ВЪВЕДЕНИЕ ВЪВ ФИНАНСОВАТА МАТЕМАТИКА

А. ЗАХАРИЕВ Х. КИСКИНОВ М. ПЕТКОВА

Тема 1. ЛИХВА И ЛИХВЕНИ ИЗЧИСЛЕНИЯ

Съдържание:

I. ВЪВЕДЕНИЕ

I.1. Означения и определения.

- Лихва L – сумата, която дебитора трябва да плати на кредитора за ползването на определен капитал за определен интервал от време (лихвен срок).
- Лихвен срок (лихвено време) – интервал от време, през който даден капитал носи лихва.
- Лихвеният процент за определен лихвен срок е равен на $\frac{p}{100}$, където p е сумата, която дебитора трябва да плати на кредитора за ползването на 100 единици от определен капитал за лихвения срок.

• Лихвен период – изчислява се в дни (d), месеци (m) или години (n). Това е периода в началото, или в края, на който лихвата трябва да бъде платена. Лихвения срок съдържа един или повече лихвени периода.

• Лихвеният процент i за определен лихвен период е равен на $i = \frac{p}{100}$, където p е сумата, която дебитора трябва да плати на кредитора за ползването на 100 единици от определен капитал за лихвения период.

• Начален капитал – K_0

• Нараснал (олихвен) капитал – K_n, K_m, K_d

I.2. Видове лихви:

а) По начина на олихвяване (при наличието на два или повече лихвени периода в лихвения срок):

- **Проста лихва –** През всеки лихвен период се олихвява само началния капитал, без да се добавят лихвите начислени в предходните периоди;

- **Сложна лихва –** През всеки лихвен период се олихвяват началния капитал и всички лихви начислени в предходните периоди.

б) По начин на плащане:

- **Декурсивна** – лихвата е дължима (трябва да бъде платена) в края на лихвения период;

- **Антиципативна** – лихвата е дължима (трябва да бъде платена) в началото на лихвения период.

II. ДЕКУРСИВНА ЛИХВА.

II.1. ПРОСТА ЛИХВА - олихвяване без капитализиране на лихвата

1.1. Формули за проста декурсивна лихва.

• С i ще означаваме лихвеният процент записан като десетична дроб), а с $q = 1 + i$ ще означаваме лихвения фактор (множителя с който умножаваме началния капитал за да получим олихвения капитал).

• С L_n, L_m, L_d ще означаваме лихвите за лихвения срок, измерен в дни (d), месеци (m) или години (n).

Формулите за проста лихва са изведени при следните допускания:

а) Сумата K_0, внесена в началото на годината се олихвява с лихва $p\%$ дължима в края на лихвения период.

б) Лихвата от предходния период се се добавя към капитала и не се олихвява.

Формули за величината на олихвената сума K_n след n-тата година :

$$K_1 = K_0 + K_0\left(\frac{p}{100}\right) = K_0(1+i) = K_0 q^1$$

$$K_2 = K_1 + K_0\left(\frac{p}{100}\right) = K_0\left(1+2\left(\frac{p}{100}\right)\right) = K_0(1+2i)$$

$$\dots$$

$$K_n = K_{n-1} + K_0\left(\frac{p}{100}\right) = K_0\left(1+n\left(\frac{p}{100}\right)\right) = K_0(1+ni)$$

$$K_n = K_0(1+ni) \quad \Rightarrow \quad K_0 = K_n(1+ni)^{-1}$$

$$L_n = K_0.i.n\,.$$

Началния капитал K_0 наричаме настояща (дисконтирана) стойност на олихвения капитал K_n, пресметната със сконтов процент i за n периода с просто дисконтиране.

Пример 1: Капитал K_0 = 20 000€ се олихвява с годишен лихвен процент 5,5% без капитализиране на лихвата. Каква ще бъде олихвената сума след 3 години?

Решение:

$$K_3 = K_0\left(1+3*\left(\frac{5.5}{100}\right)\right) = 20\,000(1+3*0.055) = 23\,300$$

Пример 2: Сумата в размер на 5 000€ е резултат от олихвяването на капитал K_0 за период от 2 години с годишна лихва 8% без капитализиране. Намерете началния капитал K_0.

Решение:

$$K_2 = 5000 = K_0\left(1+2*\frac{8}{100}\right) \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_2}{1+2*\frac{8}{100}} = \frac{5\,000}{1+0.16} = 4\,310.34$$

1.2. Релативни лихвени проценти

Лихвените проценти i и i^* наричаме **релативни** лихвени проценти относно периодите t и t^*, ако е в сила равенството:

$$\frac{i^*}{t^*} = \frac{i}{t}$$

Лихвените проценти i и i^* дават еквивалентен резултат за един и същ инвестиционен период при **просто олихвяване**.

Тогава ако i е лихвения процент за периода t, то олихвения за периода t^* капитал се получава формулата:

$$K_{t^*} = K_0\left(1 + f\,i\right) = K_0\left(1 + f\,\frac{p}{100}\right),$$

където

$$f = \frac{\text{брой лихвени периоди в лихвения срок } t^*}{\text{брой лихвени периоди в лихвения срок } t}$$

Нека периода t е равен на една година, а i е годишен лихвен процент . Тогава ако m е броя на месеците в лихвения срок ($1 \le m \le 12$), то

$$K_m = K_0\left(1 + m\frac{i}{12}\right) \;\Rightarrow\; K_0 = K_m\left(1 + m\frac{i}{12}\right)^{-1},\; L_m = \frac{K_0.i.m}{12}.$$

Аналогично, ако d е броя на дните в лихвения срок ($1 \le d \le 365$), то

$$K_d = K_0\left(1 + d\,\frac{i}{D}\right) \;\Rightarrow\; K_0 = K_d\left(1 + d\,\frac{i}{D}\right)^{-1}, \quad L_d = \frac{K.i.d}{D}.$$

където с D сме означили броя на дните в годината съгласно формата, по който се пресмятат (виж т. 1.4).

