектиране можем да запишем:

$$\begin{aligned}\frac{x'_A}{x_A} &= \frac{\overline{O'A'_x}}{\overline{OA_x}} = \frac{\overline{O'E'_x}}{\overline{OE_x}} = \frac{e_x}{e} = p, \\ \frac{y'_A}{y_A} &= \frac{\overline{O'A'_y}}{\overline{OA_y}} = \frac{\overline{O'E'_y}}{\overline{OE_y}} = \frac{e_y}{e} = q, \\ \frac{z'_A}{z_A} &= \frac{\overline{O'A'_z}}{\overline{OA_z}} = \frac{\overline{O'E'_z}}{\overline{OE_z}} = \frac{e_z}{e} = r.\end{aligned}\tag{34.3}$$

Числата p, q, r се наричат **коэффициенти на изменение**.

Теорема 34.1 Теорема на Полке. *Ако в една равнина са дадени три две по две неколинеарни отсечки e_x, e_y, e_z с общ край, то в пространството могат да се намерят три взаимно перпендикулярни и равни отсечки с общ край и подходяща права s , така че като проектираме тези отсечки успоредно на правата s върху изходната равнина да се получат дадените отсечки e_x, e_y, e_z .*

Теоремата на Полке позволява да изберем в чертежната равнина произволно аксонометричния кръст, както и коефициентите на изменение. С тяхното фиксиране се избира конкретна аксонометрична проекция.

Видове аксонометрични проекции

1. Съгласно взаимното положение на чертежната равнина и направлението на проектиране аксонометричните проекции биват:

1.1 **Правоъгълна аксонометрия** – аксонометрия, при която направлението на проектиране е перпендикулярно на чертежната равнина.

1.2 **Наведена аксонометрия** – аксонометрия, при която направлението на проектиране не е перпендикулярно на чертежната равнина.

2. Съгласно връзките между коефициентите на изменение аксонометричните проекции биват:

2.1 **Изометрия** – аксонометрия, за която $p = q = r$.

2.2 **Диметрия** – аксонометрия, за която два от коефициентите на изменение са равни.

2.3 **Триметрия** – аксонометрия, за която всеки два от коефициентите на изменение са различни.

Нека $A(3,4,5)$ е точка в пространството. Изобразяването на точката в чертежната равнина, т.е. намирането на аксонометричните ѝ образи се предхожда от построяването на точките A'_x, A'_y, A'_z . Това може да стане по следните два начина:

1. Използват се аксонометричните единици e_x, e_y, e_z . Тогава $O'A'_x = 3e_x, O'A'_y = 4e_y, O'A'_z = 5e_z$.

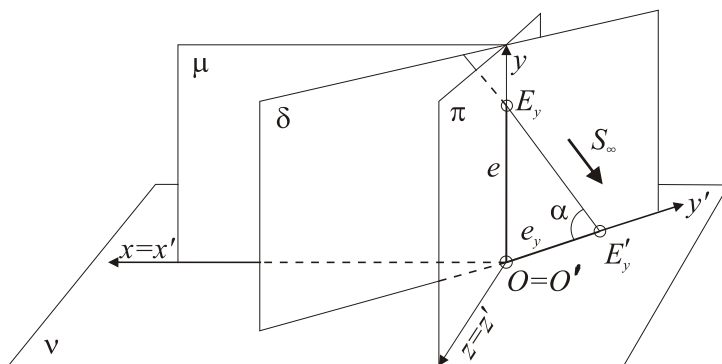
2. Използват се коефициентите на изменение p, q, r и равенствата (34.3). Тогава $O'A'_x = 3p.e, O'A'_y = 4q.e, O'A'_z = 5r.e$.

Числата $x'_A = p.x_A, y'_A = q.y_A, z'_A = r.z_A$ ще наречем **адаптирани координати на точка A**.

От наведените аксонометрични проекции най-популярни заради широкото им приложение са тези, при които чертежната равнина съвпада с някоя от координатните равнини.

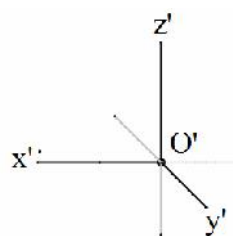
1. **Кабинетна проекция.** Чертежната равнина съвпада с Π , от където веднага следват $O' = O, x' = x, z' = z$, което означава $x' \perp z', p = r = 1$ (Фигура 34.2).

Да означим с d ъглополовящата равнина на двустенния ъгъл $\angle(m, p)$ и нека безкрайният център на проектиране $S_\infty \in d$. Следователно $(S_\infty, y) \cap \Pi = d \cap \Pi = y'$. От този избор на $S_\infty \in d$ следва, че третата аксонометрична ос y' е ъглополовяща на ъгъла между другите две аксонометрични оси x' и z' (Фигура 34.3). Уточняването на центъра на проектиране $S_\infty \in d$ е свързано с неизвестния за сега коефициент на изменение q .

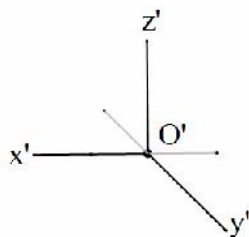


Фигура 34.2

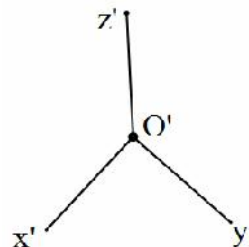
Избираме $S_\infty \in d$, така че $\cotga = \frac{e_y}{e} = q = \frac{1}{2}$. Параметрите на кабинетната проекция са: $\angle(x', z') = 90^\circ, \angle(x', y') = \angle(y', z') = 135^\circ; p = r = 1, q = \frac{1}{2}$.



Фигура 34.3



Фигура 34.4



Фигура 34.5

2. **Кавалиерна перспектива.** Кавалиерната перспектива се отличава от кабинетната проекция само с последния избор, касаещ ъгъл α . Сега избираме

$\cot \alpha = \frac{e_y}{e} = q = 1$ (Фигура 34.4). Така параметрите на кавалиерната перспектива са :

$$\angle(x', z') = 90^\circ, \angle(x', y') = \angle(y', z') = 135^\circ; p = q = r = 1.$$

Единственото отличие (стойността на коефициента q) между кабинетната проекция и кавалиерната перспектива и възможностите на динамичните чертежи позволяват бърз преход на изображението на обект от едната в другата проекция. За това е достатъчна подходящата стратегия при изработване на динамичния чертеж.

3. **Военна перспектива.** Ако в конфигурацията на кавалиерната перспектива разменим ролята на осите y и z получаваме аксонометрия, която се нарича военна перспектива. Сега $\angle(x', y') = 90^\circ$, $\angle(x', z') = \angle(y', z') = 135^\circ; p = q = r = 1$. (Фигура 34.5).

35 Изобразяване на фигури, лежащи в координатната равнина π , на многостени и валчести тела с основи в π в кабинетна проекция и кавалиерна перспектива

Кабинетната проекция се оказва най-подходяща при обучението по стереометрия. Помощните чертежи, които се правят при решаване на стереометричните задачи се основават на параметрите на кабинетната проекция като основата на изобразяваното тяло се поставя в координатната равнина π . Ето защо в тези случаи на кабинетна проекция се работи с първите вторични аксонометрични образи на изобразяваните обекти.

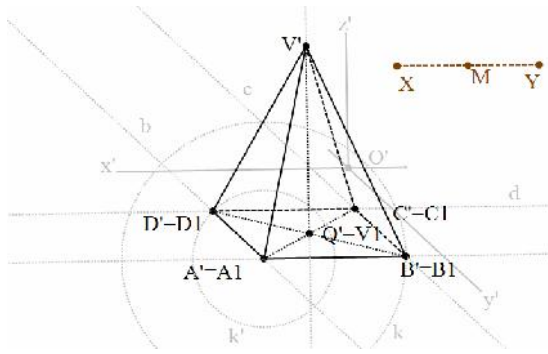
Задача 35.1. Да се изобрази правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ с основен ръб и височина съответно равни на a и h .

Решение Знаем, че основата на правилната пирамида е правилен многоъгълник и ортогоналната проекция на върха ѝ съвпада с центъра на основата.

Значи основата на правилната четириъгълна пирамида $ABCDV$ е квадрат и ортогоналната проекция на върха ѝ V съвпада с центъра на основата – точка $Q = AC \cap BD$. Ето защо разполагаме основата в хоризонталната координатна равнина π като изискваме $AB \parallel x$.

Следователно $A'B' \parallel x'$, $A'B' = a$ ($p = 1$) (Фигура 35.1). Тъй като $AD \perp AB$, то $AD \parallel y$.

Тогава $A'D' \parallel y'$ и $\angle D'A'B' = 135^\circ$. Точка $D' = b \cap k'(A')$, $r = XM$, където $XM = q \cdot XY$. За кабинетна проекция $XM = 0,5 \cdot XY$ (Фигура 35.1 а), а за кавалиерна перспектива $XM = XY$ (Фигура 35.1 б).



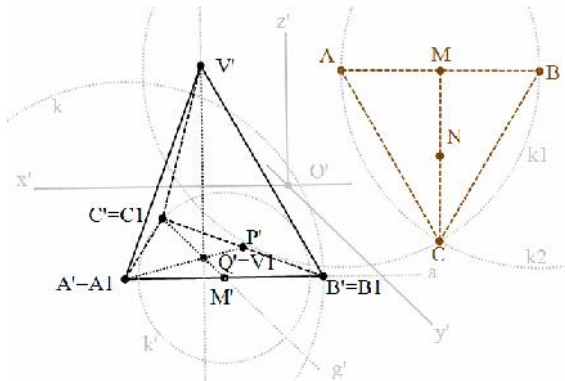
Фигура 35.1 а)

Отчитайки, че основата е в π веднага отбелязваме първите вторични аксонометрични образи на основните ѝ върхове (те съвпадат с главните си аксонометрични образи).

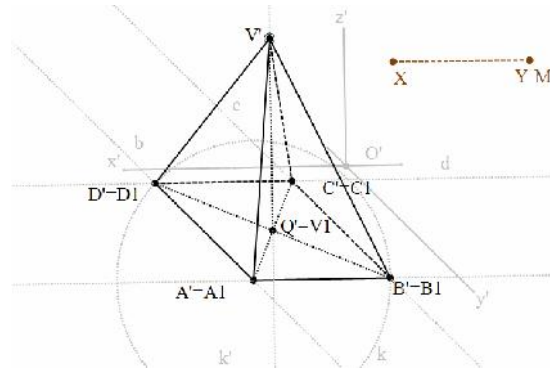
Височината на пирамидата $VQ \perp \pi$, поради което $V'_1 = Q$. Ето защо за аксонометричните образи на върха V имаме: $V_1 = Q_1 = Q'$, а $V_1V' \parallel z'$, $V_1V' = h$.

Задача 35.2. Да се изобрази правилна триъгълна пирамида $ABCV$ с основен ръб и височина съответно равни на a и h .

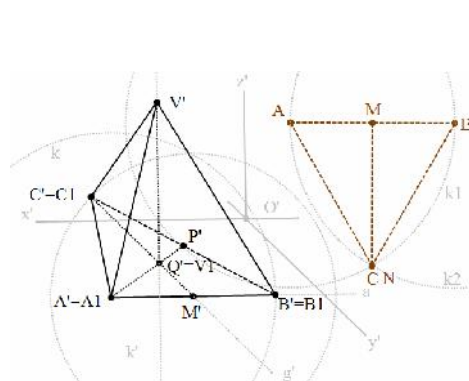
Решение Равностранният триъгълник ABC , който е основа на пирамидата, разполагаме в хоризонталната координатна равнина π като изискваме $AB \parallel x$.



Фигура 35.2 а)



Фигура 35.1 б)



Фигура 35.2 б)

Следователно $A'B' \parallel x'$, $A'B' = a$ ($p=1$) (Фигури 35.2). Нека M е среда на AB . Следователно $CM \perp AB$, т.е. $CM \parallel y$. Тъй като успоредното проектиране изобразява средата на дадена отсечка в средата на образа ѝ, то и точката M' е среда на отсечката $A'B'$. Ето защо построяваме права g' през точка M' и $g' \parallel y'$. Точка $C' = g' \cap k'(M', r=MN)$, където $MN = \frac{1}{2} MC$. С това осигуряваме $\angle A'M'C' = 45^\circ$ и $C'M' = \frac{1}{2} CM = MN$. За кабинетна проекция $C'M' = 0,5 CM = MN$ (Фигура 35.2 а), а за кавалиерна перспектива $C'M' = CM = MN$ (Фигура 35.2 б).

Центърът на равностранния триъгълник съвпада с медицентъра му Q , поради което лесно построяваме Q' като пресечна точка на две от медианите на триъгълника $A'B'C'$.

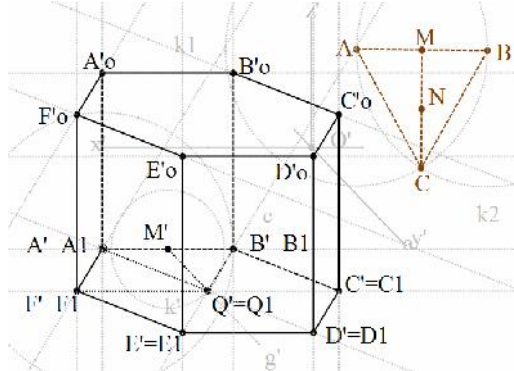
Тогава както и в Задача 35.1 за аксонометричните образи на върха V имаме :

$$V_1 = Q_1 = Q', \text{ а } V_1V' \parallel z', V_1V' = h.$$

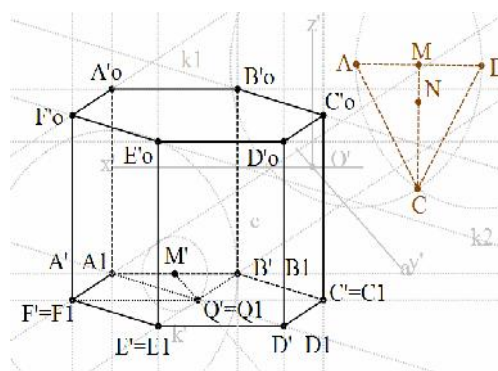
Задача 35.3. Да се изобрази правилна шестоъгълна призма $ABCDEF^\circ B^\circ C^\circ D^\circ E^\circ F^\circ$ с основен ръб и височина съответно равни на a и h .

Решение Правилният шестоъгълник $ABCDEF$ се разделя от големите си диагонали на 6 еднакви равностранни триъгълници с общ връх $Q = AD \cap BE \cap CF$. Нека един от тях е ABQ (Фигури 35.3). Разполагаме и изобразяваме равностранния триъгълник ABQ така както е описано в Задача 35.2.

Фигурата $ABQF$ е ромб. Нейният аксонометричен образ е успоредник. Така определяме четвъртия връх F' на успоредника $A'B'Q'F'$.



Фигура 35.3 а)



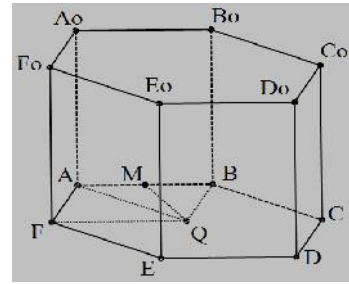
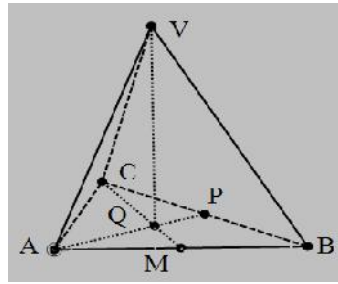
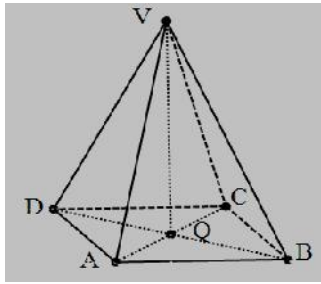
Фигура 35.3 б)

Точката Q е среда на трите построени диагонала. Следователно точките D', E', C' построяваме като централно симетрични съответно на точките A', B', F' относно Q' .

Околните ръбове на призмата са перпендикулярни на равнината на основата – m , т.е. те са успоредни на оста z . Следователно главните им аксонометрични образи ще бъдат успоредни на аксонометричната ос z' , а дължините им ще бъдат равни на h или $A'A_0 \parallel B'B_0 \parallel C'C_0 \parallel D'D_0 \parallel E'E_0 \parallel F'F_0 \parallel z'$, $A'A_0 = B'B_0 = C'C_0 = D'D_0 = E'E_0 = F'F_0 = h$. Първите ортогонални проекции на околните ръбове на пирамидата съвпадат със съответните върхове на основата $ABCDEF$ (виж Теорема 33.11). Значи $A_1^\circ = A_1, B_1^\circ = B_1, C_1^\circ = C_1, D_1^\circ = D_1, E_1^\circ = E_1, F_1^\circ = F_1$.

Шестоъгълната призма е представена на Фигура 35.3 а) е в кабинетна проекция, а на Фигура 35.3 б) е в аксонометрия при $q=0,3$.

Разглежданията в по-горе описаните три задачи дават опорните точки при изготвяне на помощни чертежи, съпровождащи решенията на стереометричните задачи. В тези помощни чертежи вече не е необходимо да се чертаят аксонометричните оси и да се отбелязват и вторичните аксонометрични образи на върховете. На Фигури 35.1 в), 35.2 в), 35.3 в) са представени трите изобразявани по-горе тела при опростени означения, без аксонометричните оси и помощните линии, постигнато само чрез смяна на фона. Но все пак ще се отделя време, за да се прави нов чертеж за всяка задача.

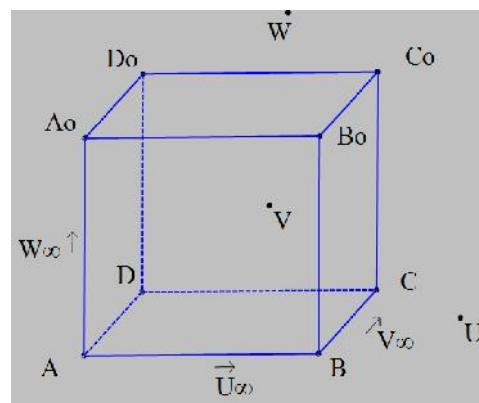
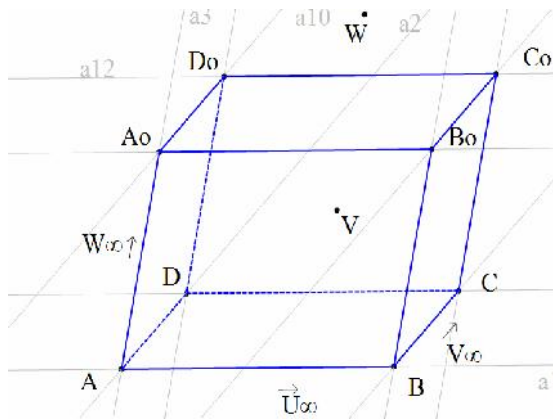


Фигура 35.1 в)

Фигура 35.2 в)

Фигура 35.3 в)

Използвайки възможностите на ДГС Sam ние предлагаме следния „универсален паралелепипед” (Фигура 35.4 а)), от който без загуба на време ще се визуализира цялото разнообразие на четириъгълни и триъгълни призми, пресечени пирамиди и пирамиди. Той може да се разглежда като главен аксонометричен образ на произволен паралелепипед в обща аксонометрия, където трите групи успоредни ръбове са успоредни на вертуалните аксонометрични оси.



Фигура 35.4 а)

Фигура 35.4 б)

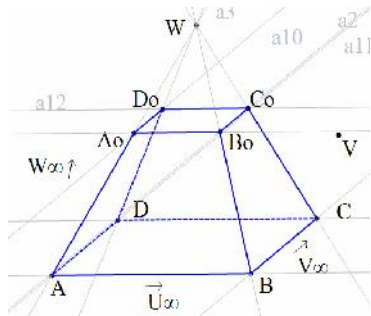
На Фигура 35.4 а) присъстват всички линии, с помощта на които е построен „универсалния паралелепипед“, докато на Фигура 35.4 б) изборът на фон, съвпадащ с техния цвят, ги скрива.