Пример 3. Клиент поставил на банков депозит 6000 лв. при номинална годишна лихва 20%. Каква сума ще получи клиентът след: а) 7 месеца; б) 3 години; в) 3 години и 9 месеца?

Решение:

$\textit{Дадено}: K_0 = 6000$ лв. $\qquad\qquad$ $\textit{Търси се}: K_n = ?$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{20}{100} = 0.20$$

а) $K_n = K_0(1 + ni) = 6000\left(1 + \frac{7}{12} * 0.20\right) = 6\,700$ лв.

б) $K_n = 6000\left(1 + 3 * 0.20\right) = 9\,600$ лв.

в) $K_n = 6000\left(1+3\frac{9}{12}*0.20\right)=10\,500$ лв.

Пример 4. Каква лихва е получил кредитор, ако за отпуснат кредит за срок от 6 месеца му е върната сума в размер на 46,55 лв. при номинална годишна лихва 22%?

Решение:

$\text{\textit{Дадено}}: K_n = 46.55$ лв. $\qquad\qquad$ $\text{\textit{Търси се}}: L = ?$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{22}{100} = 0.22$$

$$n = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ години}$$

$$L = \frac{K_n\, i\, n}{1+ni} = \frac{46.55*0.22*0.5}{1+0.5*0.22} = 4.61 \text{ лв.}$$

Пример 5. По заем в размер на 50 000 лв. от 15 май до 15 юни същата година е начислена лихва от 480 лв. Какъв е лихвеният процент на отпуснатия заем?

Решение:

$\text{\textit{Дадено}}: K_0 = 50000$ лв. $\qquad\qquad$ $\text{\textit{Търси се}}: i = ?$

$$L = 480 \text{ лв.}$$

$$n = \frac{61}{365} \text{ години}$$

$$L = K_0\, i\, n \quad \Rightarrow \quad i = \frac{L}{K_0\, n} = \frac{480}{50\,000*\frac{61}{365}} = 0.0574 \quad (p = 5.74\%)$$

Пример 6. При проста номинална годишна лихва 15% за олихвяване са внесени 48 000 лв. След колко време тази сума ще нарасне на 50 000 лв.?

Решение:

$\text{\textit{Дадено}}: K_0 = 48\,000$ лв. $\qquad\qquad$ $\text{\textit{Търси се}}: n = ?$

$$K_n = 50\,000 \text{ лв.}$$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0\, i} = \frac{50\,000 - 48\,000}{48\,000*0.15} = 0.2777 = 0\text{г.} + 12*0.2777 = 0\text{г.}3\text{м.} + 30*0.3324 = 0\text{г.}\,3\text{м.}\,10\text{д.}$$

Пример 7. За какъв срок е необходимо да депозирате свободни парични средства при номинален годишен лихвен процент 20%, така че сумата да нарасне 2.5 пъти?

Решение:

$Дадено: K_0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $Търси\ се: n = ?$

$$K_n = 2.5K_0$$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{20}{100} = 0.20$$

$$K_n = K_0(1+ni)$$

$$2.5K_0 = K_0(1+n*0.2) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1.5}{0.2} = 7.5 = 7г. + 12*0.5 = 7г.\ 6м.$$

Пример 8. На 10 септември фирма получава заем, по който се начислява 40% номинална годишна лихва. На 30 септември същата година фирмата връща заема като внася сумата от 65 480 лв., включваща ползвания заем и лихвата. Да се изчислят лихвата и сумата на заема.

Решение:

$Дадено: K_n = 65\,480$ лв. $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $Търси\ се: L = ?$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{40}{100} = 0.40 \qquad\qquad K_0 = ?$$

$$n = \frac{21}{365} \text{ години}$$

$$L = \frac{K_n\ i\ n}{1+ni} = \frac{65\,480*0.40*\frac{21}{365}}{1+\frac{21}{365}*0.40} = 1\,473.05\text{лв.}$$

$$K_0 = K_n - L = 65\,480 - 1\,473.05 = 64\,006.95 \text{ лв.}(\approx 64\,007\text{лв.})$$

Пример 9. Господин Иванов оставил на депозит в банка сумата от 16 000лв. при следните условия: за първата половин година лихвата е 24%, а на всяко следващо тримесечие лихвата нараствала с 3%. Намерете нарасналата сума за година и половина, ако лихвата се начислява само върху първоначалната сума. При какъв постоянен лихвен процент може да се получи същата сума? Намерете нарасналата сума за година и половина, ако изменението на лихвата се начислява върху капитализираната сума.

Решение:

$$\text{Дадено}: K_0 = 16\,000 \text{ лв.} \qquad\qquad \text{Търси се}: K_n = ?$$

$$i_1 = \frac{p_1}{100} = \frac{24}{100} = 0.24; \qquad n_1 = \frac{6}{12} \qquad\qquad \bar{i} = ?$$

$$i_2 = \frac{p_2}{100} = \frac{24+3}{100} = \frac{27}{100} = 0.27; \qquad n_2 = \frac{3}{12}$$

$$i_3 = \frac{p_3}{100} = \frac{27+3}{100} = \frac{30}{100} = 0.30; \qquad n_3 = \frac{3}{12}$$

$$i_4 = \frac{p_4}{100} = \frac{30+3}{100} = \frac{33}{100} = 0.33; \qquad n_4 = \frac{3}{12}$$

$$i_5 = \frac{p_5}{100} = \frac{33+3}{100} = \frac{36}{100} = 0.36; \qquad n_5 = \frac{3}{12}$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$$

$$K_n = K_0(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 + n_4 i_4 + n_5 i_5)$$

$$= 16\,000\left(1 + \frac{6}{12}*0.24 + \frac{3}{12}*0.27 + \frac{3}{12}*0.30 + \frac{3}{12}*0.33 + \frac{3}{12}*0.36\right) = 22\,960 \text{ лв.}$$

Нарасналата сума ще бъде същата при постоянен лихвен процент

$$\bar{i} = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 + n_4 i_4 + n_5 i_5}{n} = \frac{\frac{6}{12}*0.24 + \frac{3}{12}*0.27 + \frac{3}{12}*0.30 + \frac{3}{12}*0.33 + \frac{3}{12}*0.36}{1.5} = 0.29 \; (\bar{p} = 29\%)$$

1.3. Непосредствени приложения.