Основата $ABCD$ на „универсалния паралелепипед“ е „универсалният успоредник“, въведен в §6 и използван вече многократно. Това ни позволява да променяме вида на основата (от успоредник в трапец или произволен четириъгълник), прилагайки специалната функция на ДГС Sam „Размяна на крайна & безкрайна точки“ или чрез динамика върху свободните точки U или V и съответно B или D да я трансформираме в триъгълник. Ротацията на безкрайните точки U_{∞} и V_{∞} променя ъгъла на успоредника, но означава и промяна на ъгъла между аксонометричните оси x' и y' , на които са успоредни страните на успоредника.

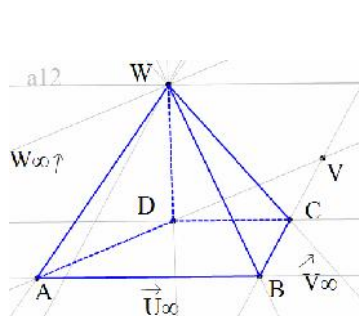
Околните ръбове са построени чрез инструмента „права през две точки“ като едната е произволна безкрайна точка W_{∞} , а втората е връх на основата - универсален успоредник. Ротацията на безкрайната точка W_{∞} влияе върху околните ръбове и трансформира наклонения паралелепипед в правоъгълен. Размяната на точка W_{∞} с произволна крайна точка W трансформира паралелепипеда в пресечена пирамида или пирамида с връх W .

Един от върховете на втората основа на паралелепипеда (например точка A_0) е избран произволно върху правата $A W_\infty$. Останалите основни ръбове и върхове са уточнени с помощта на инструмента „успоредни линии“. Този подход осигурява при промяна на вида на първата основа, втората да се трансформира във фигура, подобна на първата основа.

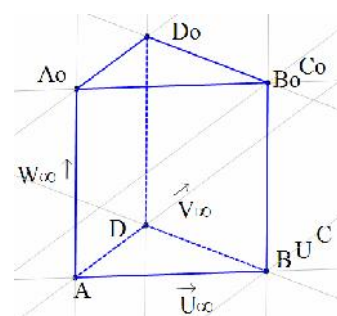
Презентацията на динамичния чертеж, чийто кадър е Фигура 35.4 а), ще покаже последователността на всички построения. Следващите примери, показват някои от възможните свързани фигури



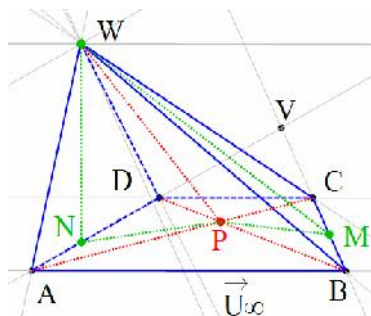
Фигура 35.5 а)



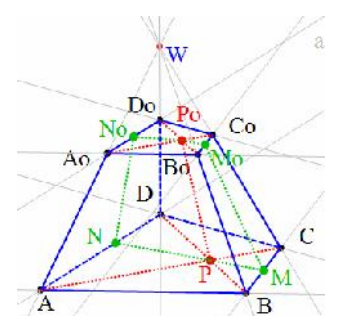
Фигура 35.5 б)



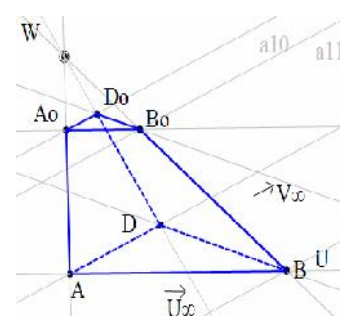
Фигура 35.5 в)



Фигура 35.5 г)



Фигура 35.5 д)



Фигура 35.5 е)

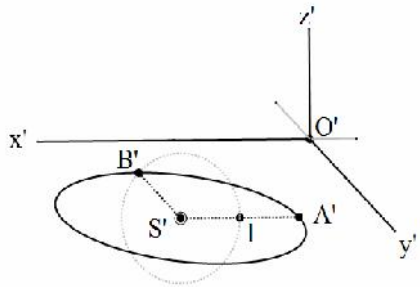
Чрез Фигура 35.5 г), илюстрираща пирамида с основа трапец и околна стена (ADW), перпендикулярна на основата и Фигура 35.5 д), представяща пресечена пирамида с основни произволни четириъгълници, показваме съхраняването на допълнителните построения.

Задача 35.4 Да се изобрази окръжност k , лежаща в проекционната равнина m , с даден център S и даден радиус R .

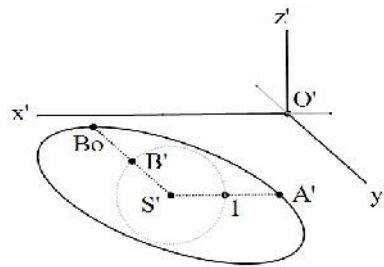
Решение Тъй като при успоредно проектиране афинните свойства на коничните сечения се запазват, то аксонометричният образ на окръжността е елипс. ДГС Sam облекчава изобразяването на елипсата, защото е достатъчно да зададем двойка спрегнати полудиаметри. Такива са: $S'A' = p R = R$ и успореден на оста x' ; $S'B' = q R$ и успореден на оста y' , защото $SA \perp SB$ са спрегнати диаметри за окръжността

За изчертаването на елипсата се използва инструмента „елипс с център и два спрегнати диаметъра“ като само точките O' , A' , B' са достатъчни.

На Фигура 35.8 а) е изобразена елипсата – аксонометричен образ на окръжността в кабинетна проекция, а на Фигура 35.8 б) – в кавалиерна перспектива. И тук както при Фигури 35.1, 35.2 или 35.3 е достатъчно да се начертае само единият динамичен чертеж, а другият се получава от него.

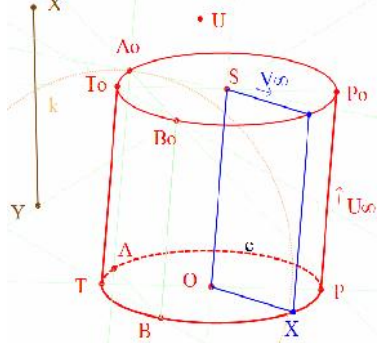


Фигура 35.6 а)

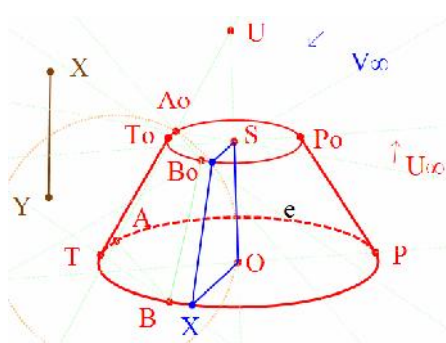


Фигура 35.6 б)

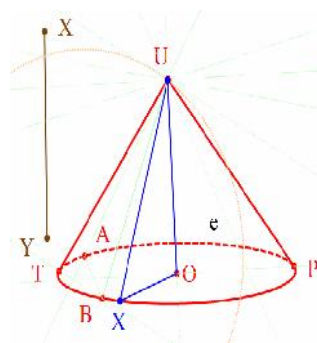
Идеята, вложена при построяването на универсалния паралелепипед, е приложима и при създаване на динамичен чертеж на „универсален цилиндър“ (Фигура 35.6 а)), който да предлага бърза визуализация на цилиндри, пресечени конуси, конуси, вписани и описани около тях многостени, когато се решават задачи, свързани с тях. Елипсата e се задава чрез два спрегнати полудиаметра OA и OB и се изчертава с помощта на инструмента „елипса с център и два спрегнати диаметра“. Точка X описва елипсата, което позволява промяна на положението на основното сечение. На Фигури 35.7 дължината на образувателната AA_0 се



Фигура 35.7 а)

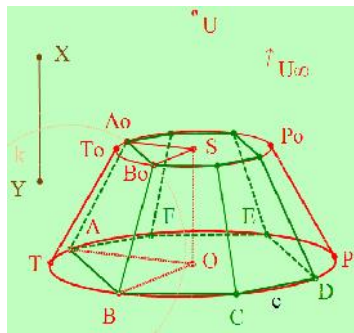


Фигура 35.7 б)

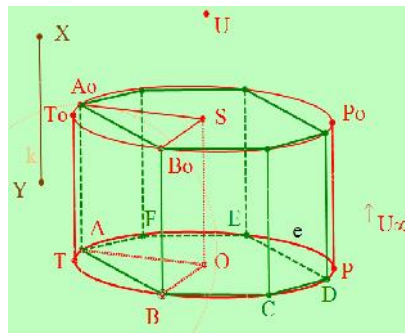


Фигура 35.7 в)

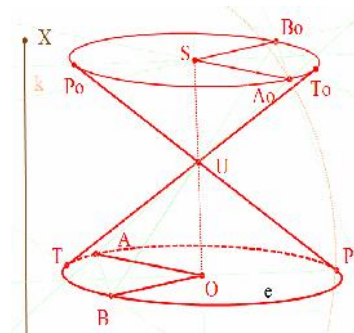
определя дистанционно чрез отсечката XY , защото точка A_0 е определена като пресечна точка на правата AU_∞ с окръжността $k(A, r=XY)$.



Фигура 35.7 г)



Фигура 35.7 д)

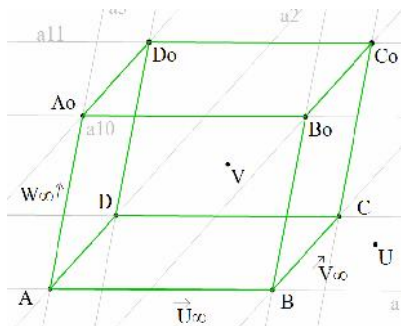


Фигура 35.7 е)

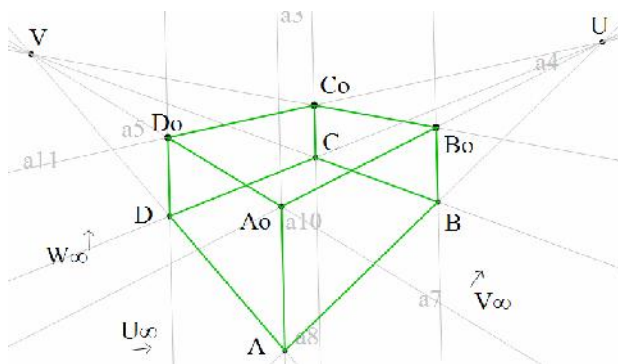
Да разгледаме **втора конструкция на паралелепипеда $ABCD A_0 B_0 C_0 D_0$.**

Нека сега втората основа $A_0 B_0 C_0 D_0$ да бъде построена чрез използване на инструмента „права през две точки“, т.е. : 1) Построяват се правите $A_0 U_\infty$ и $A_0 V_\infty$;

2) Намират се точките $B_o = A_o U_\infty \cap BW_\infty$ $D_o = A_o U_\infty \cap DW_\infty$; 3) Построяват се правите $D_o U_\infty$ и $B_o V_\infty$; ; 4) Определя се четвъртият връх $C_o = B_o V_\infty \cap D_o U_\infty$ (Фигура 35#.1).

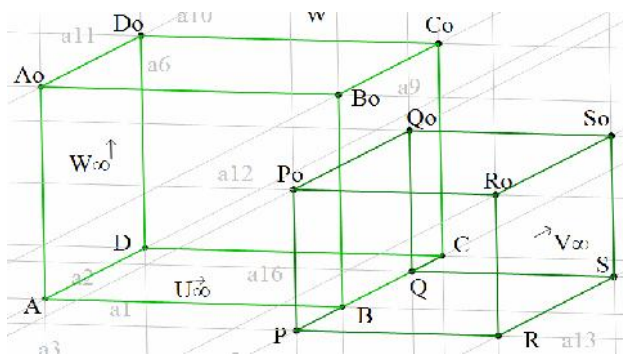


Фигура 35#.1

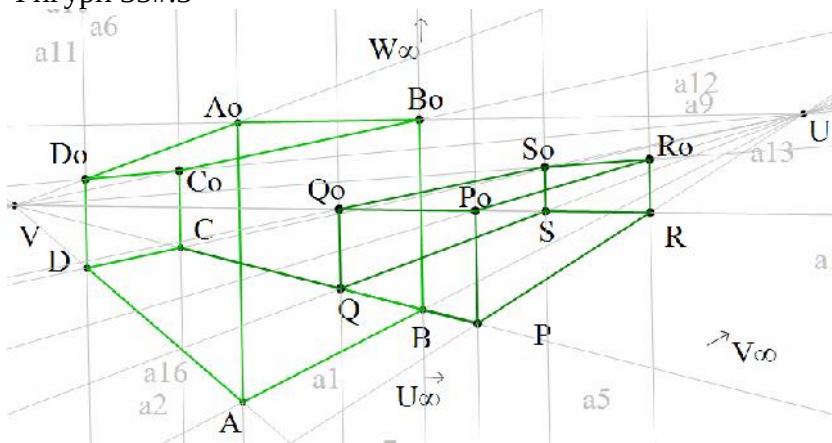


Фигура 35#.2

В резултат на размяната на точките U_∞ и U , на V_∞ и V чрез специалната функция РКБТ получаваме Фигурата 35#.2. Последните две свързани фигури представят паралелепипеда $ABCD A_o B_o C_o D_o$ съответно в обща аксонометрия и перспектива. Друга такава двойка свързани фигури са показани на Фигури 35#.3 и 35#.4.



Фигури 35#.3



Фигури 35#.4

Ротирайки свободните безкрайни точки U_{∞} и V_{∞} във Фигурите 35#.1 и 35#.3, променяме параметрите на аксонометрията, а движейки свободните крайни точки U и V в 35#.2 и 35#.4 променяме позицията на наблюдателя в перспектива.

Нека сега основата на изобразяваното тяло или изобщо една фигура лежи в равнината $\mathfrak{m}$, но никой определящ я елемент не е успореден на координатна ос. Това се случва, когато върхове са зададени с координатите си и не можем да приложим динамика, за да сведем до познатата ни вече ситуация. За да изобразим такава фигура се налага да завъртим равнината $\mathfrak{m}$ на ъгъл 90° около оста x или докато $\mathfrak{m}$ съвпадне с чертежната равнина Π . Тази операция се нарича **склопяване на $\mathfrak{m}$ до Π** . Прието е склопените положения на точките и правите да се бележат с черта над или след означенията им.

Понеже x е ос на въртене и всяка нейна точка е неподвижна, то $X' = \bar{X}$ за $\forall X \in x$. След склопяване на $\mathfrak{m}$ до Π оста y съвпада с оста z или в чертежната равнина $\bar{y} = z'$.

Нека $L \in y$ е произволна точка. Тъй като $O'L' = q \cdot Y_L$ ($q=0,5$ при кабинетна проекция и $q=1$ при кавалиерна перспектива), то $O'\bar{L} = q^{-1} \cdot O'L' = Y_L$. На Фигура 35.8 а) $q=0,5$ и следователно $O'\bar{L} = 2O'L'$, а на Фигура 35.8 б) $q=1$ и следователно $O'\bar{L} = O'L'$.

Като се вземат предвид свойствата на въртенето, следва че в чертежната равнина между главните аксонометрични образи на точките и правите на $\mathfrak{m}$ и техните склопени положения до Π се установява следното биективно съответствие Φ :

- 1) точка се изобразява в точка; 2) права се изобразява в права;
 - 3) инцидентните точка и права се изобразяват в инцидентни точка и права;
- Следователно Φ е колинеация.

Поради това, че съществува двоен ред точки x' , следва че Φ е хомология с ос x' .

За произволна точка $K \in y$ е в сила $\frac{O'\bar{L}}{O'L'} = \frac{O'K}{O'K'} = \frac{1}{q}$ Съгласно Теоремата на Талес

$L'\bar{L} \parallel K'K$. Ето защо центърът на хомологията Φ е безкрайната точка U_{∞} на $L'\bar{L}$ и тогава съединителната права на произволна двойка съответни точки е успоредна на правата $L'\bar{L}$.

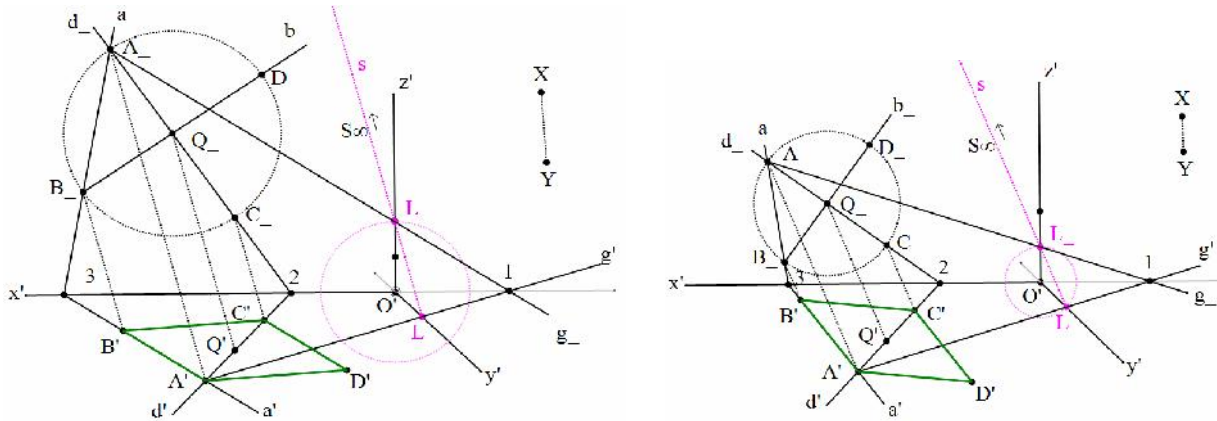
И така, между главните аксонометрични образи на точките и правите на $\mathfrak{m}$ и техните склопени положения до Π се установява афинната хомология $\Phi(x', L' \rightarrow \bar{L})$.

След склопяването на $\mathfrak{m}$ до Π се извършват всички необходими планиметрични построения, за да бъде начертан склопеният образ на изобразяваната фигура, лежаща в $\mathfrak{m}$. После, чрез допълване на афинната хомология Φ^{-1} , се построяват и главните аксонометрични образи на върховете и страните на изобразяваната фигура. За да облекчим чертежното поле, ще приемем уговорката да не добавяме означенията за първите вторични образи на обектите от $\mathfrak{m}$, защото както вече установихме те съвпадат с главните си аксонометрични образи.

Задача 35.5 Да се изобрази квадрат $ABCD$, лежащ в $\mathfrak{m}$, по даден диагонал AC .

Решение Най-напред задаваме афинната хомология $\Phi(x', L' \in L_-)$ (Фигура 35.8). Точката L_- е определена като пресечна на оста z' с окръжността $k'(O', r=XY)$. Тази мобилност на L_- , осигурена чрез промяна на дължината на отсечката XY , позволява да

променяме коефициента q , а с това и вида на аксонометрията. Така на Фигура 35.8 а) квадратът $ABCD$ е изобразен в кабинетна проекция ($q = \frac{1}{2}$), а на Фигура 35.7 б) – в кавалиерна перспектива ($q=1$). Достатъчно е да се подготви само единият динамичен чертеж.