Извадка на лихвените проценти по срочните депозити на някои финансови институции в Германия (Фиг. 1)

Лихви по срочни депозити	Лихвени проценти за суми до 5 000 EUR					Лихвени проценти за суми до 50 000 EUR					Минимална сума в EUR
	1 мес.	3 мес.	6 мес.	9 мес.	12 мес.	1 мес.	3 мес.	6 мес.	9 мес.	12 мес.	
Audi Bank	2,35	2,35	2,35	2,35	2,35	2,60	2,60	2,60	2,60	2,60	5.000
Citibank Privatkunden	1,50	2,00	2,00	2,00	2,00	2,20	2,30	2,30	2,30	2,30	2.500
comdirect bank AG	1,75	1,75	-	-	-	2,25	2,25	-	-	-	5.000
Deutsche Bank Online	-	-	1,80	-	2,00	-	-	1,80	-	2,00	2.500
HypoVereinsbank	-	-	1,50	-	1,50	-	-	2,20	-	2,20	2.500
Postbank	1,30	1,65	1,75	-	1,90	1,75	1,90	1,95	-	2,10	2.500
Santander Direkt Bank	-	2,00	2,00	-	2,00	-	2,10	2,10	-	2,10	1.000
Sparda-Bank München eG	1,60	1,60	-	-	2,25	2,05	2,05	-	-	2,25	5.000
Stadtsparkasse Augsburg	0,80	0,80	0,75	-	0,70	1,20	1,20	1,15	-	1,10	500
Stadtsparkasse Dresden	1,50	1,50	1,50	1,50	2,00	1,70	1,70	1,70	1,70	2,00	5.000
Volksbank Eisenberg Direkt	1,75	1,50	1,50	-	-	2,25	2,00	2,00	-	-	5.000
Volkswagen Bank direct	2,35	2,35	2,35	2,35	2,35	2,60	2,60	2,60	2,60	2,60	5.000
von Essen KG	2,45	2,85	2,85	2,85	2,85	2,55	2,60	2,65	2,65	2,75	5.000
BMW Bank	2,00	2,00	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,20	2,20	2,20	10.000
най-ниска лихва	**0,80**	**0,80**	**0,75**	**1,40**	**0,70**	**1,20**	**1,20**	**1,15**	**1,60**	**1,10**	Данните са получени от всички 49 оферти
най-висока лихва	**2,80**	**2,85**	**2,85**	**2,85**	**2,90**	**3,00**	**2,80**	**2,85**	**2,85**	**2,90**	
средна стойност	**1,95**	**2,03**	**2,04**	**2,17**	**2,14**	**2,22**	**2,24**	**2,24**	**2,35**	**2,30**	
Mittelwert vor 4 Wochen	2,04	2,13	2,15	2,24	2,24	2,31	2,36	2,35	2,43	2,40	

Пример 10: Сключен е договор за депозит в размер на $K_0 = 7\,500€$ за срок от 15 май до 16 септември при най-добрите възможни условия (виж таблицата по горе) Каква е натрупаната сума и спестената лихва при използване на немския метод?

Решение:

$$K_f = K_0\left(1+f\left(\frac{p}{100}\right)\right) = 7\,500\left(1+\frac{121}{360}*\frac{2.85}{100}\right) = 7\,571.84$$

Задача 1: Каква първоначална сума K_0 трябва да се депозира на 14.04.2005, за да е възможно 24.12.2005 да се закупи кола на стойност $22\,500€$? Коя банка бихте избрали при условията, представени в таблицата по горе?

1.4. Олихвяване на разплащателни (контокорентни) сметки.

Световна практика при олихвяване на разплащателни сметки

Формати за изчисляване на дневната лихва:

- Английски (365/365)
- Френски (365/360)
- Немски (360/360) или (30/360).

Ако m е броя на олихвяванията в годишната, то стандартната практика за олихвяване на текущи сметки е:

България - $m = 1$ (годишно олихвяване)

Германия - $m = 4$ (тримесечно олихвяване)

САЩ - $m = 12$ (месечно олихвяване)

Определения и формули

Означаваме с i годишния лихвен процент, а с K капитала за олихвяване. Тогава въвеждаме следните понятия и формули за тяхното пресмятане:

- **Лихвочисла** – $ЛЧ = K.d$, където d е броя на дните през които капитала K остава непроменен;
- **Лихвени множители** - $ЛМ = \frac{i}{360}$ (релативен дневен лихвен процент);
- **Лихвени делители** - $ЛД = \frac{360}{i}$;

- $$L_{period} = ЛЧ * ЛМ = \frac{ЛЧ}{ЛД}$$

Пример 11: Наличността по разплащателна сметка в началото на годината е $650{,}85€$. При дебитно салдо сметката се олихвява с 10%, а при кредитно салдо сметката се олихвява с 0,5%. За сумите внесени в банка вальорът е "утре", а при теглене вальорът е "днес".

По сметката са извършени следните операции:

10.01.2005: теглене $1\,500€$;

19.02.2005: внасяне $4\,000€$;

26.04.2005: внасяне $2\,700€$

04.12.2005: теглене $1\,600€$.

Изчислете салдото по сметката на 31.12.2005 г.

Дата на операцията	Сума в EUR	Салдо	Вальор	Дни в периода	ЛЧ Дебит	ЛЧ Кредит
31.12.04	650.85	650	01.01.05	9		5858
10.01.05	-1500	-849.15	10.01.05	41	-34815	
19.02.05	4000	3150.85	20.02.05	66		207956
26.04.05	2700	5850.85	27.04.05	221		1293038
04.12.05	-1600	**4250.85**	04.12.05	28		119024
31.12.05			31.12.05		-34815	1625876

Ако означим $ЛМ_{+} = \frac{0.005}{365}$ и $ЛМ_{-} = \frac{0.10}{365}$, то

$$L_{period} = ЛЧ_{+} * ЛМ_{+} + ЛЧ_{-} * ЛМ_{-} = 1625876 * \frac{0.005}{365} - 34815 * \frac{0.10}{365} = 12.72$$

.

Тогава салдото по сметката на 31.12.2005 г е $4263.57€$.

Пример 12: На 31.12.2013г. година салдото по разплащателната сметка, която се олихвява с 3% годишно е 7000 лева. Лихвата по овърдрафта на разплащателната сметка е 10% годишно. За сумите внесени в банка вальорът е "утре", а при теглене вальорът е "днес". Изчислете салдото по сметката към 31.10.2014г., ако:

12.01.2014г. – внесени 1000 лева;

25.01. 2014г. – теглени 9000 лева;

22.02. 2014г. – внеси 4000 лева;

16.05. 2014г. – внесени 2500 лева;

24.08. 2014г. – теглени 8000 лева;

27.09. 2014г. – внесени 7500 лева.

II.2. СЛОЖНА ДЕКУРСИВНА ЛИХВА

2.1. Условия при олихвяването:

- Лихвите се начисляват в края на всеки лихвен период.
- Реинвестираме (капитализираме) лихвата от предходния период за олихвяване в следващия период.

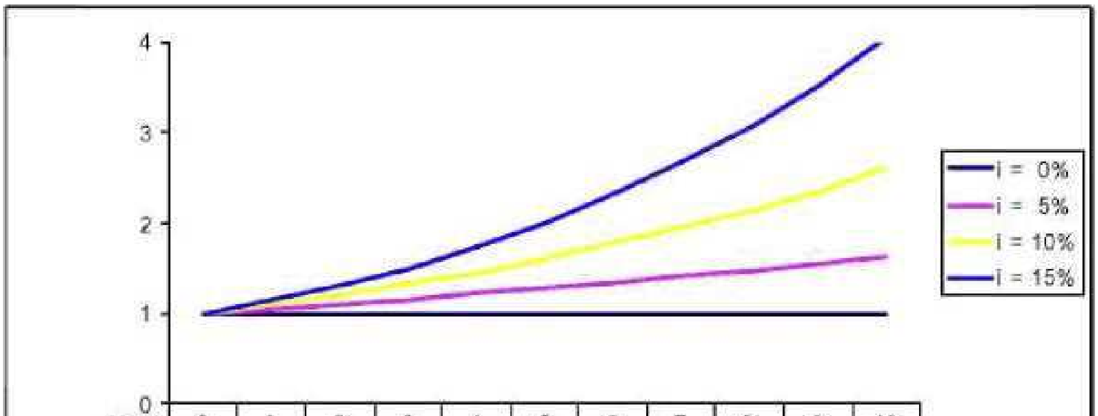
Изчисляване на сложна лихва:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0(1+i) = K_0 q \\
K_2 &= K_1(1+i) = K_0 q^2 \\
&\dots \\
K_n &= K_{n-1}(1+i) = K_0 q^n
\end{aligned}
$$

- Нека Z_n е лихвата през n-тата година. Тогава е в сила формулата:

$Z_n = K_{n-1} i = K_0 q^{n-1} i = K_n - K_{n-1}$ $\Rightarrow$ Геометрична прогресия

Изменение на капитала (1€) при начисляване на сложна лихва



Година	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i = 0%	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i = 5%	1	1,05	1,103	1,158	1,216	1,276	1,34	1,407	1,477	1,551	1,629
i = 10%	1	1,1	1,21	1,331	1,464	1,611	1,772	1,949	2,144	2,358	2,594
i = 15%	1	1,15	1,323	1,521	1,749	2,011	2,313	2,66	3,059	3,518	4,046

2.2. Формули при сложна лихва

$$K_n = K_0(1+i)^n, \quad n = \frac{ln\,K_n - ln\,K_0}{ln(1+i)}, \quad i = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \quad K_0 = K_n(1+i)^{-n}.$$

Множителят $AUF(n,i) = (1+i)^n$ се нарича n-ти лихвен фактор, а множителят $ABF(n,i) = (1+i)^{-n}$ се на n-ти дисконтов фактор,

Пример 13. Изтеглен е кредит от 5 000 лв. при номинална годишна лихва 15%. Трябва да се върне сумата от 7 000 лв. За какъв срок е кредитът?

Решение:

$\text{Дадено}: K_0 = 5\,000$ лв. $\qquad\qquad$ $\text{Търси се}: n = ?$

$K_n = 7\,000$ лв.

$$i = \frac{p}{100} = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$n = \frac{ln\,K_n - ln\,K_0}{ln(1+i)} = \frac{ln\,7000 - ln\,5000}{ln(1.15)} = 2.4075 = 2г. + 12 * 0.4075 = 2г.\,4м.$$

Пример 14. Имате 10 000 лв. и искате да удвоите тази сума след 5 години. Какъв трябва да е номиналният годишен лихвен процент при годишно начислявана лихва?

$\text{Дадено}: K_0 = 10\,000$ лв. $\qquad\qquad$ $\text{Търси се}: i = ?$

$K_n = 20\,000$ лв.

$n = 5$ години

Решение: $i = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{20\,000}{10\,000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.1487 \quad (p = 14.87\%)$

Пример 15. Клиент внесъл в банка на годишен депозит 25 000 лв. при номинална годишна лихва 30%. След 1 година и 9 месеца изтеглил 8 000лв., след 3 години внесъл 4 000лв., а след 2 години и 3 месеца закрил сметката. Каква сума е получил клиентът при закриване на сметката?