Фигура 35.8 а)

Фигура 35.8 б)

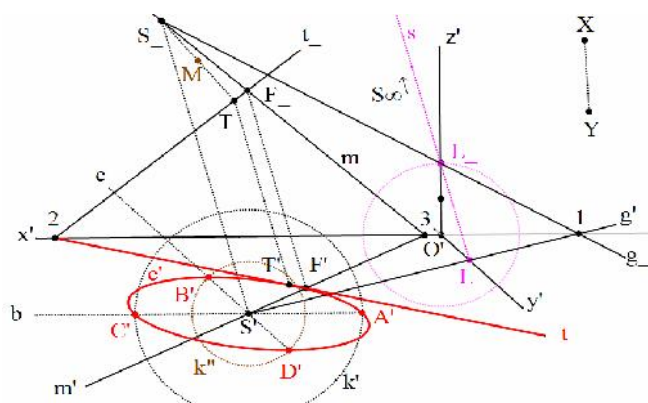
Склопяваме точките A и C , т.е. намираме $A_- = \Phi(A')$, $C_- = \Phi(C')$. Построяваме квадрата $A_-B_-C_-D_-$, а после и точката $B' = \Phi^{-1}(B_-)$. На края е определена точка D' , така че Q' да е среда на $B'D'$ (използван е инструментът „скалярна точка”).

Задача 35.8 Да се изобрази окръжност k , лежаща в проекционната равнина m с даден център S и допираща се до правата t .

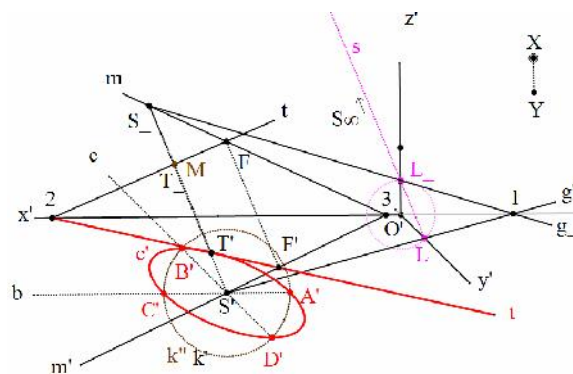
Решение Когато в условието на задачата не са зададени радиусът или центърът на окръжността и те ще се получат в резултат на планиметрични построения, тогава се налага склопяване на μ до ν . В конкретната задача липсва пряко задаване на радиуса на окръжността.

Задаваме на екрана аксонометричния кръст и афинната хомология $\Phi(x'; L' \in L_-)$ (за целта можем да използваме на готово динамичен чертеж 35.8 а)). Склопяваме точката S и правата $t=2F$, прилагайки Φ : $\Phi(S')=S_-$, $\Phi(t')=\Phi(2F')=\Phi(2)$ $\Phi(F')=2F_-=t_-$ (Фигура 35.9 а)).

Построяваме права през точка S_- , перпендикулярна на t_- и пресечната ѝ точка T_- с t_- е не само допирната точка на окръжността с правата t_- , но чрез нея определяме и радиуса $R=S_-T_-$. Точката $T' = \Phi^{-1}(T_-)=T_{S\infty} \cap t_-$ е допирната на елипсата с допирателната t' . Нататък решението продължава както е в Задача 35.4. Презентацията на динамичния чертеж ще проследи всяка стъпка в построенията.



Фигура 35.9 а)

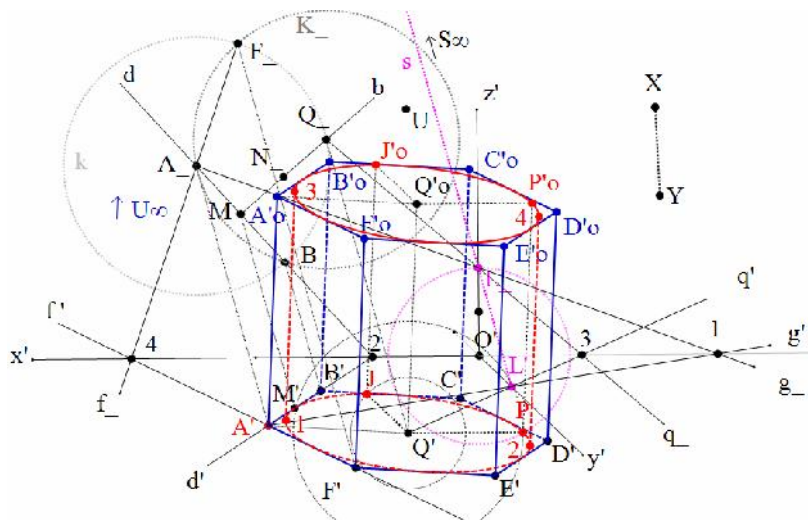


Фигура 35.9 б)

Фигура 35.9 б) представя решението в кавалиерна перспектива. И тук е достатъчно да се начертае само единият динамичен чертеж, а другият се получава от него чрез въздействие върху точка X (или Y), което променя положението на точка L_{-} , а с това и стойността на коефициента q .

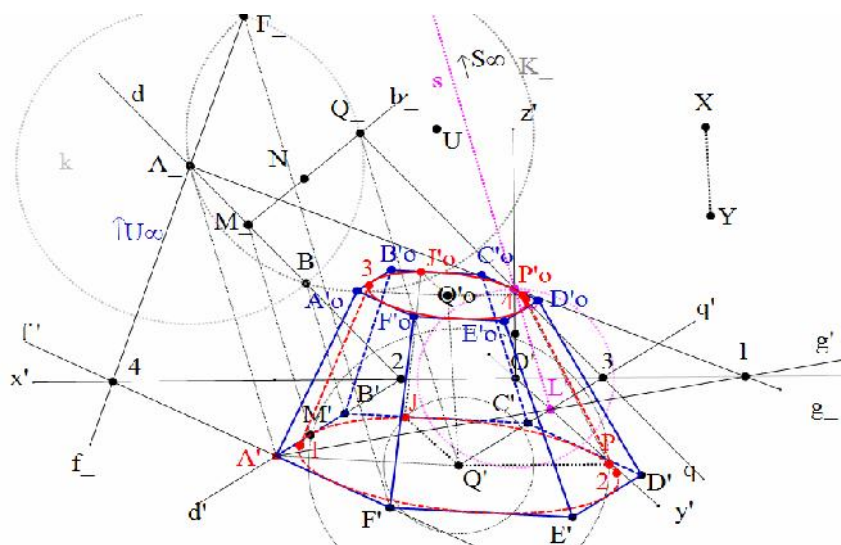
Задача 35. Да се изобрази шестоъгълна призма (пресечена призма, пирамида) с основа правилен шестоъгълник, лежащ в μ , с основен ръб AB и дължина на околния ръб h и да се впише в нея цилиндър.

Решение Проследете построенията стъпка по стъпка, презентирайки динамичния чертеж 35.10 а). Коментарът към етапите разяснява построенията.



Фигура 35.10 а)

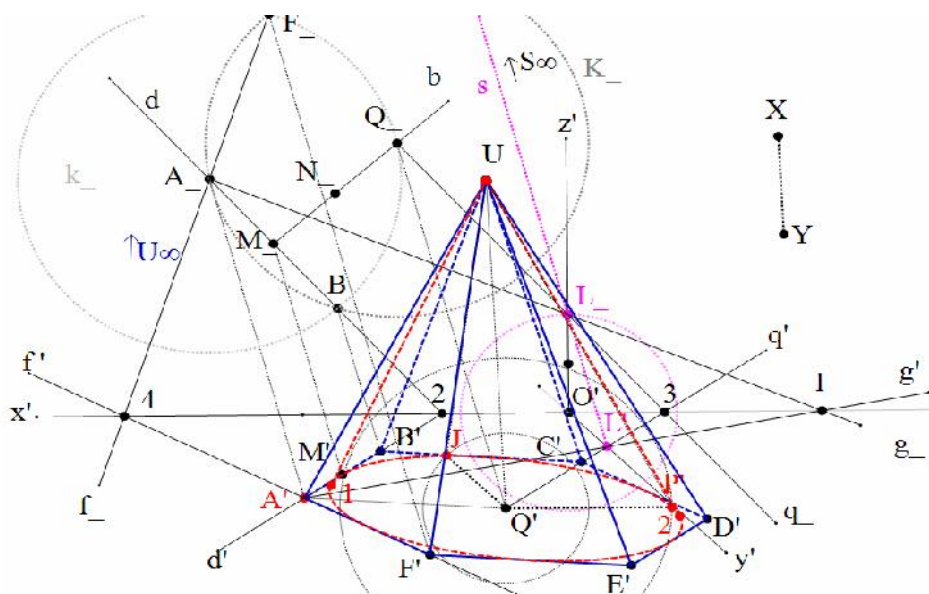
Фигура 35.10 а) представя решението в кабинетна проекция. Аксонометричният кръст и коефициентите $p=r=1$ са фиксирани, докато е предоставена възможност вторият коефициент на изменение q да се променя дистанционно чрез отсечката XY . За тази цел е достатъчно да се променя местостоеенето на точката $L_{-} = z' \cap \text{окр.}(O'; r=XY)$



Фигура 35.10 б)

Фигура 35.10 б) представя решението в кабинетна проекция за пресечена пирамида и вписан в нея пресечен конус. Достатъчно бе да се извърши размяната на точките U_{∞} и U .

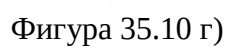
Фигура 35.10 в) представя решението в кабинетна проекция за пирамида и вписан в нея конус. Достатъчно бе в динамичния чертеж на Фигура 35.10 б) точката $A'o$ да се придвижи по околния си ръб, докато съвпадне с U' .



Фигура 35.10 в)

Съществена роля при вписването на цилиндъра играе радиуса на окръжността, вписана в основата. Действителната големина на този радиус е представена чрез отсечката Q_M в склопено положение, защото Q_M е перпендикулярна на страната A_B на правилния шестоъгълник. Ето защо двойката спрегнати полудиаметри на елипсата (аксонометричен образ на основата на цилиндъра) имат дължини Q_M и $Q_N = qr$.

Фигура 35.10 г) представя решението в кавалиерна перспектива. За да се извърши този преход както при изобразяване на шестоъгълника, така и при вписаната в него окръжност, бе необходимо $O'L = O'L'$ и $M_N = M_Q = r$, защото сега $q=1$.



Упражнение 16

Задача 35.11 Дадена е отсечка AB , която лежи в μ . Да се изобрази в аксонометрия

- а) квадрат $ABCD$, лежащ в μ ;
- б) окръжност, описана около $ABCD$;
- в) окръжност, вписана в $ABCD$.

Създайте вашата колекция от призми и пирамиди с основа $ABCD$, от описани и вписани в тях цилиндри и конуси, когато :

- I. AB е успоредна на оста x ;
- II. AB е успоредна на оста y ;
- III. AB не е успоредна нито на оста x , нито на оста y .

Задача 35.12 Дадена е отсечка AC , която лежи в μ . Да се изобрази в аксонометрия

- а) квадрат $ABCD$, лежащ в μ ;
- б) окръжност, описана около $ABCD$;
- в) окръжност, вписана в $ABCD$.

Създайте вашата колекция от призми и пирамиди с основа $ABCD$, от описани и вписани в тях цилиндри и конуси, когато :

- I. AB е успоредна на оста x ;
- II. AB е успоредна на оста y ;
- III. AB не е успоредна нито на оста x , нито на оста y .

Задача 35.13 Дадена е отсечка AB , която лежи в μ . Да се изобрази в аксонометрия

- а) триъгълник ABC , лежащ в μ ;
- б) окръжност, описана около ABC ;
- в) окръжност, вписана в ABC .

Създайте вашата колекция от призми и пирамиди с основа ABC , от описани и вписани в тях цилиндри и конуси, когато :

- I. AB е успоредна на оста x ;
- II. AB е успоредна на оста y ;
- III. AB не е успоредна нито на оста x , нито на оста y .

Задача 35.14 Дадена е отсечка AD , която лежи в μ . Да се изобрази в аксонометрия

- а) шестоъгълник $ABCDEF$, лежащ в μ ;
- б) окръжност, описана около $ABCDEF$;
- в) окръжност, вписана в $ABCDEF$.

Създайте вашата колекция от призми и пирамиди с основа $ABCDEF$, от описани и вписани в тях цилиндри и конуси, когато :

- I. AD е успоредна на оста x ;
- II. AD е успоредна на оста y ;
- III. AD не е успоредна нито на оста x , нито на оста y .

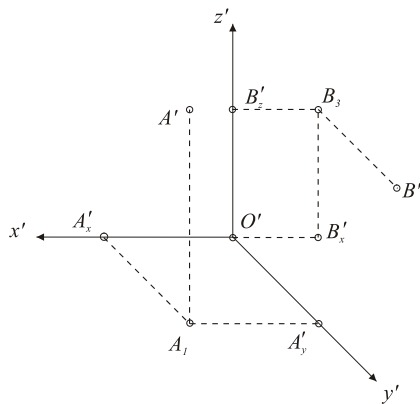
36 Изобразяване на точки, прави и равнини в обща аксонометрия и инцидентност между тях

1. Да се изобразят точките :

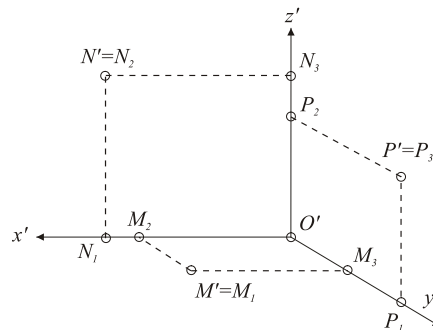
$A(3,6,5)$, $B(-2,4,3)$, $M(4,2,0)$, $N(5,0,4)$, $P(0,7,3)$ в кабинетна проекция.

Най-напред записваме адаптираните координати на точките : $A(3,3,5)$, $B(-2,2,-3)$, $M(4,1,0)$, $N(-1,0,4)$, $P(0,4,2)$, след което в чертежната равнина работим с единицата e , която обикновено се приема $e = 1cm$.

Построяваме точките A'_x, A'_y , така че $O'A'_x = 3, O'A'_y = 3$ и построяваме точка A'_1 като четвърти връх на успоредника $A'_x O' A'_y A'_1$. Тогава главният аксонометричен образ A' определяме от условията : $A_1 A' = 5, A_1 A' \parallel z'$ (Фигура 36.1).



Фигура 36.1

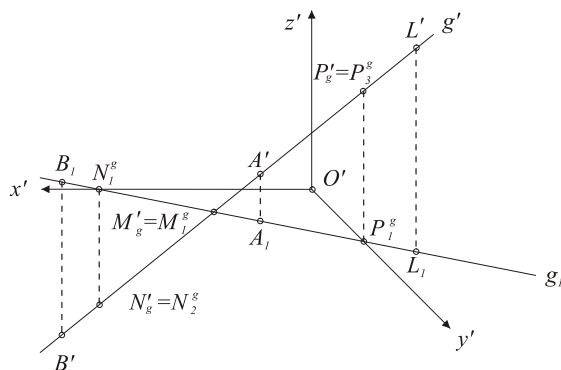


Фигура 36.2

Нека отбележим, че на Фигура 36.1 изобразихме първия вторичен аксонометричен образ на точка A . Изборът на вторичния аксонометричен образ на точката, както и на всеки изобразяван обект се определя от условието на конкретната задача. На Фигура 36.1 точката B е зададена с главния си и втория си вторичен аксонометричен образи.

На Фигура 36.2 са изобразени точките $M \in m, N \in n, P \in p$. За построяването на аксонометричните им образи са използвани съответно Теоремите 33.2, 33.3, 33.4.

2. Да се изобрази правата $g = AB$ и да се определят стъпките ѝ.



Фигура 36.3

Изобразяваме точките A и B както е описано в 1.(Фигура 36.3). Прилагайки Твърдение 33.1, построяваме правите $g' = A'B'$, $g_1 = A_1B_1$. Съгласно (34.1), за да изберем произволна точка $L \in g$ е достатъчно да построим права $l \parallel z'$. Тогава $l \cap g' = L'$, $l \cap g_1 = L_1$

Тъй като на чертежа правата g е зададена с първия си вторичен образ, то при определяне на аксонометричните образи на всяка от стъпките на g започваме с намирането на първите им вторични аксонометрични образи, съобразявайки се със специалното им положение – виж Фигура 36.2. Така

$$g' \ll g_1 = M'_g = M_1^g; \quad g_1 \ll x' = N_1^g, \quad N'_g \in g', \quad N_1^g N'_g \parallel z';$$

$$g_1 \ll y' = P_1^g, \quad P'_g \in g', \quad P_1^g P'_g \parallel z';$$

Преходът от един вторичен образ на права в друг неин вторичен образ минава най-често през стъпките ѝ.

3. Изобразяване на права, която е успоредна на координатна равнина или лежи в нея

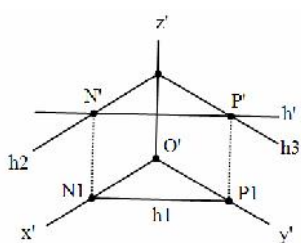
От свойство 5. на успоредното проектиране и от Теорема 33.5, 33.6, 33.7 непосредствено следват:

Следствие 36.1 Условиата: $h \parallel \mu$; $h' \parallel h_1$; $h_2 \parallel x'$; $h_3 \parallel y'$ са еквивалентни.

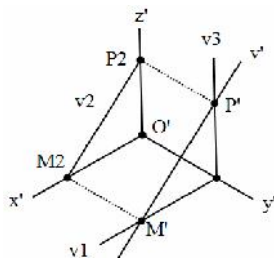
Следствие 36.2 Условиата: $v \parallel v$; $v' \parallel v_2$; $v_1 \parallel x'$; $v_3 \parallel z'$ са еквивалентни.

Следствие 36.3 Условиата: $f \parallel \pi$; $f' \parallel f_3$; $f_1 \parallel y'$; $h_3 \parallel z'$ са еквивалентни.

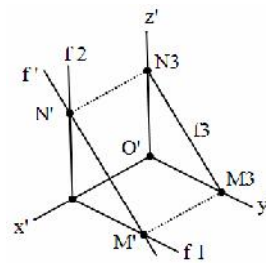
Аксонометричните образи на правите h, v, f са изобразени съответно на Фигури 36.4, 36.5, 36.6.



Фигура.36.4



Фигура.36.5



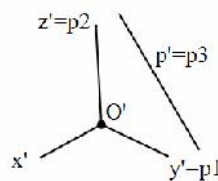
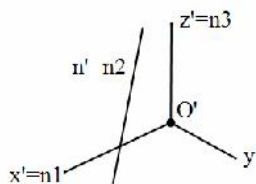
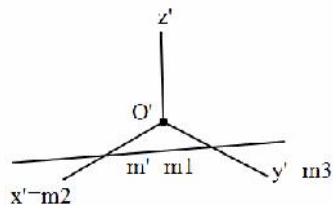
Фигура.36.6

От Теорема 33.8, 33.9, 33.10 непосредствено следват:

Следствие 36.4 Условиата: $m \in m$; $m' = m_1$; $m_2 = x'$; $m_3 = y'$ са еквивалентни.

Следствие 36.5 Условиата: $n \in n$; $n' = n_2$; $n_1 = x'$; $n_3 = z'$ са еквивалентни.

Следствие 36.6 Условиата: $p \in p$; $p' = p_3$; $p_1 = y'$; $p_2 = z'$ са еквивалентни.



Фигура.36.7

Фигура.36.8

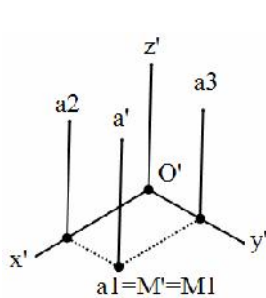
Фигура.36.9

Аксонетричните образи на правите m, n, p са изобразени съответно на Фигури 36.7, 36.8, 36.9.

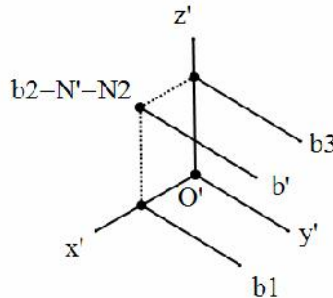
4. Изобразяване на права, която е перпендикулярна на координатна равнина

4.1 Нека $a \perp m$. Следователно $a \parallel z$. Тогава от Свойство 5. на успоредното проектиране и Теорема 33.11 следват релациите: $a' \parallel z' \parallel a_2 \parallel a_3$; a_1 е точка като $a_1 \in a'$.

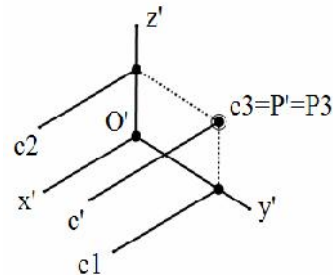
Тъй като $A \in a \Leftrightarrow A_1 = a_1$, то $M_1^a = a_1$, а $a_2 \in M_2^a, a_3 \in M_3^a$ (Фигура.36.10).



Фигура.36.10



Фигура.36.11



Фигура.36.12

4.2 Нека $b \perp n$. Следователно $b \parallel y$. Тогава от Свойство 5. на успоредното проектиране и Теорема 33.12 следват релациите: $b' \parallel y' \parallel b_1 \parallel b_3$; b_2 е точка като $b_2 \in b'$.

Тъй като $A \in b \Leftrightarrow A_2 = b_2$, то $N_2^b = b_2$, а $b_1 \in N_1^b, b_3 \in N_3^b$ (Фигура.36.11).

4.3 Нека $c \perp p$. Следователно $c \parallel x$. Тогава от Свойство 5. на успоредното проектиране и Теорема 33.13 следват релациите: $c' \parallel x' \parallel c_1 \parallel c_2$; c_3 е точка като $c_3 \in c'$.

Тъй като $A \in c \Leftrightarrow A_3 = c_3$, то $P_3^c = c_3$, а $c_1 \in P_1^c, c_2 \in P_2^c$ (Фигура.36.12).

5. Взаимно положение на две прави

5.1 Правите a и b са пресичащи се.

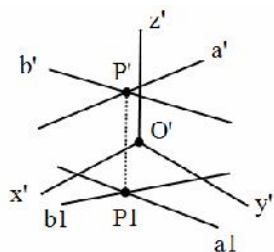
От Твърдение 33.1 непосредствено следва:

Следствие 36.7 Правите a и b са пресичащи се тогава и само тогава, когато за аксонетричните им образи е изпълнено едно от условията: $P_1P' \parallel z'$; $P_2P' \parallel y'$;

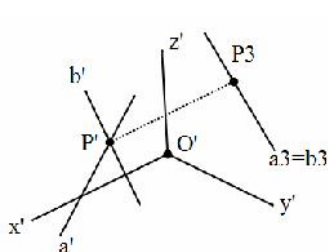
$P_3P' \parallel x'$; където $P_1 = a_1 \cap b_1, P_2 = a_2 \cap b_2, P_3 = a_3 \cap b_3, P' = a' \cap b'$. (Фигура.36.13).

На Фигура 36.13 са изобразени три двойки пресичащи се прави. Да означим с (a, b) равнината, която те определят.

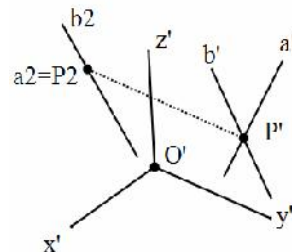
Правите от Фигура 36.13 б) имат съвпадащи трети аксонетрични образи. Това означава, че техните трети проектиращи равнини съвпадат $s^a = s^b = (a, b)$. Следователно тези прави лежат в равнина, която е перпендикулярна на p .



Фигура.36.13 а)



Фигура.36.13 б)



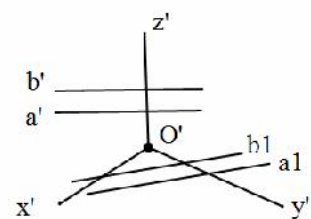
Фигура.36.13 в)

Правите a и b от Фигура 36.13 в) имат втори вторични образи съответно точката a_2 и правата b_2 като $a_2 \in b_2$, което означава, че $a \wedge b$ и вторите проектиращи равнини на a и b съвпадат и в същото време съвпадат с равнината $(a, b) \wedge v$.

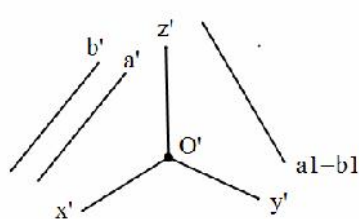
5.2 Правите a и b са успоредни.

Прилагайки Твърдение 33.2 и Свойство 5. на успоредното проектиране, получаваме:

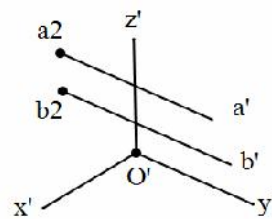
Следствие 36.8 Правите a и b са успоредни тогава и само тогава, когато за аксонометричните им образи са изпълнени две от условията: $a' \parallel b'$; $a_1 \parallel b_1$; $a_2 \parallel b_2$; $a_3 \parallel b_3$.



Фигура 36.14 а)



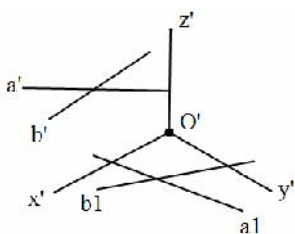
Фигура 36.14 б)



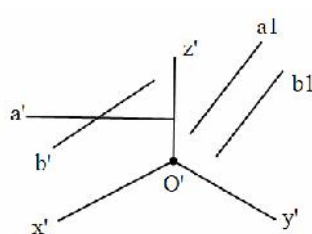
Фигура 36.14 в)

На Фигури 36.14 са изобразени три двойки успоредни прави. Правите от Фигура 36.14 б) лежат в равнина, която е перпендикулярна на ρ .

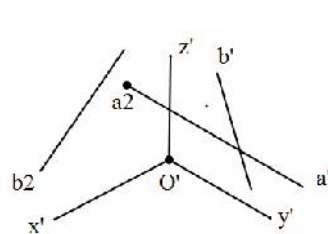
5.3 Правите a и b са кръстосани.



Фигура 36.15 а)



Фигура 36.15 б)



Фигура 36.15 в)

Аксонометричните образи на кръстосаните прави не удовлетворяват условията за образите на пресичащите се или на успоредните прави. На Фигури 36.15 са изобразени три двойки кръстосани прави.

6. Изобразяване на равнина в обща аксонометрия. Инцидентност на права и равнина, инцидентност на точка и равнина. Пресечница на две равнини, пробод на

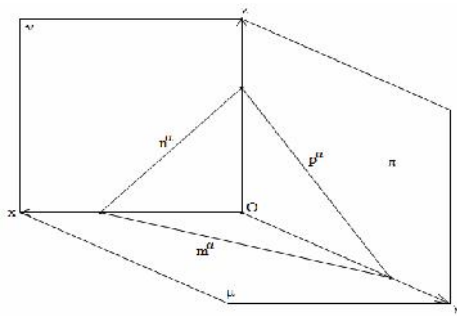
права и равнина

6.1 Равнината α е в общо положение относно координатните равнини

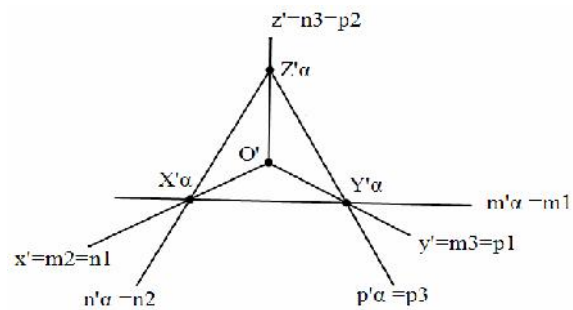
Правите m^α , n^α и p^α са съответно първата, втората и третата дири на равнината α (Фигура 36.16 а). Както е известно от §33 $m^\alpha \ll n^\alpha = X^\alpha$, $m^\alpha \ll p^\alpha = Y^\alpha$, $n^\alpha \ll p^\alpha = Z^\alpha$ и $m^\alpha = X^\alpha Y^\alpha$, $n^\alpha = X^\alpha Z^\alpha$, $p^\alpha = Y^\alpha Z^\alpha$. Тъй като $m^\alpha \in m$, $n^\alpha \in n$, $p^\alpha \in p$, то съгласно Следствията 33.4, 33.5, 33.6, можем да запишем:

$$m_1^\alpha = m'_a, m_2^\alpha = x', m_3^\alpha = y'; n_2^\alpha = n'_a, n_1^\alpha = x', n_3^\alpha = z'; \\ p_3^\alpha = p'_a, p_1^\alpha = y', p_2^\alpha = z'.$$

Да се изобрази равнината $\alpha[4,3,8]$. Най-напред намираме адаптираните координати на



Фигура 36.16 а)



Фигура 36.16 б)

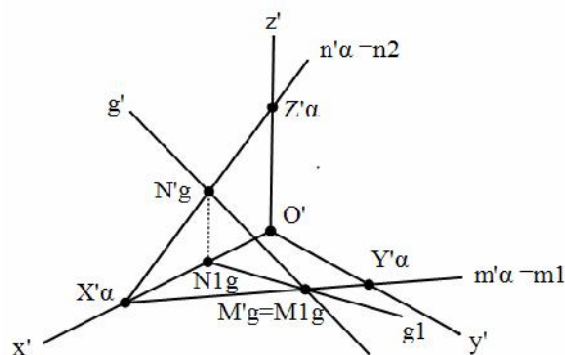
равнината $\alpha[4,3,8]$. После изобразяваме точките $X^\alpha(4p,0,0)$, $Y^\alpha(0,3q,0)$, $Z^\alpha(0,0,8r)$, където p, q, r са коефициентите на изменение. Тогава $m'_a = X'_a Y'_a$, $n'_a = X'_a Z'_a$, $p'_a = Y'_a Z'_a$ (Фигура 36.16).

Забележка. Задаването на аксонометричните образи на две от дирите на равнината я определя еднозначно. Ето защо не е необходимо всеки път да задаваме на чертежа и трите дири на равнината, освен в случаите, когато това е продиктувано от други съображения.

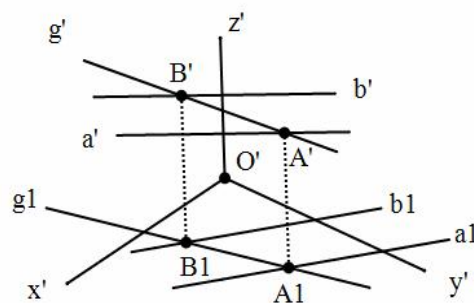
6.1.1 Да се избере произволна права $g \in \alpha$.

Избираме произволно един от образите на g , например. g_1 .

Равнината е зададена с дирите си. Прилагаме Твърдение 33.3, т.е. осигуряваме стъпките на g да лежат върху едноименните дири на α . Така $g_1 \cap m_1^\alpha = M_1^g = M'_g$ и



Фигура 36.17



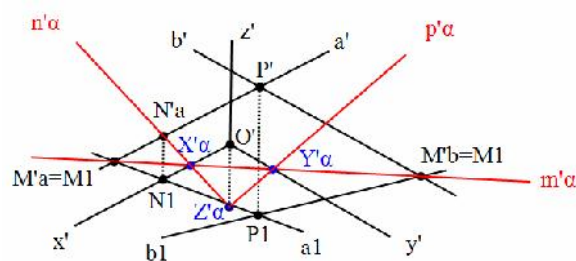
Фигура 36.18

$g_1 \cap x' = N'_g$. Точката $N'_g \in g'$ уточняваме с помощта на права, успоредна на оста z' . Тогава $g' = M'_g N'_g$ (Фигура 36.17).

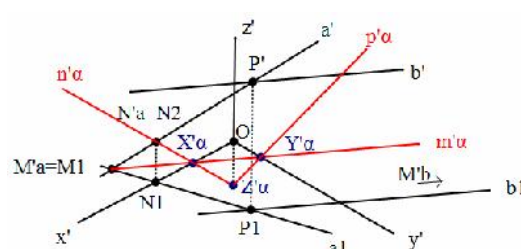
Равнината е зададена с две прави. Първият вториен аксонометричен образ g_1 избираме така, че да пресича правите a_1, b_1 . Нека $g_1 \cap a_1 = A_1, g_1 \cap b_1 = B_1$. Прилагаме условието за пресичане на правите a и g, b и g – Следствие 36.7. Следователно главните аксонометрични образи на точките $A' \in a'$ и $B' \in b'$ ще лежат върху прави, успоредни на z' и минаващи съответно през точките A_1 и B_1 . Тогава $g' = A'B'$. На Фигура 36.18 равнината е зададена с две успоредни прави $a(a \parallel b)$.

6.1.2 Да се избере произволна точка $A \in a$. Изборът на произволна точка от дадена равнина се предхожда от избор на произволна права от равнината и избор на точка от тази права.

6.1.3 Да се построят дирите на равнината, зададена с две успоредни или пресичащи се прави. Определяме първите стъпки на правите a и b : $M'_a = a' \ll a_1$,



Фигура 36.19



Фигура 36.20

$M'_b = b' \ll b_1$. Тогава $m'_a = M'_a M'_b$, а точките $X'_a = x' \ll m'_a, Y'_a = y' \ll m'_a$ принадлежат съответно на n'_a и p'_a .

На Фигура 36.19 равнината е представена с две пресичащи се прави $a(a, b)$, които са в общо положение спрямо координатните равнини. Достатъчно е да намерим още една стъпка на една от правите a или b . На Фигура 36.19 е намерена втората стъпка на a - $N_a(N_1, N'_a)$.

Тогава $n'_a = N'_a X'_a$, а $Z'_a = z' \ll n'_a$ и $p'_a = Z'_a Y'_a$.

На Фигура 36.20 равнината е представена с две пресичащи се прави $\alpha(a,b)$, като правата b е успоредна на координатната равнина μ . Това означава, че първата стъпка на b , както и аксонометричният ѝ образ $M'_b = b_1 \ll b'$ са безкрайни точки. Следователно $m'_a \parallel b' \parallel b_1$.

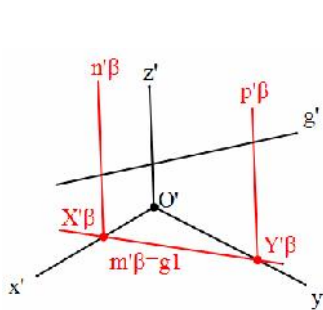
6.2 Изобразяване на равнини, които са в частно положение относно координатните равнини

Ще използваме съществено резултатите, получени в раздел С на §33.

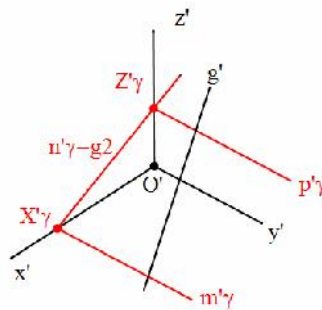
6.2.1 Изобразяване на равнина, перпендикулярна на координатна равнина

Нека равнината $b \perp m$, т.е. $b \parallel z$. От С.1.1 и Свойство 5 на успоредното проектиране следва $n'_b \parallel z'$, $p'_b \parallel z'$. Съгласно Твърдение 33.4 правата $g \in b \Leftrightarrow g'_1 = m'^b$. Следователно в сила е

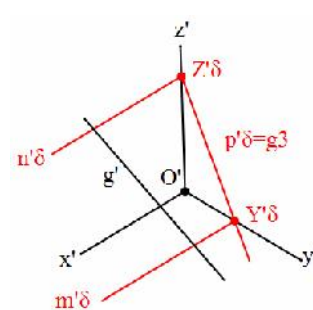
Следствие 36.9 Ако $b \perp m$, то $g \in b \Leftrightarrow g_1 = m_1^b = m'_b$ и $A \in b \Leftrightarrow A_1 \in m_1^b = m'_b$.



Фигура 36.21



Фигура 36.22



Фигура 36.23

Нека равнината $g \perp n$, т.е. $g \parallel y$. От С.1.2 и Свойство 5 на успоредното проектиране следва $m'_g \parallel y'$, $p'_g \parallel y'$.

Съгласно Твърдение 33.5 правата $g \in g \Leftrightarrow g'_2 = n^g$. Следователно в сила е

Следствие 36.10 Ако $g \perp n$, то $g \in g \Leftrightarrow g_2 = n_2^g = n'_g$ и $A \in g \Leftrightarrow A_2 \in n_2^g = n'_g$.

Нека равнината $d \perp p$, т.е. $d \parallel x$. От С.1.3 и Свойство 5 на успоредното проектиране следва $m'_d \parallel x'$, $n'_d \parallel x'$.

Съгласно Твърдение 33.6 правата $g \in d \Leftrightarrow g'_3 = m^d$. Следователно в сила е

Следствие 36.11 Ако $d \perp p$, то $g \in d \Leftrightarrow g_3 = p_3^d = p'_d$ и $A \in d \Leftrightarrow A_3 \in p_3^d = p'_d$.

6.2.2 Изобразяване на равнина, успоредна на координатна равнина

Нека равнината $e \parallel \mu$, т.е. $e \perp z$. Съгласно С.2.1 и Свойство 5 на успоредното проектиране следва, че равнината e няма първа диря и $n'_e \parallel x'$, $p'_e \parallel y'$ (Фигура 36.24).

Понеже $e \perp n$, $e \perp p$, то от Следствия 36.10 и 36.11 следва валидността на

Следствие 36.12 Ако $e \parallel \mu$, то $g \in e \Leftrightarrow g_2 = n'_e$ и $g_3 = p'_e$.

Нека равнината $r \parallel \nu$, т.е. $r \perp y$. Съгласно С.2.2 и Свойство 5 на успоредното проектиране следва, че равнината r няма втора диря и $m'_r \parallel x'$, $p'_r \parallel z'$ (Фигура 36.25).

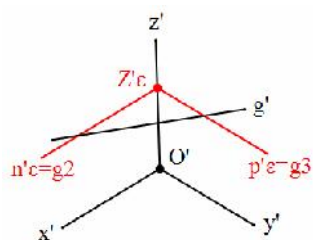
Понеже $r \perp m$, $r \perp p$, то от Следствия 36.9 и 36.11 следва валидността на

Следствие 36.13 Ако $r \parallel v$, то $g \in r \Leftrightarrow g_1 = m'_r$ и $g_3 = p'_r$.

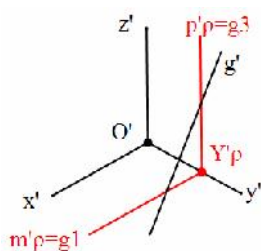
Нека равнината $t \parallel \pi$, т.е. $t \wedge x$. Съгласно С.2.3 и Свойство 5 на успоредното проектиране следва, че равнината t няма трета диря и $m'_t \parallel y'$, $n'_t \parallel z'$ (Фигура 36.26).

Понеже $t \wedge \mu$, $t \wedge v$, то от Следствия 36.9 и 36.10 следва валидността на

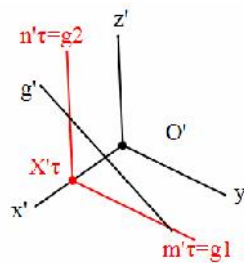
Следствие 36.14 Ако $t \parallel \pi$, то $g \in r \Leftrightarrow g_1 = m'_r$ и $g_2 = n'_r$.