Решение:

$$K_n = \left[\left[25\,000(1+0.30)^{1.75} - 8\,000\right](1+0.3)^3 + 4\,000\right](1+0.3)^{2.25} = 132\,372.53 \text{ лв.}$$

Пример 16. Търговец получил банков кредит в размер на 30 000 лв. за 7 години при следните условия: за първите 2 години номиналната годишна лихва е 22%, за следващите 3 години процентът нараснал с 0.5%, а за последните 2 години нараснал с 0.8%. Каква е сумата, която търговецът трябва да върне на банката в края на срока? При какъв постоянен лихвен процент сумата в края на срока ще остане същата?

Решение:

Дадено : $K_0 = 30\,000$ лв. *Търси се*: $K_n = ?$

$i_1 = \frac{p_1}{100} = \frac{22}{100} = 0.22;$ $n_1 = 2$ години $\bar{i} = ?$

$i_2 = \frac{p_2}{100} = \frac{22+0.5}{100} = \frac{22.5}{100} = 0.225;$ $n_2 = 3$ години

$i_3 = \frac{p_3}{100} = \frac{22.5+0.8}{100} = \frac{23.3}{100} = 0.233;$ $n_3 = 2$ години

$n = n_1 + n_2 + n_3$

$$K_n = K_0(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}$$
$$= 30\,000(1+0.22)^2(1+0.27)^3(1+0.233)^2 = 124\,788 \text{ лв.}$$

$$\bar{i} = \sqrt[n]{(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}} - 1 = \sqrt[7]{(1+0.22)^2(1+0.225)^3(1+0.233)^2} - 1 = 0.2258 \quad (\bar{p} = 22.58\%)$$

Задача 2: Депозит се олихвява с годишен лихвен процент 4,5% и след 7 години ще бъдат изплатени 1 000€ . Каква е била първоначалната стойност на депозита?

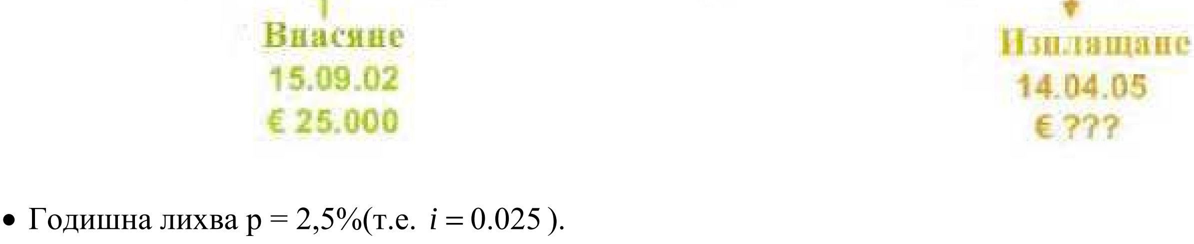
Задача 3: При какъв лихвен процент един капитал ще бъде удвоен след 10 години? Какъв трябва да бъде лихвеният процент, за да нарасне капиталът с половината от стойността си след 7 години?

Задача 4: Колко години трябва да се олихвява един капитал при годишен лихвен процент 5% с капитализиране на лихвата, за да се удвои?

II.3. СМЕСЕНО ОЛИХВЯВАНЕ

Смесеното олихвяване възниква основно при наличие на непълни лихвени периоди в лихвения срок. Стандартната практика е непълните периоди да се олихвяват с проста релативна лихва.

Разглеждаме следната ситуация:



- Годишна лихва p = 2,5%(т.е. $i = 0.025$).

- Непълните лихвени периоди се олихвяват с проста релативна дневна лихва.
- Целите лихвени периоди се олихвяват със сложна лихва.

Тогава за олихвения капитал днес получаваме

$$K_{днес} = K_0(1+t_1\frac{i}{365})(1+i)^2(1+t_2\frac{i}{365}),$$

където с t_1 и t_2 сме означили броя на дните в непълните лихвени периоди.

II.4. ОЛИХВЯВАНЕ С ПЕРИОД, ПО-МАЛЪК ОТ ГОДИНА.

Означения: k – брой на лихвените периоди в една година, n – брой на периодите в които се извършва олихвяване, съдържащи се в даден инвестиционен период не по-голям от една година, $n \le k$.

4.1. Просто олихвяване.

- **Стандартната практика е при олихвявания когато лихвения период е равен на един ден да се използва просто олихвяване.**
- Нека лихвените проценти i и i^* са релативни лихвени проценти за периодите t и t^*. Тогава лихвените проценти i и i^* дават **еквивалентен резултат** за един и същ инвестиционен период при просто олихвяване.

4.2. Сложно олихвяване.

а) Ефективен лихвен процент за даден инвестиционен период, с n периода на сложно олихвяване, при k броя на лихвени периоди в една година, с лихвен процент i_k:

$$i_{ef} = (1+i_k)^n - 1.$$

Равенството по горе показва, че олихвяването на даден капитал с проста лихва i_{ef} за дадения инвестиционен период, е еквивалентно на n пъти сложно олихвяване през същия инвестиционен период, при m броя на лихвени периоди в една година, с лихвен процент i_k. Лихвеният процент i_{ef} се нарича **ефективен** лихвен процент за дадения инвестиционен период.

б) Ефективен годишен лихвен процент.

В случай, че инвестиционният период е една година (n = k) то

$$i_{efy} = (1 + i_k)^k - 1.$$

Равенството по горе показва, че олихвяването на даден капитал с проста годишна лихва i_{efy} е еквивалентно на k пъти сложно олихвяване през годината, при k броя на лихвени периоди в една година, с лихвен процент i_k. Лихвеният процент i_{efy} се нарича **ефективен** годишен лихвен процент

в) Конформен лихвен процент i_{co} за даден инвестиционен период, с n периода на олихвяване при к броя на лихвени периоди в една година, с лихвен процент за инвестиционния период i_{nom} :

$$i_{co} = (1 + i_{nom})^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Равенството по горе показва, че олихвяването на даден капитал с проста лихва i_{nom} за дадения инвестиционен период е еквивалентно на n пъти сложно олихвяване през същия инвестиционен период, при к броя на лихвени периоди в една година, с лихвен процент i_{co}, който наричаме **конформен** на лихвения процент i_{nom}.