Фигура 36.24



Фигура 36.25



Фигура 36.26

7. Пресечница на две равнини

Нека означим с a и b равнините, а с s - пресечницата им, т.е. $a \cap b = s$. Съгласно разглежданията в D на §33 имаме $M^s = m^a \cap m^b$, $N^s = n^a \cap n^b$, $P^s = p^a \cap p^b$. Тогава намирането на аксонометричните образи на пресечницата става в следния ред:

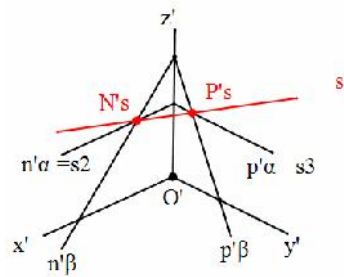
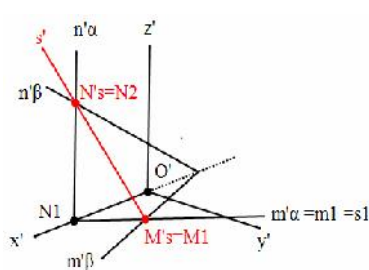
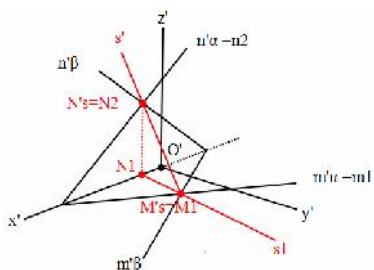
- а) $m'_a \cap m'_b = M'_s = M_1^s$;
- б) $n'_a \cap n'_b = N'_s = N_2^s$; $N_1^s \in x'$;
- в) $s_1 = M_1^s N_1^s$; $s' = M'_s N'_s$.

Изборът на стъпките и техните вторични аксонометрични образи се диктува от особеностите на всяка конкретна задача.

Да се построи правата $s = a \cap b$, ако:

7.1 Равнините a и b са в общо положение относно координатните равнини (Фигура 36.27).

7.2 Равнината $a \perp \pi$, а равнината b е в общо положение относно координатните равнини (Фигура 36.28). Да обърнем внимание на факта, че в този случай $s_1 = m_1^a$. До този резултат достигаем или като последователно намираме образите на стъпките на s , или директно като приложим Следствие 36.9.



Фигура 36.27

Фигура 36.28

Фигура 36.29

7.3 Равнината $\alpha \parallel \mu$, а равнината β е в общо положение относно координатните равнини (Фигура 36.29). Да обърнем внимание на факта, че съгласно Следствие 36.12 $s_2 = n_2^a$ и $s_3 = p_3^a$. Пресечницата s е успоредна на μ .

8. Пробод на права и равнина

Нека означим правата с g , равнината с a , а пробода с Q , т.е. $g \cap a = Q$. Съгласно Е. на § 33 трябва да зададем една от проектиращите равнини на g , да построим пресечницата s с a и тогава $Q = g \cap s$.

Да се построи точката $Q = g \cap s$.

8.1 Правата g и равнината a са в общо положение относно координатните равнини (Фигура 36.30).

Намирането на аксонометричните образи на пробода Q става в следния ред:

а) Задаваме равнината $k^g \in g, k^g \perp m: m_1^{k^g} = m_{k^g}' = g_1, m_1^{k^g} \cap x' = X_{k^g}'$;

$n_{k^g}' \in X_{k^g}', n_{k^g}' \parallel z'$.

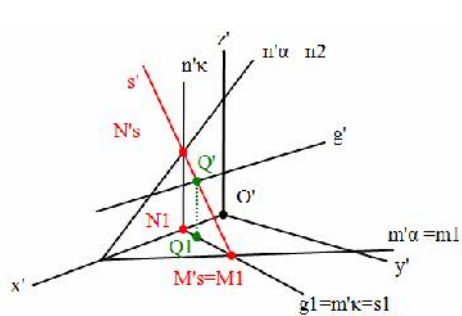
б) Образите на пресечницата $s = a \cap b$ намираме, решавайки Задача 7.2:

$m_a' \cap m_{k^g}' = M_s' = M_1^s$;

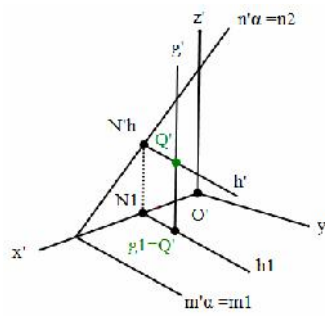
$n_a' \ll n_{k^g}' = N_s' = N_2^s, N_1^s \in x', N_1^s N_s' \parallel z'$;

$s_1 = g_1, s' = M_s' N_s'$;

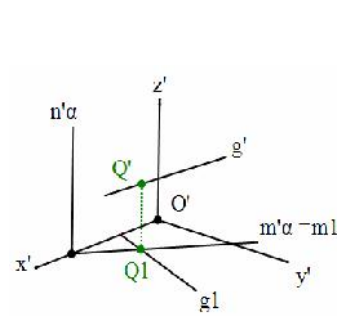
в) $s' \ll g' = Q', Q' Q_1 \parallel z', Q_1 \in s_1$.



Фигура 36.30



Фигура 36.31



Фигура 36.32

8.2 Правата g е перпендикулярна на една от координатните равнини, а равнината a е в общо положение.

Нека правата $g \perp m$ (Фигура 36.31). Намирането на аксонометричните образи на пробода Q става в следния ред:

а) Съгласно 4.1 на § 36 имаме $Q_1 = g_1$;

б) Главният аксонометричен образ на точка Q уточняваме с помощта на правата $h \in a$ и $h \parallel m$, чиито образи построяваме както следва :

$$h_1 \in Q_1, h_1 \parallel m'_a, h_1 \ll x' = N_1, N'_h \in n'_a, h' \parallel m'_a, h' \in N'_h;$$

$$в) Q' = h'_a \cap g'.$$

8.3 Равнината a е перпендикулярна на една от координатните равнини, а правата g е в общо положение.

Нека $a \perp m$ (Фигура 36.32). Намирането на аксонометричните образи на пробода Q става в следния ред:

$$а) \text{ Съгласно Следствие 36.9 } Q_1 \in m_1^a. \text{ Тогава } Q_1 = g_1 \cap m_1^a;$$

$$б) Q' \in g', Q_1 Q' \parallel z'.$$

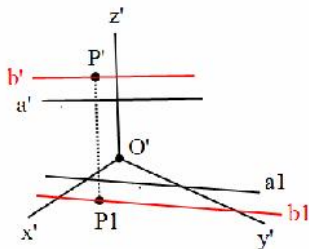
Очевидно е, че за да се възползваме от опростения алгоритъм и в случаите, когато равнината е перпендикулярна на Π или P , трябва да зададем на чертежа съответно втория или третия вторичен образ на правата g .

9 Основни афинни задачи

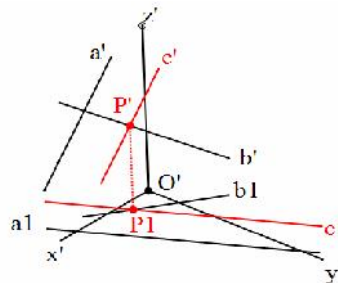
9.1. Да се построи права b , успоредна на дадена права a и минаваща през дадена точка P .

Построенията следват непосредствено от Твърдение 33.1 и Следствие 36.8:

$$b_1' \parallel P_1, b_1' \parallel a_1; b_2' \parallel P_2, b_2' \parallel a_2.$$



Фигура 36.33



Фигура 36.34

9.2. Да се построи равнина b , успоредна на дадена права a и минаваща през дадена права b .

Избираме произволна точка $K \in b$ и построяваме правата $c' \parallel K$, $c' \parallel a$ или решаваме първата основна афинна задача. Равнината $b(b \neq c)$ е търсената.

Успоредни равнини

Както е известно от Теорема V успоредните равнини, пресечени с трета равнина имат успоредни пресечници. Следователно успоредните равнини имат успоредни едноименни дири, т.е. ако $a \parallel b$, то $m^a \parallel m^b$, $n^a \parallel n^b$, $p^a \parallel p^b$. Но тогава съгласно Свойство 5 на успоредното проектиране $m'_a \parallel m'_b$, $n'_a \parallel n'_b$, $p'_a \parallel p'_b$.

Нека сега са изпълнени две от трите условия $m'_a \parallel m'_b$, $n'_a \parallel n'_b$, $p'_a \parallel p'_b$.

например $m'_a \parallel m'_b$ и $n'_a \parallel n'_b$, и равнините α и β не са успоредни на оста x , т.е.

$m^a \ll n^a = X_a$, $m^b \ll n^b = X_b$. Тогава съгласно Теорема III равнините α и β са успоредни.

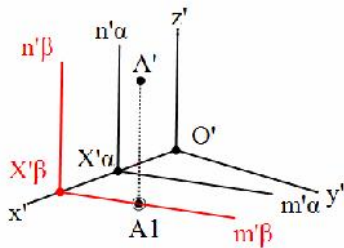
9. 3. Да се построи равнина b , успоредна на дадена равнина a и минаваща през дадена точка A .

9.3.1 Равнината a е зададена с дирите си .

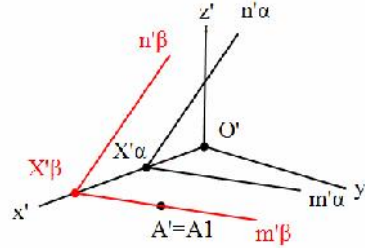
Достатъчно е да получим точка от диря на b .

9.3.1.1 Равнината е перпендикулярна на една от координатните равнини, напр. $a \perp m$ (Фигура 36.35). Следователно и $b \perp m$. Тогава $A_1 \in m_1^b$ и построенията са следните:

- а) $m_1^b \perp A_1$, $m_1^b \parallel m_1^a$;
- б) $m_1^b \ll x' = X_b$, $n_2^b \perp X_b$, $n_2^b \parallel n_2^a$.



Фигура 36.35



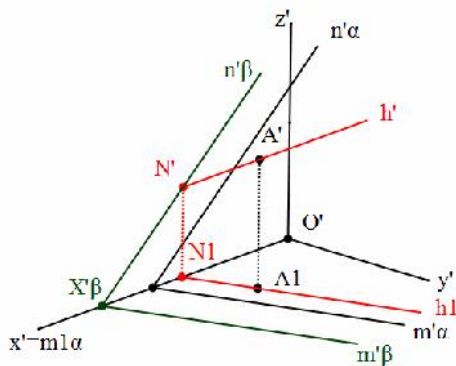
Фигура 36.36

9.3.1.2 Точката A принадлежи на някоя от координатните равнини, напр. $A \in m$ (Фигура 36.36). Но тъй като още $A \in b$, то следва, че $A \in m^b$ и тогава построенията са:

- а) $m_1^b \perp A_1$, $m_1^b \parallel m_1^a$;
- б) $m_1^b \ll x' = X_b$; $n_2^b \perp X_b$, $n_2^b \parallel n_2^a$.

9.3.1.3 Равнината a и точката A са в общо положение относно координатните равнини.

Имаме възможност да построим права h^b през точка A , която е успоредна на m^a . Но тъй като $m^a \parallel m^b$, то следва, че $h^b \parallel m^b$. Тогава h^b лежи в равнината β и втората стъпка на h^b ще принадлежи на втората диря на b (Фигура 36.37). Подробно всички стъпки в построенията можете да проследите, презентирайки едноименния динамичен чертеж.



Фигура 36.37

9. 3.2 Равнината α е зададена с две пресичащи се прави или условия, свеждащи се до тях. Например, нека равнината е зададена с две пресичащи се прави, т.е. $\alpha(a \times b)$. Достатъчно е да построим правите $c' A$, $c \parallel a$ и $d' A$, $d \parallel b$. Тогава търсената равнина е $b(c \times d)$.

37 Взаимно пресичане на призми и пирамиди в аксонометрия

Нека приемем уговорката под многостен да разбираме призма или пирамида, за да облекчим речта в частта, която е обща за призмите и пирамидите.

Линията на пресичане на два многостена е начупена линия, точките на която принадлежат едновременно на двете повърхнини. Върховете на линията на пресичане са прободите на ръбовете на единия многостен със стените на другия многостен и обратно. Страните на линията на пресичане са пресечниците на стените на двата многостена.

Процесът на решаване на този тип задачи чрез метода на спомагателните равнини включва многократно повтаряне на една и съща операция – пробод на права с многостен. Така ако единият многостен е m – ъгълен, а другият е n – ъгълен, то трябва да повторим $(m + n)$ пъти задачата за пробод на права с многостен. Ние забелязахме, че тази операция може да се алгоритмизира, а това ще позволи да се оптимизира процеса на обучение чрез използване на компютър. Тази идея ни мотивира да създадем програмата Sam full за интерактивно обучение на студентите по темата „Взаимно пресичане на призми и пирамиди в аксонометрия”

Да означим условно произволен околен ръб на единия многостен с g . Тогава решението на задачата за пробод на правата g с другия многостен минава през следните стъпки:

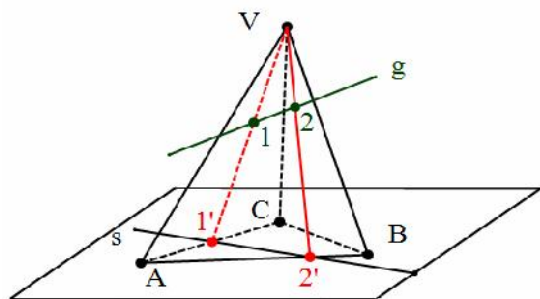
- А) Задаване на равнина α , инцидентна с правата g ;
- Б) Намиране на сечението на равнината α с многостена;
- В) Определяне на пресечните точки на правата g със сечението.

Равнината α се нарича спомагателна.

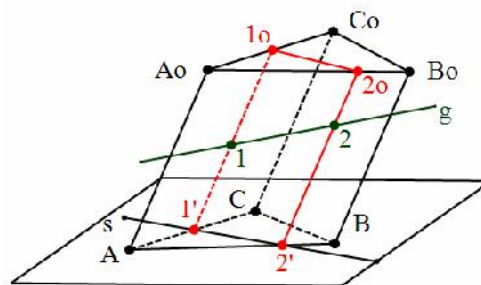
Нека наречем неосновния връх на пирамидата **главен връх** и да означим пресечницата на равнината на основата с равнината на сечението с s .

Очевидно е, че в стъпка А) има безброй възможности в избора на равнината α .

Възползвайки се от тази възможност, ще направим избор, който да опрости максимално стъпка Б) в решението. В случай, че многостенът е пирамида, изискваме спомагателната равнина α да е инцидентна с правата g и главния връх V на пирамидата. Тогава сечението е триъгълник с върхове V и пресечните точки на s със страните на основата (Фигура 37.1).



Фигура 37.1



Фигура 37.2

В случай, че многостенът е призма, изискваме спомагателната равнина да е инцидентна с правата g и да е успоредна на околните ръбове на призмата. Тогава сечението е успоредник с двойка срещуположни страни, успоредни на околните ръбове и двойка съседни върхове, съвпадащи с пресечните точки на s със страните на основата. Другите два върха на успоредника лежат върху страните на другата основа на призмата (Фигура 37.2).

В разглежданите от нас случаи основите на многостените лежат в координатните равнини на пространствената координатна система, спрямо която са зададени обектите. Следователно:

- 1) Когато основата лежи в координатната равнина $\mu (O, x, y)$, то $s = \alpha \cap \mu = m_\alpha$;
- 2) Когато основата лежи в координатната равнина $v (O, x, z)$, то $s = \alpha \cap v = n_\alpha$; 3)
- 3) Когато основата лежи в координатната равнина $\pi (O, y, z)$, то $s = \alpha \cap \pi = p_\alpha$;
- 4) Стъпките на околните ръбове на многостените съвпадат с основните им върхове, лежащи в координатните равнини.

Последният факт подпомага по-бързото построение на необходимите дири на α в стъпка А).

Пресечните точки на правата s със страните на основата на многостена, лежаща в съответната координатна равнина се определят директно, след което построението на сечението е елементарно.

Нека опишем трите възможни случая за вида на многостените, които ще пресичаме:

P.1 Две пирамиди с главни върхове U и V ;

P.2 Пирамида с главен връх V и призма с околнен ръб PP^o ;

Р.3 Две призми с околни ръбове съответно AA^o и PP^o .

Да означим с t правата UV за случая **Р.1** или правата през точка U , която е успоредна на PP^o за случая **Р.2**. **Правата t се нарича върхова права**. Достатъчно е всяка от спомагателните равнини α да е инцидентна с върховата права t , за да е гарантирано сечението да бъде триъгълник или успоредник. Наистина, от $t \subset \alpha$ следва $U, V \subset \alpha$ или $U \subset \alpha$ и $PP^o \parallel \alpha$.

Тогава $m_\alpha \subset M_t$, $n_\alpha \subset N_t$, $p_\alpha \subset P_t$. Така с намирането на необходимата стъпка на върховата правата t вече е определена една точка от съответната дърка на α .

В случая **Р.3** е удобно спомагателните равнини α да са успоредни едновременно на околните ръбове и на двата многостена. За целта през произволна точка K се построяват прави $a \parallel AA^o$ и $p \parallel PP^o$ и чрез стъпките на тези прави се построяват дърките на равнината $\lambda(a,p)$. Тогава достатъчно е спомагателните равнини α да са успоредни на λ , което означава $m_\alpha \parallel m_\lambda$, $n_\alpha \parallel n_\lambda$, $p_\alpha \parallel p_\lambda$. В случая можем да считаме, че отново имаме върхова права, но сега тя е безкрайна.

От друга страна дърките на спомагателните равнини α ще минават и през стъпките на околните ръбове, лежащи в тях. Както вече отбелязахме в 4), те съвпадат с основните върхове на многостените, защото основите им лежат в координатните равнини.

Като рекапитулация на казаното до тук следва, че специалният избор на спомагателните равнини α да минават през правата t за случаите **Р.1** и **Р.2** или да са успоредни на λ за случая **Р.3** свежда посроението на правата s (съвпадаща с дърка на α) до свързване на стъпките на две прави (върховата права t и околнен ръб) или построяване на права през точка (стъпка на околнен ръб, т.е. основен връх) и успоредна на дърка на равнината λ .

Във връзка с третата основна стъпка в решението на задачата за пробод на права с многостен ще отбележим, че тъй като правата g и сечението лежат едновременно в равнината α , то съществуването на пресечните точки на g със сечението е гарантирано и точно тези точки са търсените прободи (Фигура 37.1, Фигура 37.2).

Брой и вид на прободите върху произволен околнен ръб на всеки от взаимно пресичащите се многостени

Оказва се, че когато два многостена се пресичат, може да има части от тях, които не участват в пресичането. Те съдържат околните ръбове, които нямат общи точки с другия многостен. Тези части е прието да се наричат **изолирани**.

Нека припомним, че всички спомагателни равнини, които се използват при взаимното пресичане на два многостена, образуват сноп равнини с носител върховата права, която е крайна, когато пресичаме две пирамиди или пирамида и призма и е безкрайна, когато пресичаме две призми. Определянето на изолираните части върху многостените, които ще пресичаме, става с помощта на контурните или наричани още **допирателни спомагателни равнини** през върховата права, така че вътре в двустенния ъгъл, определен

от тях, да са разположени всички останали спомагателни равнини. Това означава аналогично разположение на дирите на допирателните спомагателни равнини върху чертежната равнина. Следователно дирите на допирателните спомагателни равнини за всеки многостен ще отсичат от основата на другия многостен изолираните им части, ако има такива. Стъпките на онези околни ръбове, които не пробождаат другия многостен, са разположени именно в изолираните части. Броят на изолираните части може да бъде 2, 1 или 0, защото основите на разглежданите многостени са изпъкнали.

Разположение на изолираните части върху двете тела и влиянието му върху вида на линията на пресичане

1. *Изолираните части са две.* Има две възможности за разположение на двете изолирани части.

1.1 Съществува точно по една изолирана част върху всеки многостен. Това означава, че всеки от многостените има околни ръбове, които не пробождаат другия многостен. Сега линията на пресичане е една затворена пространствена начупена линия.

1.2 Двете изолирани части са разположени върху единия многостен. Това означава, че точно единият от двата многостена има околни ръбове, които не пробождаат другия. Сега линията на пресичане съдържа два пространствени многоъгълника.