В случай, че инвестиционния период е една година (n = к) и с i_{nom} е означен годишния лихвен процент, то:

$$i_{co} = (1 + i_{nom})^{\frac{1}{k}} - 1.$$

При олихвяване с период измерен в месеци, по-малък от една година, годината се разделя на m лихвени периода с еднаква продължителност.

- Допускаме следното: Броят на олихвяванията, измерен в лихвени периоди, е цяло число

Ако лихвения срок е по голям от една година то броят на олихвяванията, измерен в години, е цяло число, кратно на $\frac{1}{m}$.

Примери за ефективен лихвен процент

Пример 17: Ако номиналният годишен лихвен процент $i_{nom} = 0.05\ (p = 5\%)$, то изчислете релативния тримесечен лихвен процент и ефективния годишен процент.

Решение:

$$\frac{i_{re}}{3} = \frac{i_{nom}}{12} \quad \Rightarrow i_{re} = \frac{0.05}{4} = 0.0125$$

$$i_{efy} = (1 + i_{re})^4 - 1 = 1.0125^4 - 1 = 1.05095 - 1 = 0.05095$$

Пример 18. Банка начислява 4% номинална годишна лихва. Определете:

а) релативния и конформения месечни лихвени проценти;

б) при така определения релативен месечен лихвен процент изчислете ефективния лихвен процент за 9 месечен период и годишния ефективен лихвен процент.

Решение:

$$a)\ i_{re} = \frac{i_{nom}}{12} = \frac{0.04}{12} = 0.0033$$

$$i_{co} = (1 + i_{nom})^{\frac{1}{n}} - 1 = 1.04^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0032$$

$$б)\ i_{efy} = (1 + i_{re})^n - 1 = 1.0033^9 - 1 = 0.030$$

$$i_{efy} = (1 + i_{re})^k - 1 = 1.0033^{12} - 1 = 0.040$$

Задача 5: Използвайки таблицата от Фиг. 1:

а) Изчислете ефективния тримесечен лихвен процент и ефективния годишен лихвен процент за първите три банки в таблицата, като изхождате от това, че е даден номиналния годишен процент за тримесечен лихвен период.

б) Каква сума ще бъде получена при олихвяване за една година на 5 000€ и на 50 000€ в банката с най-висок лихвен процент за съответните суми като се вземе предвид ефективния тримесечен лихвен процент?

в) Каква сума ще бъде получена при олихвяване за една година на сумите от б) с номинален лихвен процент (при същите банки)?

II.5. НЕПРЕКЪСНАТО ОЛИХВЯВАНЕ.

Нека i_{nom} е номиналният годишен лихвен процент, а m е броя на подпериодите в годината. Тогава от формулата за сложна лихва за n години получаваме $n.m$ лихвени периода:

$$K_{nm} = K_0.q^{n.m} = K_0\left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^{n.m} = K_0\left[\left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

Извършваме граничен преход при $m \to +\infty$ (олихвяваме непрекъснато) и получаваме формулата (e е неперовото число)

$$K_{n\infty} = \lim_{m\to\infty} K_0\left[\left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^{m}\right]^{n} = K_0 e^{i_{nom}.n}$$

При непрекъснатото олихвяване ефективният лихвен процент се изчислява от номиналния лихвен процент по формулата:

$$i_{ef} = e^{i_{nom}} - 1 .$$

Примери за непрекъснато олихвяване

Пример 19: Сума в размер на 50 000€ се олихвява непрекъснато с годишен номинален лихвен процент $i_{nom} = 0.05\ (p = 5\%)$. На колко ще нарасне капиталът след 10 години?

Пример 20: След 7,5 години фирма очаква нарастване на капитала на 500 000€.

а) Каква е настоящата стойност на този капитал при непрекъснато олихвяване с номинален лихвен процент $i_{nom} = 0.05\ (p = 5\%)$?

б) Каква е настоящата стойност на този капитал при олихвяване на тримесечие с процент 1,25%?

в) След колко време при непрекъснато олихвяване с номинален лихвен процент $i_{nom} = 0.05\ (p = 5\%)$ капиталът ще нарасне на 500 000€, ако настоящата стойност е 300 000€.

II.6. НОМИНАЛЕН И РЕАЛЕН ЛИХВЕН ПРОЦЕНТ

- g – номинален годишен лихвен процент – процента с който се олихвява капитала за една година;
- i – годишен процент на инфлация;
- r – реален лихвен процент
- K - парична сума в началото на годината;
- c - ниво на цените в началото на годината;

• Ефект на Фишер:

$$r = \frac{g-i}{1+i} \quad \Rightarrow \quad g = i + r + ri\,.$$

III. АНТИЦИПАТИВНА ЛИХВА

Означаваме с g антиципативния лихвен процент за лихвения период. Тогава за олихвения капитал K_n имаме:

III.1. Проста антиципативна лихва.

$$K_n = K_0 \frac{1+(n-1)g}{1-g}$$

Пример 21. Кредитор отпуска антиципативен заем за 4 месеца при 38% годишен номинален лихвен процент. Като удържа лихвата предварително, кредиторът изплаща на дебитора сумата 56 400лв. Колко лева е лихвата и за каква сума е сключен заемът?