2. *Изолираната част е една.* Това е възможно, когато една двойка допирателни спомагателни равнини съвпадат. Следователно два околни ръба не само се пресичат, но и общата им спомагателна равнина е допирателна едновременно и за двата многостена. Пресечната точка на тези два специални околни ръба наричаме **точка на допиране за двата многостена**.

Сега линията на пресичане може да се разглежда или като една затворена начупена линия, която минава два пъти през допирната точка или като две затворени начупени линии с обща точка – допирната точка.

3. *Не съществува изолирана част.* Това е възможно, когато двете двойки допирателни спомагателни равнини съвпадат. Следователно двата многостена имат две допирни точки, съвпадащи с пресечните точки на двете двойки околни ръбове, чиито общи спомагателни равнини съвпадат съответно с двете общи допирателни спомагателни равнини. Сега линията на пресичане съдържа няколко самостоятелни компоненти с две общи точки – допирните точки. Тя може да се разглежда или като една начупена затворена линия, която минава по два пъти през всяка от допирните точки или като няколко пространствени многоъгълника, всеки от които е с върхове и в допирните точки.

Поради изпъкналостта на основите, допирните точки не могат да бъдат повече от две, когато техният брой е крайно число. Случаят на съществуване на безброй допирни точки ще разгледаме по-късно.

Когато линията на пресичане представлява една начупена затворена пространствена линия (пространствен многоъгълник), това означава, че всяко тяло пресича другото отчасти. Този случай на пресичане на две тела се нарича **зазъбване**.

Когато линията на пресичане се състои от няколко многоъгълника (най-често два), някои от които са пространствени, а други равнинни се казва, че има **проникване**.

Класификация на прободите, базирана на взаимното положение на спомагателните равнини на различните околни ръбове

C1). Спомагателната равнина на околнен ръб от единия многостен не минава през околнен ръб на другия многостен. Тогава съществуват следните възможности:

C1.1. Разглежданият околнен ръб няма обща точка с другия многостен ;

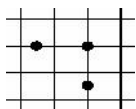
C1.2. Разглежданият околнен ръб пробоща другия многостен в две точки, разположени във вътрешността на две различни негови стени ;

C2). Спомагателните равнини на два околни ръба от различни многостени съвпадат.

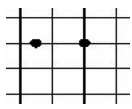
Тогава съществуват следните възможности:

C2.1. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба не е допирателна за нито единия от двата многостена.

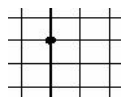
Сега всеки от околните ръбове има по два пробода : един общ – пресечната им точка - и по един във вътрешността на околна стена на другия многостен. Общият брой на прободните точки на двата пресичащи се околни ръба е три (Фигура 37.3) ;



Фигура 37.3 C2.1



Фигура 37.4 C2.2



Фигура 37.5 C3

C2.2. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба е допирателна точно за единия от двата многостена. В този случай двата пресичащи се околни ръба имат два пробода, от които единият е общ (Фигура 37.4) ;

C3). Общата спомагателна равнина на два околни ръба от различни многостени е едновременно допирателна за двата многостена, т.е. съвпада с едната двойка допирателни спомагателни равнини за двата многостена (Фигура 37.5). Двата околни ръба имат един общ пробод.

*Ще казваме, че **два пресичащи се многостена имат допирна точка**, когато две от техните допирателни спомагателни равнини съвпадат и там лежат точно два околни ръба, принадлежащи на различни многостени.*

C4). Двете двойки допирателни спомагателни равнини за двата пресичащи се многостена съвпадат, т.е. многостените имат две допирни точки.

C5). Спомагателните равнини на два околни ръба от единия многостен съвпадат. Тогава съществуват следните възможности:

C5.1. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба от единия многостен не минава през околнен ръб на другия многостен.

Тогава всеки от двата разглеждани околни ръбове е в ситуацията C1).

C5.2. Общата спомагателна равнина на двата околни ръба от единия многостен минава през околнен ръб на другия многостен, т.е. три околни ръба имат обща спомагателна равнина.

Сега има две двойки от разглежданите три околни ръба, които са в ситуацията C2) или C3).

C5.2 U C2.

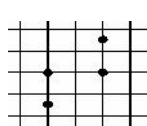
Общият брой на прободите е четири като всеки ръб има по два пробода, разположени по

един във вътрешността на околна стена и върху споменатия вече трети околнен ръб на другия многостен. Отсечката върху този трети околнен ръб, с краища двата пробода, принадлежи на линията на пресичане на двата многостена.

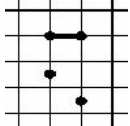
Нека припомним, че два околних ръба, лежащи в една и съща околна стена на многостен, се наричат съседни.

C5.2.1 Двата околних ръба от единия многостен не са съседни. Следователно общата спомагателна равнина не е допирателна за нито един от многостените. Тогава отсечката върху третия околнен ръб не е сегмент от линията на пресичане (Фигура 37.6) ;

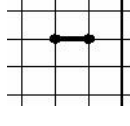
C5.2.2 Двата околних ръба от единия многостен са съседни. Следователно общата спомагателна равнина е допирателна само за този многостен. Тогава отсечката върху третия околнен ръб е сегмент от линията на пресичане (Фигура 37.7) ;



Фигура 37.6 C5.2.1



Фигура 37.7 C5.2.2



Фигура 37.8 C5.2.3

C5.2 U C3

C5.2.3 Общата спомагателна равнина за трите околних ръба е допирателна едновременно за двата многостена.

Прободите са два и са пресечните точки на околните ръбове на единия многостен с третия околнен ръб от другия многостен (Фигура 37.8).

*Ще казваме, че **два пресичащи се многостена имат отсечка на допиране**, когато две от техните допирателни спомагателни равнини съвпадат и там лежат точно два съседни околних ръба от единия многостен и един околнен ръб от другия многостен.*

C6) Спомагателните равнини на четири околних ръба (по два от всеки многостен) съвпадат. Прободите са четири, разположени по два върху всеки от тези околних ръбове и нито един от тях не е във вътрешността на околна стена. Сега съществуват три възможности за двете двойки околних ръбове:

C6.1. Околните ръбове в двете двойки не са съседни. Сега начупената линия на пресичане не съдържа отсечка, принадлежаща на някой от тези ръбове (Фигура 37.9).

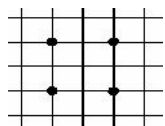
C6.2. Околните ръбове в точно една от двете двойки са съседни. Следователно общата спомагателна равнина е допирателна точно за един от двата многостена.

Сега ситуацията C5.2.2 се появява двукратно и начупената линия на пресичане на двата многостена съдържа две отсечки, принадлежащи на околните ръбове, които не са съседни (Фигура 37.10).

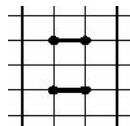
C6.3. Околните ръбове в двете двойки са съседни. Следователно общата спомагателна равнина е допирателна едновременно за двата многостена.

Сега четирите пробода са върхове на равнинен четириъгълник, чиято площ е общата част на околните стени, където лежат двете двойки съседни околних ръбове. Тази площ се присъединява към начупената линия на пресичане на двата многостена (Фигура 37.11).

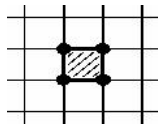
Ще казваме, че **два пресичащи се многостена имат площ на допиране**, когато две от техните допирателни спомагателни равнини съвпадат и там лежат точно двете двойки съседни околни ръбове и за двата многостена.



Фигура 37.9 C6.1



Фигура 37.10 C6.2



Фигура 37.11 C6.3

Околните ръбове, чиито стъпки са разположени в изолираните части, могат да не се изследват при търсене на прободите.

Класификацията на прободните точки на околните ръбове на единия многостен с другия многостен дава онова важно знание на студентите, което ще им позволи да превърнат учебния процес в творчески, импровизирайки върху зададена тема.

Следваща важна стъпка в решението на задачите е сглобяване на линията на пресичане на двата многостена. Две прободни точки определят отсечка в начупената линия на пресичане, когато лежат едновременно в околна стена на единия и на другия многостен. По този начин се намира и пресечницата на двете стени, в които лежат едновременно и двата пробода. Една отсечка от линията на пресичане е видима, когато лежи едновременно във видими околни стени и за двата многостена. Процесът на описване на линията на пресичане на двата многостена наричаме **развиване на прободната схема**. Описването на линията на пресичане се облекчава от използването на схема, съдържаща развивките на двата многостена.

Стандартните етапи в решението на всяка задача за взаимно пресичане на многостени са:

- Е.1 Изобразяване на многостените;
- Е.2 Построяване на върховата права и нейните стъпки;
- Е.3 Построяване на прободите на всеки околнен ръб;
- Е.4 Развиване на прободната схема;
- Е.5 Корекция на видимостта на ръбовете, съобразена с взаимното пресичане.

Програмата Sam full не само представя последователно и подробно „стъпка по стъпка“ всеки от тези етапи с придружаващ коментар, но тя включва и следните интересни компоненти:

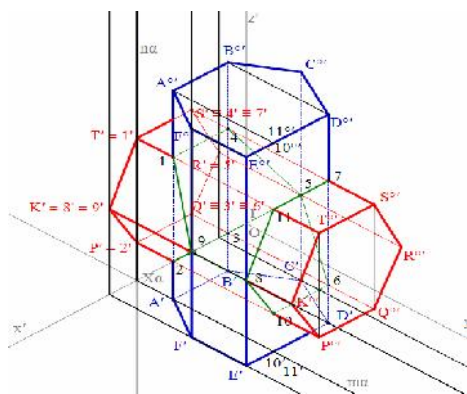
1. възможност за динамична промяна на изгледа на композицията чрез ротация, трансляция, мащабиране, свиване или разтягане на композицията в желано направление на окончателния чертеж с всички работни линии.
2. триизмерен образ на композицията на двата пресичащи се многостена
3. триизмерен образ на тялото на общата част на двата пресичащи се многостена

Нека отбележим, че по време на презентацията на етапите в решението на задачата се скриват всички построения, които не участват в текущия и следващи етапи.

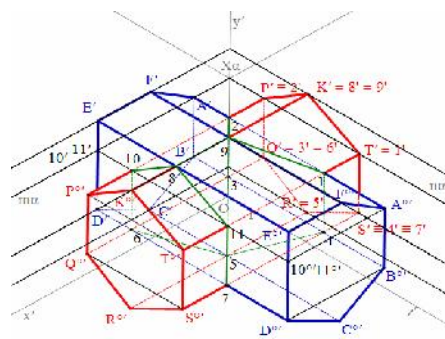
Основите на телата, които ще пресичаме, лежат в координатните равнини, и не участват в пресичането, както е в учебните програми на всички висши училища у нас, изучаващи дескриптивна геометрия. Считайки, че не намаляваме общността на разглеждане изискваме основата на поне единия многостен да лежи в хоризонталната (предметната) равнина μ .

Така ние вградихме в програмата 9 от съществуващите 18 възможности за разположение на основите на двата многостена в координатните равнини за всеки от случаите Р.1, Р.2, Р.3.

Чрез ротация на цялата композиция, която предлага програмата Sam , можем да получаваме представа за композицията в ситуация на променено по наше желание местоположение на двете основи (Фигури 37.12 и 37.13).



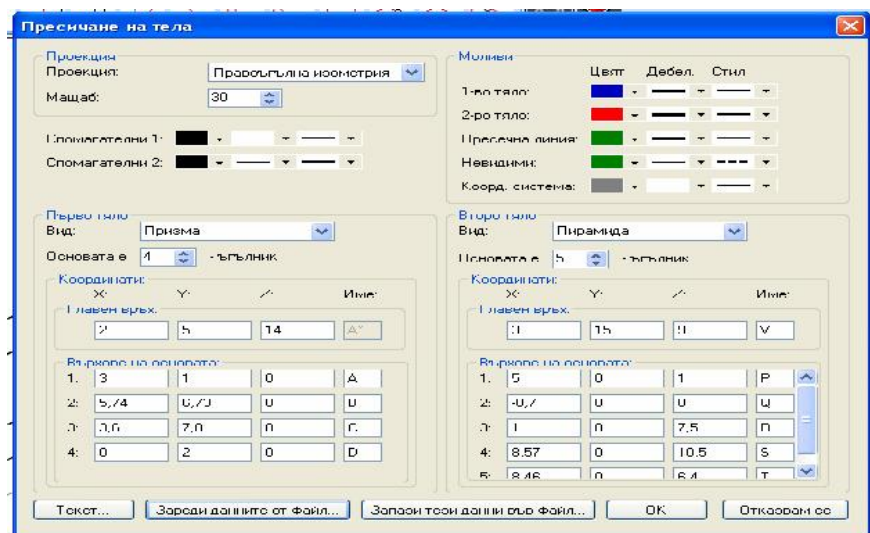
Фигури 37.12



Фигури 37.13

Както вече знаем, когато точката лежи в първа, втора или трета координатна равнина, то главният ѝ аксонометричен образ съвпада съответно с първия, втория или третия вторичен аксонометричен образ. За да облекчим чертежите от натрупване на означения, ще се условим основните върхове на телата, стъпките на върховата права t и дирите на равнините α да означаваме само с главните им аксонометрични образи.

Чрез бутона „Реша задачата“, разположен най-долу в дясно, се извиква диалоговият прозорец, в който се въвеждат параметрите за задачата (Фигура 37.14). Уточнява се вида на многостените и се въвеждат координатите на върховете на двата многостена като произволни десетични числа. Този факт улеснява авторската работа при създаване на нови задачи, особено когато искаме да включим цялото разнообразие на прободните точки, описано в нашата класификация. Прави се избор на първоначален мащаб и на една от петте най-използвани аксонометрични проекции, включени в нашия софтуерен продукт : кабинетна проекция, кавалиерна перспектива, военна перспектива, правоъгълна изометрия и правоъгълна диметрия. Панелът „Моливи“ в горния десен ъгъл предлага избор на цвят,



Фигури 37.14

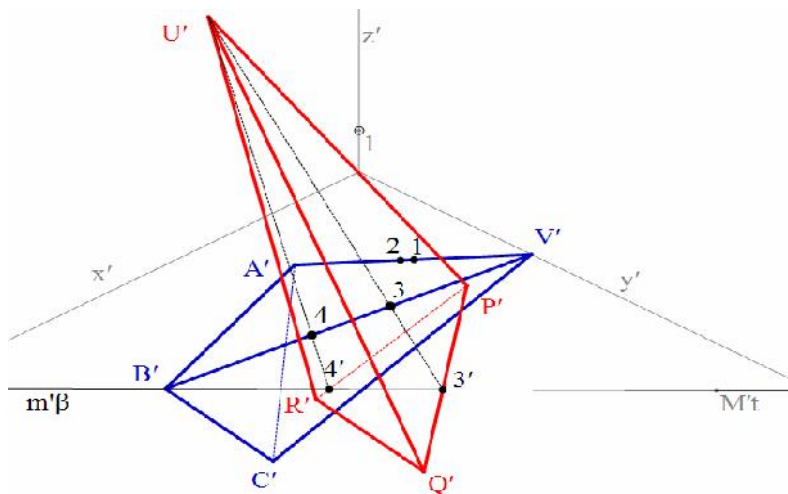
стил, дебелина, видимост на всеки от обектите (многостени, линия на пресичане, координатна система). На края чрез бутона ОК стартираме решението на поставената задача.

Ползвателят има възможност да прегледа изгледа на композицията във всяка от петте специални проекции, за да направи своя избор и там да проследи подробно решението чрез панела за презентация. Интерактивността на чертожното поле позволява да се манипулират елементи на чертежа поотделно, в групи или целият чертеж наведнъж.

Чрез движение на точката 1, инцидентна с оста z' , може директно да се променя мащаба в чертожното поле, без да е необходимо връщане в диалоговия прозорец (Фигура 37.14).

Нека припомним ъглите между аксонометричните оси и коефициентите на изменение p, q, r за петте най-използвани аксонометрични проекции, включени в нашия софтуерен продукт:

ПРОЕКЦИИ	$\angle(x', y')$	$\angle(y', z')$	$\angle(z', x')$	p	q	r
Кабинетна персп.	135°	135°	90°	1	½	1
Кавалиерна персп.	135°	135°	90°	1	1	1
Военна персп.	90°	135°	135°	1	1	1
Увеличена правоъг.	120°	120°	120°	1	1	1



Фигура 37. 14 в)

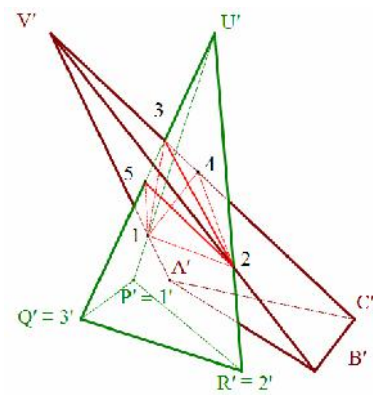
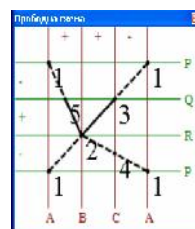
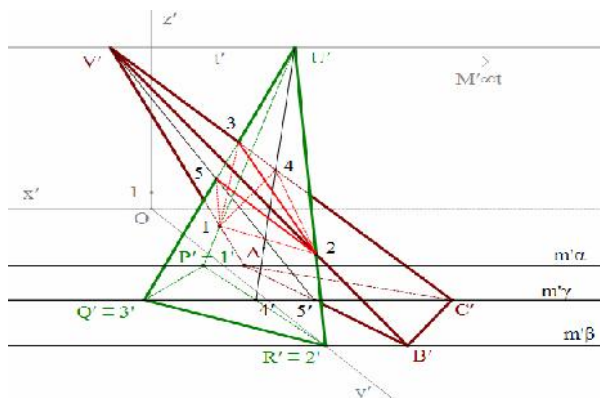
по-леко построенията. Аксонометричният образ m'_β на първата дия на спомагателната равнина $\beta(VB, UV)$ пресича $P'Q'$ и $P'R'$ съответно в точките $3'$ и $4'$. Следователно β пресича пирамидата $UPQR$ в триъгълника $U3'4'$, чийто образ в чертожното поле е $U'3'4'$. Тогава пресечните точки $3 = V'B' \cap 3'U'$ и $4 = V'B' \cap 4'U'$ са образите на прободите на околния ръб VB с пирамидата $UPQR$.

Както е видно от прободната схема линията на пресичане се състои от две затворени начупени линии и следователно имаме случай на проникване. До същия извод се стига и като се проследят изолираните части – те са две и двете са разположени върху $P'Q'R'$.

Задача 37.2 Изобразете взаимното пресичане на пирамидите $VABC$ [$V(2, 0, 10)$, $A(0, 4, 0)$, $B(-4; 10, 0)$, $C(-9; 6, 0)$] и $UPQR$ [$U(-7; 0, 10)$, $P(2, 4, 0)$, $Q(6, 8, 0)$, $R(0, 10, 0)$].

Решение Основите на двете пирамиди отново са в първата координатна равнина μ , но сега върховата права е успоредна на оста x , което означава че е успоредна и на μ . Ето защо първата стъпка на върховата права е безкрайната точка на x и първите дири на всички спомагателни равнини са успоредни на x . Това обстоятелство облекчава много съставителите на задачи да включат две допирни точки, именувани тук $1 = VA \cap UP$ и $2 = VB \cap UR$. Третата двойка околни ръбове VC и UQ също имат обща спомагателна равнина, но тя не е допирателна (случай C2.1). Линията на пресичане съдържа три триъгълника с обща страна, съединяваща двете допирни точки: 123, 124, 125.

Решението е представено в кавалиерна перспектива (Фигури 37. 15).



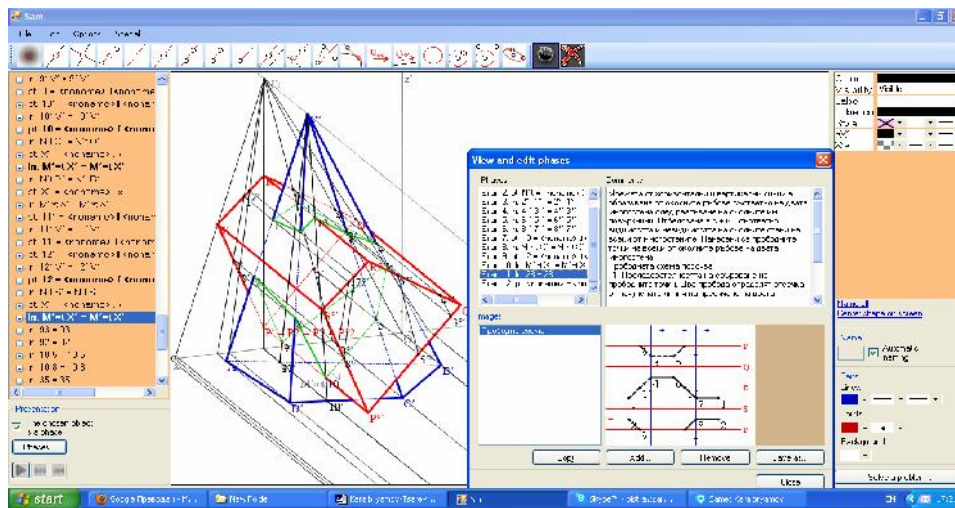
Фигура 37. 15 а)

Фигура 37. 15 б)

Взаимно пресичане на призма и пирамида

Върховата права минава през върха на пирамидата и е успоредна на околните ръбове на призмата.

Задача 37.3 Изобразете взаимното пресичане на пирамидата $VABC$ [$V(6; 5; 12,5)$, $A(8; 1; 0)$, $B(0; 4,5; 0)$, $C(3; 8; 0)$, $D(7,5; 6; 0)$] и правилната призма $PQRSP^{\circ}Q^{\circ}R^{\circ}S^{\circ}$ [$P(6; 0; 1)$, $Q(2; 0; 5,5)$, $R(6; 0; 8)$, $S(8; 0; 6)$] с височина 11.



Фигура 37.16

Задача 37.3

Example 2

Основите на пирамидата и призмата са съответно в μ и ν . Това изисква да се намерят първата и втората стъпки на върховата права. Първата стъпка на върховата права е безкрайна точка, защото околните ръбове на призмата са успоредни на оста u , което означава, че те са

успоредни на μ . Втората стъпка на върховата права е крайна точка. Задачата е стандартна и съдържа прободни точки само от вида $C1$). Тъй като има две изолирани части и те са разположени върху основата на призмата, то пирамидата прониква в призмата. Решението е представено в увеличена правоъгълна диметрия.

Взаимно пресичане на две призми

При взаимно пресичане на две призми върховата права t минава през безкрайните точки на околните ръбове на двете призми, т.е. тя е безкрайна права и всяка спомагателна равнина, която е успоредна на околните ръбове на двете призми е представител на безкрайна права t . Следователно достатъчно е да изобразим дирите на спомагателната равнина на един от околните ръбове и всички останали ще й бъдат успоредни. За тази цел ние използваме:

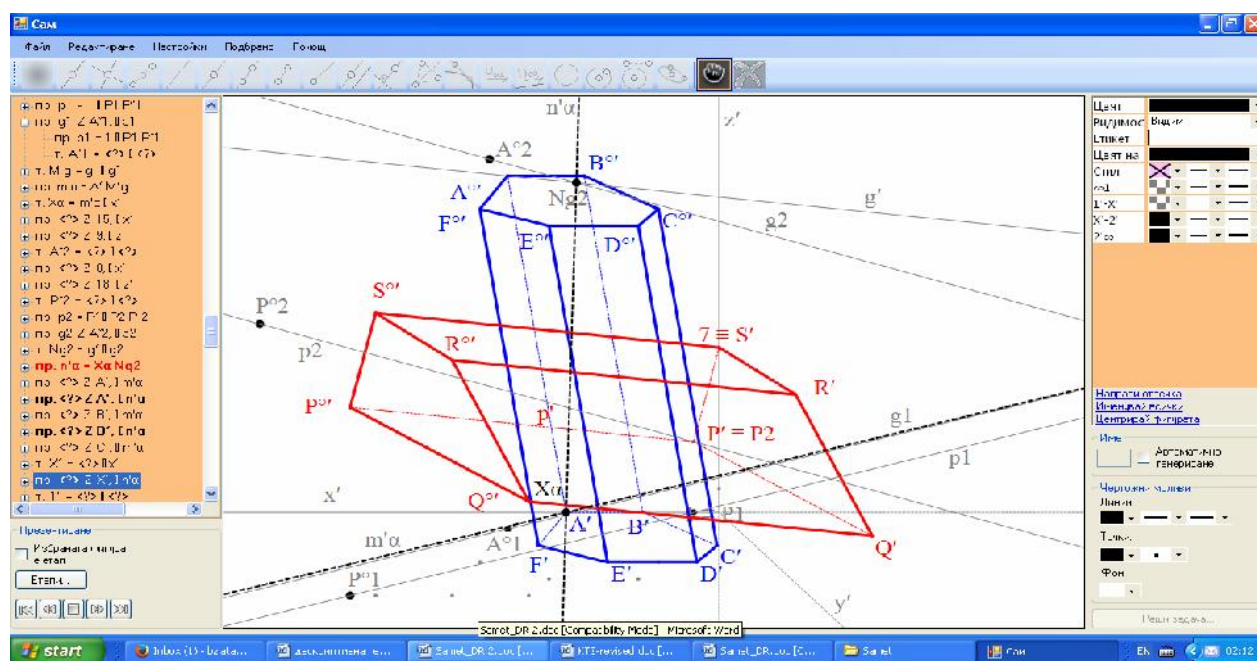
- 1) основния връх на избрания околнен ръб, лежащ в координатна равнина, защото той съвпада със стъпката му;
- 2) стъпките на правата, която минава през другия връх на избрания ръб и е успоредна на околните ръбове на другата призма;

Например, на Фигура 37.17 са изобразени две призми $ABCDEF A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ} E^{\circ} F^{\circ}$ с основа в

μ и $PQRSP^0 Q^0 R^0 S^0$ с основа в v . Избран е околният ръб AA^0 , чиято първа стъпка е върхът A . Ако с p е означен околния ръб PP^0 , то отбелязан е неговият главен аксонометричен образ $p' = P'P^0$ и вторичните образи $p_1 = P_1P^0_1$ и $p_2 = P_2P^0_2$.

Построена е правата g , инцидентна с върха A^0 и успоредна на правата $p = PP^0$ (Задача 9.1 от §36). На Фигура 37.17 могат да се проследят правите $g'z A^0$ и $g' \parallel p'$; $g_1z A^0_1$ и $g_1 \parallel p_1$; $g_2z A^0_2$ и $g_2 \parallel p_2$.

Намерени са стъпките на правата g : $M'_g = g' \cap g_1$ и $N'_g = N_2^g = g' \cap g_2$



Фигура 37.17

Първата спомагателна равнина α (асоциирана с околния ръб AA^0) $\alpha z AA^0$ и $\alpha \parallel PP^0$ има първа дия $m_\alpha = A M_g$ с главен аксонометричен образ $m'_\alpha = A' M'_g$ и втора дия $n_\alpha = X_\alpha N_g$ с главен аксонометричен образ $n'_\alpha = X_\alpha N'_g$, където $X_\alpha = x' \cap m'_\alpha$ (Задача 9.2 от §36).

Нека отбележим, че n'_α не пресича основата $P'Q'R'S'$, от където следва и заключението: околният ръб AA^0 не пробоща призмата $PQRSP^0 Q^0 R^0 S^0$.

Съществено се използва фактът, че първата и втората (третата) дии за всяка равнина се пресичат върху оста x (y).

Нашата програма разглежда и поддържа следните два случая:

I) Околните ръбове на двете призми не са успоредни на нито една от координатните равнини.

II) Околните ръбове на поне една от призмите са успоредни на i -та ($i = 1, 2, 3$) координатна равнина. Следователно i -те дии на спомагателните равнини са успоредни на тези околни ръбове (виж §33, Теорема VI от стереометрията). Това прави излишно предварителното определяне на направлението на i -те дии на спомагателните равнини.

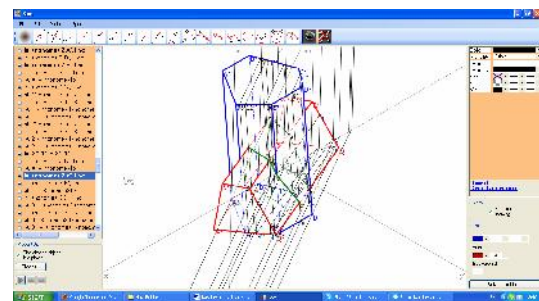
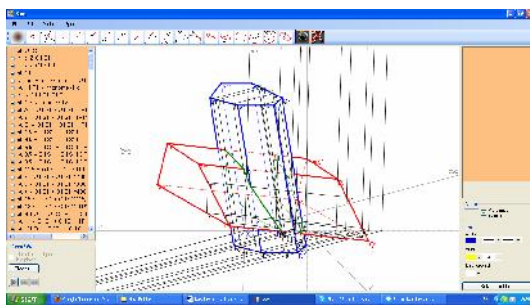
Правилните призми с основи в координатните равнини са специален случай на II). Тук направлението и на двете използвани дии са известни. Те са успоредни на две от координатните оси. Така в чертожното поле те са успоредни на две от аксонометричните

оси в зависимост от това в кои координатни равнини са разположени основите на призмите.

Задача 37.4 Изобразете взаимното пресичане на призмите $ABCDEA^{\circ}B^{\circ}C^{\circ}D^{\circ}E^{\circ}$ [$A(6; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(1; 4; 0)$, $D(3,5; 6; 0)$, $E(7; 6; 0)$, $A^{\circ}(9; 2; 15)$] и $PQRSP^{\circ}Q^{\circ}R^{\circ}S^{\circ}$ [$P(1; 0; 3)$, $Q(-5; 0; 1)$, $R(-2; 0; 6)$, $S(0; 0; 7)$, $P^{\circ}(18; 10; 7)$].

Решение Тази задача илюстрира случая I). Като е използвана интерактивността на чертожното поле на Фигура 37.17 е представена стъпка от решението на тази задача с акцент върху дири на спомагателната равнина α (асоциирана с околния ръб AA°). Определянето на дири на следващите спомагателни равнини следва Задача 9.3.1.2 от §36.

Решението е представено в кабинетна проекция (Фигура 37.17 а)) и в увеличена правоъгълна изометрия (Фигура 37.17 б)), за да се покаже влиянието на избора на проекция върху изгледа на композицията на двете пресичащи се тела. Моменталното представяне на решението на задачата във всяка от петте популярни аксонометрични проекции е голямо удобство за ползвателя, което определя важно предимство на програмата Sam.



Фигура 37.17 а)

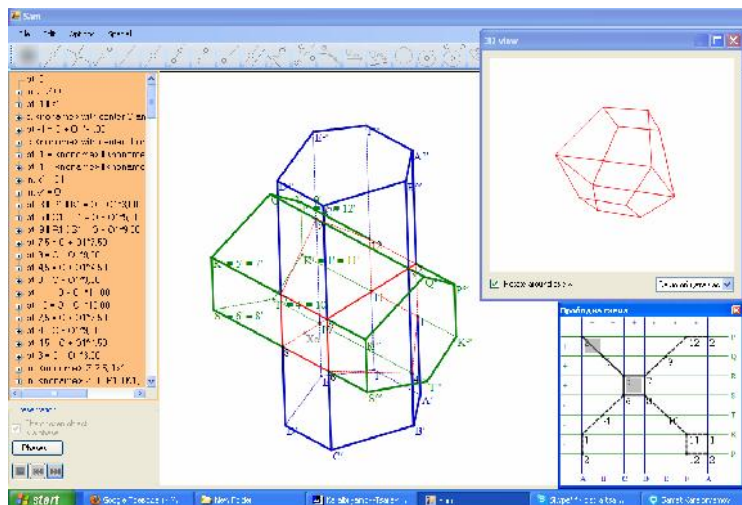
Задача 37.4

Фигура 37.17 б)

Двете призми са наклонени. Фигурите показват, че четириъгълната призма прониква в шестоъгълната. Чрез панела за презентация можете да проследите всички стъпки на построенията, 3D изображението на цялата композиция или само на общата част, да експериментирате върху чертежа.

Задача 37.5 Изобразете взаимното пресичане на правилните призми $ABCDEF A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ}D^{\circ}E^{\circ}F^{\circ}$ [$A(3; 7,5; 4)$, $B(5; 9; 0)$, $C(9; 7,5; 0)$, $D(9; 4,5; 0)$, $E(5; 3; 0)$, $F(3; 4,5; 0)$, $A^{\circ}(3; 7,5; 14)$] и $PQRSTKP^{\circ}Q^{\circ}R^{\circ}S^{\circ}T^{\circ}K^{\circ}$ [$P(3; 0; 7,5)$, $Q(5; 0; 9)$, $R(9; 0; 7,5)$, $S(9; 0; 4,5)$, $T(5; 0; 3)$, $K(3; 0; 4,5)$, $P^{\circ}(3; 10; 7,5)$].

Решение (Фигура 37.18)



Основите на призмите лежат в координатните равнини μ и ν . Околните ръбове са успоредни на осите x и y . Следователно главните аксонометрични образи на първите и втори дири на спомагателните равнини ще бъдат успоредни

Фигура 37.18

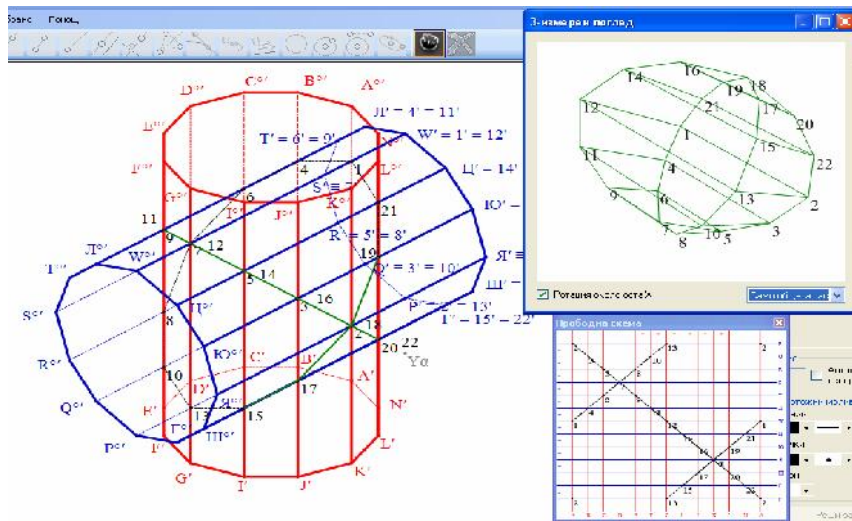
Задача 37.5

съответно на x' и y' .

Интересен момент в задачата е присъствието на две допирателни площи, защото са изпълнени условията на случая С6.3 за околните ръбове AA° , FF° , PP° , KK° и CC° , DD° , RR° , SS° . Решението е представено в увеличена правоъгълна изометрия.

Задача 37.6 Изобразете взаимното пресичане на правилните призми $ABCDEFGIJ$ $KL A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ E^\circ F^\circ G^\circ I^\circ J^\circ K^\circ L^\circ$ [$A(2; 5; 0)$, $B(2,5; 3,5; 0)$, $C(3,5; 2,5; 0)$, $D(5; 2; 0)$, $E(6,5; 2,5; 0)$, $F(7,5; 3,5; 0)$, $I(7,5; 6,5; 0)$, $J(6,5; 7,5; 0)$, $K(5; 8; 0)$, $L(3,5; 7,5; 0)$ $A^\circ(2; 5; 10)$] и $PQRSTKP^\circ Q^\circ R^\circ S^\circ T^\circ K^\circ$ [$P(0; 5; 2)$, $Q(0; 3,5; 3,5)$, $R(0; 2,5; 3,5)$, $S(0; 2,5; 5)$, $T(0; 2,5; 6,5)$, $L(0; 3,5; 7,5)$, $W(0; 5; 8)$, $\text{Ц}(0; 6,5; 7,5)$, $\text{Ю}(0; 7,5; 3,5)$, $\text{Я}(0; 8; 5)$, $\text{Ш}(0; 7,5; 3,5)$, $\Gamma(0; 6,5; 2,5)$, $P^\circ(10; 5; 2)$].

Решение (Фигура 37.19) Характерното в тази задача е наличието на две допирни точки, (7 и 18) в линията на пресичане, а останалите прободи са от вида С6.



Фигура 37.19

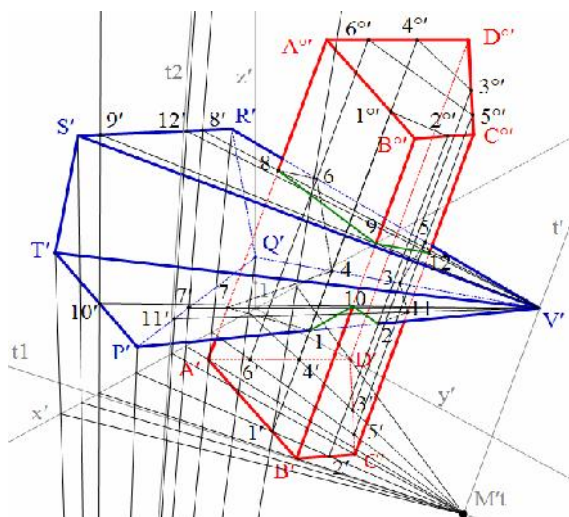
Задача 37.6

Всички задачи са създадени с помощта на програмата Sam.

Следващите задачи са импровизация върху следната задача:

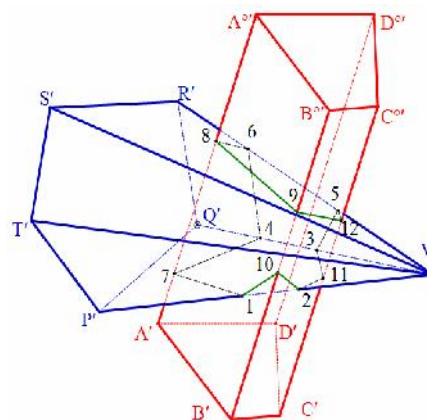
Пример 37.1 Изобразете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$ [$A(3; 1; 0)$, $B(5; 6,73; 0)$, $C(3,6; 7,8; 0)$, $D(0; 4; 0)$, $A^\circ(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(0; 0; 2)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(7,5; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].

Решение Основите на призмата и пирамидата лежат съответно в координатните равнини μ и ν . Ето защо на Фигура 37.20 а) присъстват първите и вторите дири на спомагателните



Фигура 37.20 а)

Пример 37.1



Фигура 37.20 б)

равнини, минаващи съответно през първата и втората стъпки на върховата права t . Точката N'_t е по-отдалечена от многостените, поради което на фигурите не присъства. Разбира се, N'_t може да се извика на екрана без затруднение.

Околните ръбове DD^0 , VS и VT не участват в пресичането, защото техните стъпки са в изолираните части. Върху всяка от основите има точно по една изолирана част. Това определя типа на пресичането – *зазъбване*. Линията на пресичане се състои от последователните съединителните отсечки на следните прободи: 1,10,2,11,3,5,12,9,8,6,4,7, както е видно и от прободната схема.

На Фигура 37.20 б) е представена композицията на двата пресичащи се многостена, освободена от работните линии.

Ние можем да променяме координатите на върховете, за да получим друг тип на пресичане.