Решение:

$\textit{Дадено}: K_0 = 56\,400$ лв. $\qquad \textit{Търси се}: L = ?$

$$g = \frac{p}{100} = \frac{38}{100} = 0.38 \qquad K_n = ?$$

$$n = \frac{4}{12} \text{ години}$$

$$K_0 = K_n(1-ng) \quad \Rightarrow \quad K_n = \frac{K_0}{1-ng} = \frac{56\,400}{1-\frac{4}{12}*0.38} = 64\,580.15\text{лв.}(\approx 64\,580\text{лв.})$$

$$K_0 = K_n - L \quad \Rightarrow \quad L = K_n - K_0 = 64\,580.15 - 56\,400 = 8\,180.15 \text{ лв.}$$

III.2. Сложна антиципативна лихва.

$$K_n = K_0(1-g)^{-n}$$

III.3. Връзки между антиципативна лихва и декурсивна лихва.

$$g = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{g}{1-g}$$

IV. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА ПОДГОТОВКА

а) ПРОСТА ЛИХВА

1.1. За какъв срок 5000 лв. ще нараснат на 6000 лв. при начисляване на номинален годишен лихвен процент 32%?

1.2. В началото на годината банка отпуснала кредит от 20 000 лв. за срок от 3 месеца при номинален годишен лихвен процент 30%, а след 3 месеца отпуснала друг кредит за 40 000 лв. за срок от половин година при номинална годишна лихва 35%. Определете общата доходност от тези кредитни операции за деветте месеца във вид на номинален годишен лихвен процент в следните два случая: когато при отпускане на втория кредит не се използва и когато се използва сумата, върната на банката след погасяване на първия кредит.

1.3. Предприемач получил от банка кредит за 150 дни при номинален годишен процент 30%, при което банката удържала комисионна в размер на 1.5% от сумата на кредита. Определете доходността от такава финансова операция за банката във вид на номинален годишен лихвен процент. Ще се промени ли доходността при намаляване срока на кредита на 90 дни?

1.4. За използвана в течение на 4 месеца сума от 960 000 лв. на банката трябва да се изплати лихва от 70 000 лв. Определете стойността на привлечените средства във вид на годишен лихвен процент.

1.5. Каква сума е необходимо да се депозира в банка при номинален годишен лихвен процент 40%, така че да се натрупат 26 000 лв за : а) 20 дни; б) 9 месеца; в) 2.5 години; г) 4 години?

б) СЛОЖНА ЛИХВА

1.6. Вложител иска да удвои сумата, поместена на депозит в банка за 4 години. Какъв годишен номинален процент трябва да приложи банката при тримесечен депозит?

1.7. Определете номиналния годишен лихвен процент, ако ефективният процент е 30% и се начислява сложна лихва : а) на тримесечие; б) ежемесечно.

1.8. Свободни парични средства са депозирани в банка на годишен депозит с номинален годишен лихвен процент 5.50%. След 3години и 10 месеца сметката била закрита и клиентът получил сумата 36 587 лв. Определета нарасналата сума, която би била получена при закриване на сметката след 2 години и 3 месеца, ако банката прилага смесено олихвяване.

1.9. Банка начислява 5% номинална годишна лихва. Определете:

а) релативния и конформения месечни лихвени проценти;

б) при така определения релативен месечен лихвен процент изчислете ефективния лихвен процент за 9 месечен период и годишния ефективен лихвен процент.

1.10. Предприемач взел от банката кредит от 200 000 лв. с номинален годишен лихвен процент 25%. След 2 години той върнал на банката 120 000лв., но една година по-късно отново взел кредит от 60 000 лв. След 3 години предприемачът изплатил целия кредит. Каква сума е върнал на банката?

1.11. Какъв ефективен лихвен процент съответства на годишен лихвен процент от 6% при **НЕПРЕКЪСНАТО** олихвяване?

1.12. Коя оферта на банката бихте предпочели, ако искате да депозирате 3 000€ за 2 години?

- сложна лихва с номинален годишен лихвен процент 5%.
- непрекъснато олихвяване с лихвен процент 4%.

Тема 2. ДИСКОНТ И ДИСКОНТОВИ ИЗЧИСЛЕНИЯ

Съдържание:

I.1. Означения и определения.

D_b (D_m) – банков (математически) дисконт - сумата на отбива, който се приспада от номинална стойност на задължението

K_0 – начална стойност на задължението

$S(K_n)$ - номинална стойност на задължението

$E = PV(S) = PV(K_n)$ - настоящата стойност на номинална стойност на задължението $S(K_n)$

Дисконтов (сконтов) срок – периода от време от момента на предсрочното изплащане на задължението до падежа му. Определя се в дни (d), месеци (m) и години (n).

i – лихвен процент

Дисконтов (сконтов) процент за определен сконтов срок - той е равен на $i_d = \dfrac{d}{100}$, където d е сумата, с която се намаляват всеки 100 единици от задължението за сконтовия срок.

С D се означава броя на дните в годината съгласно метода, по който се пресмятат.

I.2. Видове дисконти.

I.2.1. По база на изчисленията:

а) Математически - за база на изчисленията се взима Е - настоящата стойност на задължението.

б) Банков – за база на изчисленията се взима S – крайната стойност на задължението;

I.2. 2. Съгласно начина на дисконтиране на капитала:

а) Прост - обратна операция на простото олихвяване (прилага се основно, когато сконтовия срок е до една година);

б) Сложен - обратна операция на сложното олихвяване.

II. ДИСКОНТОВИ ИЗЧИСЛЕНИЯ.

II.1. Просто дисконтиране

II.1.1. Математически (точен) дисконт

Прост математически дисконт – формули

$$K_n = PV(K_n) + Dm$$

$$PV(K_n) = \frac{K_n}{1 + \dfrac{i*t}{D}}$$

$$Dm = \frac{PV(K_n)*i*t}{D} \; (\textbf{формула на Хофман})$$

Връзка между проста лихва и прост дисконт

$$K_n = K_0 * (1 + n * i) \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_n}{(1 + n * i)}$$

Пример 1. На 03.11. в търговска банка е представена за сконтиране полица с номинална стойност 60 000лв. и падеж 21.11. Банката е съгласна да сконтира полицата като си годишна доходност от 16%. Каква сума ще получи собственикът на полицата от банката и каква комисионна ще удържи банката в своя полза за услугата?