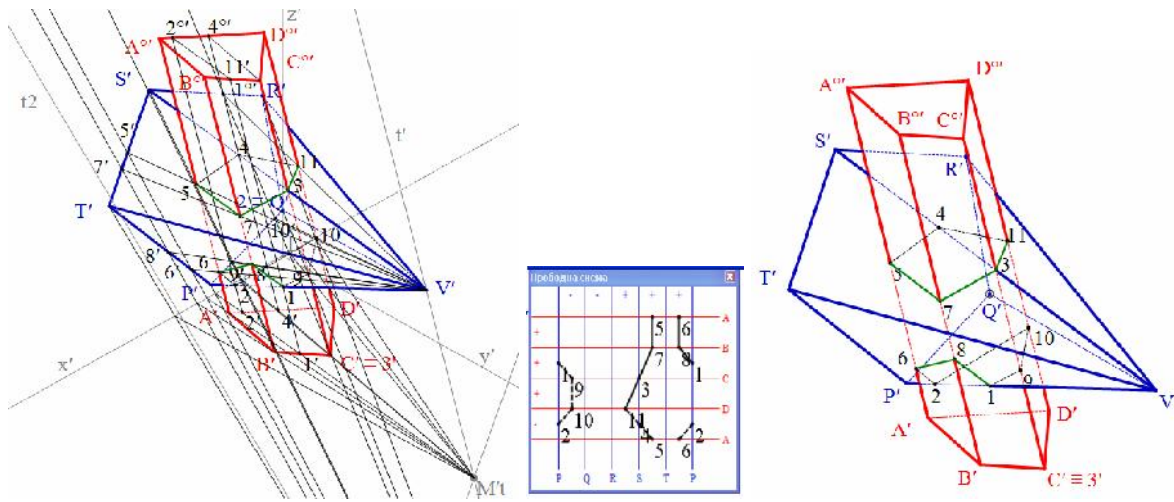
С помощта на програмата Sam и класификацията на прободните точки ние съставихме няколко примерни задачи, които представяме на вашето внимание. Решението на всеки пример можете да проследите „стъпка по стъпка“ в детайли, да прочетете коментарите, придружаващи етапите, да експериментирате върху интерактивното чертожно поле. Нашите кратки бележки по решенията ще касаят опорните точки, осигуряващи разнообразието на вида на прободите, а от там и типа на пресичане. Към всяко решение добавяме кадри от презентацията, представящи чертежа с всички работни линии (Фигура 37.2i а), прободната схема и композицията на взаимно пресичащите се призма и пирамида, „изчистена“ от работните линии (Фигура 37.2i б).

Пример 37.2 . Изобразете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^0 B^0 C^0 D^0$ [$A(3,8; 1,2; 0)$, $B(4,4; 4; 0)$, $C(3,2; 5,5; 0)$, $D(1; 3,5; 0)$, $A^0(14; 8; 20,5)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(12; 19; 14)$, $P(3,5; 0; 0,5)$, $Q(0; 0; 2)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(6,5; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].

Решение Чрез този пример стартираме с искането *призмата да проникне в пирамидата*. Това означава, че трябва да поставим две изолирани части върху основата на пирамидата. При нашия избор околните ръбове VQ , VR и VT на пирамидата няма да прободат призмата. Нека отбележим, че околните ръбове CC^0 и VS имат обща спомагателна равнина,

поради което те се пресичат в точката 3 (случай С2.1).

Линията на пресичане се състои от две затворени начупени линии (Фигури 37.21).

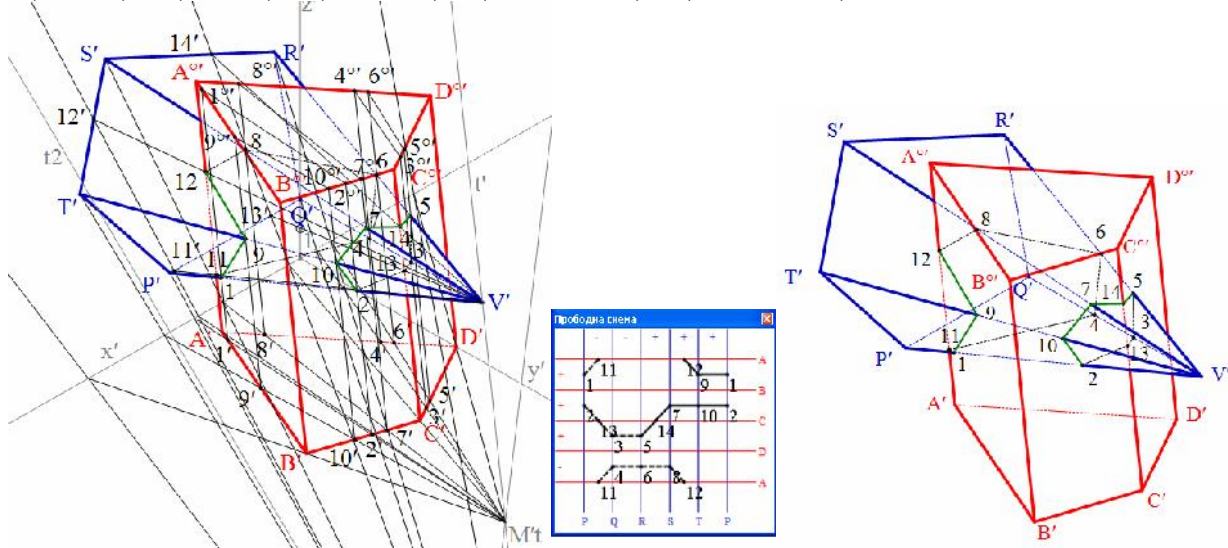


Фигура 37.21 а)

Пример 37.2

Фигура 37.21 б)

Пример 37.3 . Изобразете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ}$ $[A(4; 1; 0), B(6,5; 6,73; 0), C(3,2; 7,8; 0), D(0; 6; 0), A^{\circ}(12; 8; 16)]$ и пирамидата $VPQRST$ $[V(12; 19; 14), P(5; 0; 2), Q(0; 0; 2), R(1; 0; 7,5), S(7,5; 0; 10,5), T(8,46; 0; 6,4)]$.



Фигура 37.22 а)

Пример 37.3

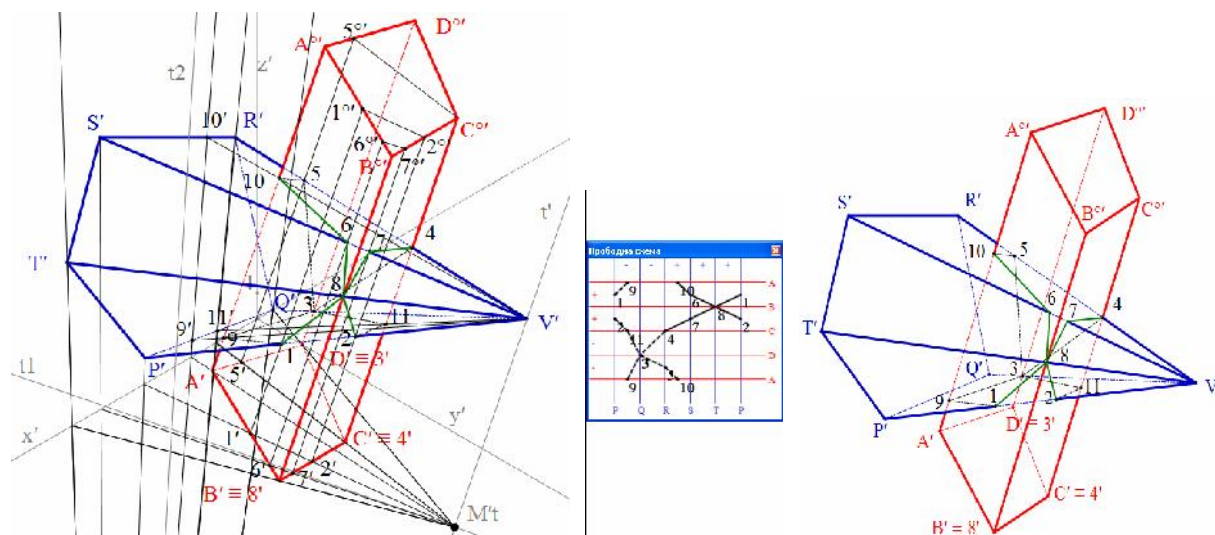
Фигура 37.22 б)

Решение (Фигури 37.22) В този пример запазваме типа на пресичане, но изискваме пирамидата да проникне в призмата. За да постигнем тази цел е достатъчно да осигурим съществуване на две изолирани части върху основата на призмата. Там попадат ръбовете BB° и DD° както е видно от Фигура 37.22 а). Изолираните части са определени от контурните спомагателни равнини, асоциирани с околните ръбове TT° и VQ°

Пример 37.4 . Изобразете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ}$ $[A(3; 1; 0),$

$B(5,75; 6,73; 0)$, $C(2,8; 6,7; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A^\circ(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(-0,7; 0; 0)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(7; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].

Решение (Фигури 37.23) Сега решаваме да включим две допирни точки. Избрали сме да представим случая С4) с допирни точки $8 = BB^\circ \ll VT$ и $3 = DD^\circ \ll VQ$. Това е постигнато



Фигура 37.23 а)

Пример 37.4

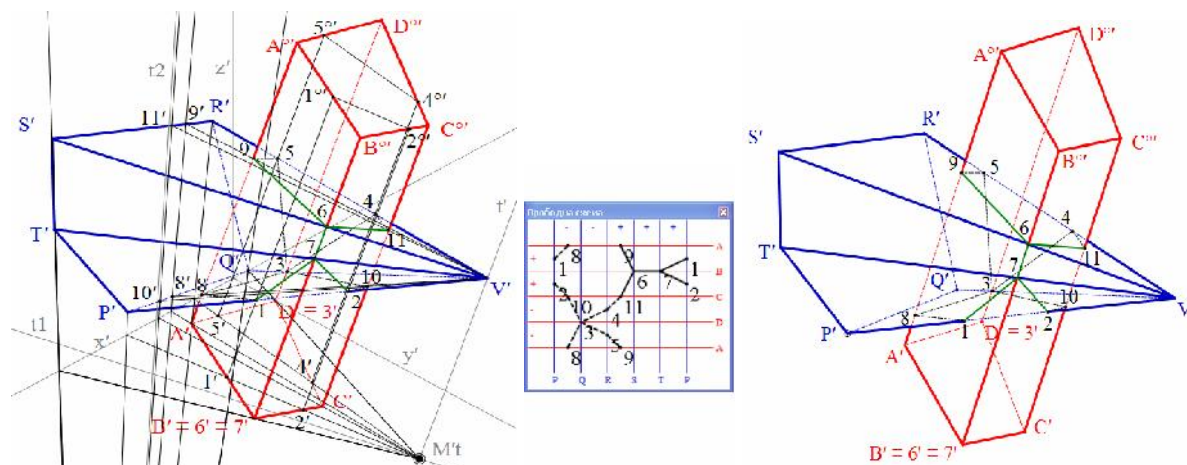
Фигура 37.23 б)

чрез съвпадане на контурните (допирателните) спомагателни равнини за двете двойки околни ръбове BB° , VT и DD° , VQ . Линията на пресичане може да бъде описана като 1,8,7,4,3,9,1 и 2,11,3,5,10,6,8,2.

Пример 37.5 . Изобразете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$ [$A(3; 1; 0)$, $B(5,74; 6,73; 0)$, $C(3,6; 7,8; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A^\circ(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(-0,7; 0; 0)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(8,57; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].

Решение (Фигури 37. 24) В тази задача е включена една допирна точка 3 и една допирна отсечка 67. Допирната точка 3 от предишния пример е запазена.

Както е показано на чертежа и на прободната схема тук се изисква спомагателните равнини на следните три околни ръба VS , VT и BB° да съвпадат (случаят С5.2.3).

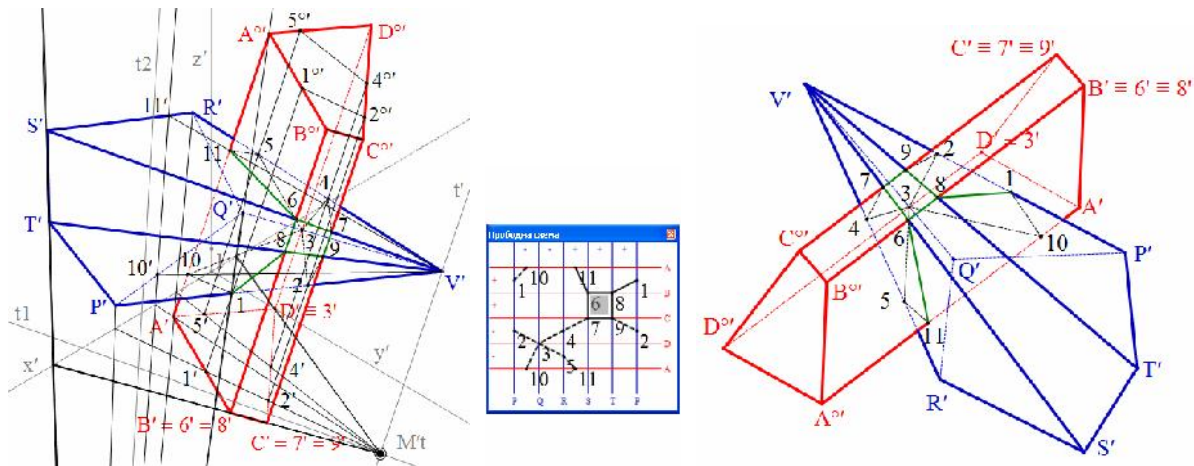


Фигура 37.24 а)

Пример 37.5

Фигура 37.24 б)

Пример 37.6 . Изобразете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ}$ [$A(3; 1; 0)$, $B(5,75; 6,73; 0)$, $C(5,25; 8,12; 0)$, $D(0; 3,3; 0)$, $A^{\circ}(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(-1,6; 0; 1,8)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(8,58; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].



Фигура 37.25 а)

Пример 37.6

Фигура 37.25 б)

Решение (Фигури 37.25) На края предлагаме да бъде включена *допирна площ във формата*

на трапец и една допирна точка. Това се случи, защото осигурихме:

- 1) двойките от съседни околни ръбове VS , VT и BB° , CC° да имат обща спомагателна равнина;
- 2) спомагателните равнини на околните ръбове VQ и DD° да са едновременно допирателни и да съвпадат.

Решението е представено във военна перспектива (Фигури 37.25), а на (Фигура 37.25 б)) и след ротация

Упражнение №17

Представете вашата импровизация върху Задача 37.1, Задача 37.2, Задача 37.3, Задача 37.4, Задача 37.5, Задача 37.6 и върху следните задачи:

Задача 37.7 Изобразете взаимното пресичане на пирамидите $UABCD$ [$U(6;13;7)$, $A(4;0;1)$, $B(2;0;5,5)$, $C(6;0;9)$, $D(8;0;7)$] и $VPQR$ [$V(6;5;12,5)$, $P(7;1;0)$, $Q(6;7,5;0)$, $R(3;8;0)$].

Задача 37.8 Изобразете взаимното пресичане на пирамидите $UABCD$ [$U(2;2;8)$, $A(0;2,5;0)$, $B(3;5;0)$, $C(6;5;0)$, $D(7;2;0)$] и $VPQR$ [$V(7;2;3)$, $P(0;4;1)$, $Q(0;5,5;4,5)$, $R(0;2;6)$, $S(0;1;3,5)$].

Задача 37.9 Изобразете взаимното пресичане на пирамидата $UPQR$ [$U(-2;8;10)$, $P(2;0;0)$, $Q(9;1;0)$, $R(5;8;0)$] и призмата $ABCD A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$ [$A(4; 3; 0)$, $B(-1;0;0)$, $C(1;3;0)$, $D(-2;6;0)$, $A^\circ(4;7;9)$].

Задача 37.10 Изобразете взаимното пресичане на пирамидата $UPQRS$ [$U(2;3;10)$, $P(0;0;0)$, $Q(-2;4;0)$, $R(1;6;0)$, $S(5;5;0)$] и призмата $ABCD A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$ [$A(0;0;2)$, $B(6;0;1)$, $C(3;0;6)$, $D(-2;0;8)$, $A^\circ(0;2;8)$].

Задача 37.11 Изобразете взаимното пресичане на призмите $ABCD A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$ [$A(7;2;0)$, $B(0;5;0)$, $C(3;10;0)$, $D(8;8;0)$, $A^\circ(7;2;10)$] и призмата $PQRP^\circ Q^\circ R^\circ$ [$P(0;3;1,5)$, $Q(0;12;1)$, $R(0;6;5)$, $P^\circ(10;-2;4)$].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 . Глаголев, Н. Проективная геометрия, Москва, 1963.
- 2 . Кокстер, Х. Действительная проективная плоскость, Москва, 1960.
- 3 . Матеев, А. Проективна геометрия, София, 1959.
- 4 . Петканчин, Б. Проективна геометрия, София, 1945.
- 5 . Петров, Г. Дескриптивна геометрия, София, 1960.
6. Царева, Б. Проективна геометрия, Пловдив, 1988.
7. Царева, Б. Балабанова, Р. Стайкова, М. Ръководство за решаване на задачи по синтетична геометрия, Пловдив, 1992.
8. Царева, Б. Синтетична геометрия, Пловдив, 2010
9. Karaibryamov S., Tsareva B., Zlatanov B., Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 7, Number 1, ISSN 1933-2823.
10. Karaibryamov S., Tsareva B., Zlatanov B., Educational Software for Interactive Training of Students on the Theme “Mutual Intersecting of Pyramids and Prisms in Axonometry” Acta Didactica Napocensia, Volume 5, Number 1, 2012

Съдържание

Част I	Проективна геометрия	3
1.	Динамични геометрични софтуери	
3		
2.	Динамичен геометричен софтуер Sam	
4		
3.	Аксиоми на инцидентността .на двумерното проективно пространство. P_2	7
4.	Принцип на дуалност ..	
9		
Упражнение № 1		14
5. Аксиоми на инцидентността на тримерното проективно пространство P_3		17
6. Евклидов модел на аксиомите инцидентността на P_3		19
Упражнение № 2		26
7. Свойства на пълния четириъгълник и пълния четиристранник		29
8. Хармонични групи		30
Упражнение № 3		33
9. Едноизмерими фигури. Перспективност между едноизмерими фигури		
Упражнение № 4		
10. Аксиоми на наредбата .		
11. Наредено изображение и аксиома на непрекъснатостта		
12. Проективност .		
13. Теорема на Пап.		
Упражнение № 5		
14. Допълване на проективност		
Упражнение № 6		
15. Инволюция		
Упражнение № 7		
16. Колинеация		
17. Хомология		
Упражнение № 8		
18. Афинна геометрия		
19. Афинитет и афинна хомология		
Упражнение № 9		
20. Евклидова геометрия		
Упражнение № 10		
21. Корелация и полярност		
22. Спрегнати точки относно полярност		
23. Криви от втора степен и втори клас		
24. Полус и поляра относно конично сечение		
Упражнение № 11		
25. Определяне на крива от втора степен с точки или точки и прави		
26. Теорема на Щаут и Щайнер		
27. Теорема на Паскал и Брианшон		
Упражнение № 12		

- 28. Проективни свойства на коничните сечения
Упражнение № 13
- 29. Афинни свойства на коничните сечения
Упражнение № 14
- 30. Метрични свойства на коничните сечения
Упражнение № 15
- 31. Проективна форма на евклидовата метрика
- 32. Общи задачи

Част II Дескриптивна геометрия

- 33. Въведение в дескриптивната геометрия
- 34. Аксонометрия. Определение, видове аксонометрични проекции
- 35. Изобразяване на фигури, лежащи в координатната равнина π ,
на многостени и валчести тела с основи в π в кабинетна проекция и кавалиерна перспектива
Упражнение № 16
- 36 Изобразяване на точки, прави и равнини в обща аксонометрия и инцидентност между тях
- 37 Взаимно пресичане на призми и пирамиди в аксонометрия
Упражнение № 17