Решение:

$Дадено: K_n = 60\,000\,лв., \quad t = 18\,дни, D = 365\,дни$ $\qquad$ $Търси\ се: K_0 = ?$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{16}{100} = 0.16 \qquad \frac{t}{D} = \frac{18}{365}$$

Сумата, която ще получи собственикът е :

$$PV(K_n) = \frac{K_n}{1 + \frac{i * t}{D}} = \frac{60000}{1 + \frac{0.16 * 18}{365}} = 59530.28\,лв.$$

Комисионната на банката е:

$$D_m = K_n - PV(K_n) = 60000 - 59530.28 = 469.72$$

Пример 2. Полица с номинал 80 000 лв. е представена за сконтиране 120 дни преди срока на падежа. Банката сконтира полицата с годишен лихвен процент 32%. Определете дисконта, получен от банката.

Решение:

$Дадено: K_n = 80\,000\,лв., \quad t = 120\,дни, D = 365\,дни$ $\qquad$ $Търси\ се: D_m = ?$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{32}{100} = 0.32 \qquad \frac{t}{D} = \frac{120}{365}$$

Днешната стойност на задължението е:

$$PV(K_n) = \frac{K_n}{1 + \frac{i * t}{D}} = \frac{80000}{1 + \frac{0.32 * 120}{365}} = 72384.73\,лв.$$

Банковият дисконт е:

$$D_m = K_n - PV(K_n) = 80000 - 72384.73 = 7615.27$$

Пример 3. Полица с матуритет 90 дни обезпечава доход на собственика си за този период при сконтиране равен на 18% от номинала на полицата. Определете годишния лихвен процент, осигуряващ такъв доход при математическо сконтиране.

Решение:

$$\text{Дадено}: D_m = 0.18 * K_n,\ t = 90\ \text{дни},\ D = 365\ \text{дни} \qquad \text{Търси се}: i = ?$$

$$\frac{t}{D} = \frac{90}{365}$$

$$D_m = 0.18 * K_n = K_n - PV(K_n) = K_n - \frac{K_n}{1 + \frac{i * t}{D}}$$

От последното равенство получаваме

$$0.18 * K_n = K_n - \frac{K_n}{1 + \frac{i * t}{D}}$$

Тогава имаме

$$1 - 0.18 = \frac{1}{1 + \frac{i * 120}{365}} \quad \Rightarrow 0.82 = \frac{365}{365 + i * 120}$$

$$i = \left(\frac{1}{0.82} - 1 \right) * \frac{365}{120} = 0.6677\ (p = 66.77\%)$$

II.1.2. Банков(търговски) дисконт

Прост банков дисконт – формули

$$PV(S) = S - Db$$
$$Db = \frac{S * t * \mathrm{i}_d}{D}\ \left(\text{формула на Карпс}\right)$$
$$PV(S) = S * \left(1 - \frac{t * i_d}{D} \right)$$

Пример 4. На 03.10. в търговска банка е представена за сконтиране полица с номинална стойност 60 000лв. и падеж 21.10. Банката е съгласна да сконтира полицата със сконтов процент 26%. Каква сума ще получи собственикът на полицата от банката и каква комисионна ще удържи банката в своя полза за услугата? Колко време преди срока на падежа сконтирането има смисъл при дадения 26% дисконт?

Решение:

$$Дадено: S = 60\,000\,лв., \quad t = 18\,дни, D = 365\,дни \qquad Търси\,се: K_0 = ?$$

$$i_d = \frac{d}{100} = \frac{26}{100} = 0.26 \qquad \frac{t}{D} = \frac{18}{365}$$

$$K_0 = S * \left(1 - \frac{t}{D} i_d\right) = 60\,000 * \left(1 - \frac{18}{365} * 0.26\right) = 59\,230.68 \text{ лв.}$$

$$K_0 = S * \left(1 - \frac{t}{D} * 0.26\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{t}{D} * 0.26 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{D} < 3.85$$

Пример 5. Полица с номинал 80 000 лв. е представена за сконтиране 120 дни преди срока на падежа. Банката сконтира полицата с годишен сконтов процент 32%. Определете дисконта, получен от банката.

Решение:

$$Дадено: S = 80\,000\,лв., \quad t = 120\,дни, D = 365\,дни \qquad Търси\,се: D_b = ?$$

$$i_d = \frac{d}{100} = \frac{32}{100} = 0.32 \qquad \frac{t}{D} = \frac{120}{365}$$

$$D_b = S * \frac{t}{D} * i_d = 80\,000 * \frac{120}{365} * 0.32 = 8\,416.44 \text{ лв.}$$

Пример 6. Полица с давност 90 дни обезпечава доход на собственика си при сконтиране равен на 18% от номинала на полицата. Определете годишния сконтов процент, осигуряващ такъв доход при сконтиране.

Решение:

$$Дадено: D_b = 0.18 * S, t = 90\,дни, D = 365\,дни \qquad Търси\,се: i_d = ?$$

$$\frac{t}{D} = \frac{90}{365}$$

$$D_b = S * i_d * \frac{t}{D} \quad \Rightarrow \quad i_d = \frac{D_b}{S * \frac{t}{D}} = \frac{0.18 * S}{S * \frac{90}{365}} = 0.73 \quad (d = 73\%)$$

Пример 7. В банка е представена за сконтиране полица на стойност 80 000 лв. 6 месеца преди падежа. Банката се съгласява да сконтира полицата с променлив годишен сконтов процент по следната схема: първите 2 месеца – с годишен сконтов процент 24%, а след това всеки следващ месец процентът нараства с 1.5%. Определете дисконтът на банката и сумата, която ще получи собственикът на полицата. При какъв постоянен дисконтов процент ще се получи същия дисконт?

Решение:

Дадено $S = 80\,000$ *лв.*, $D = 12$ *месеца* *Търси се* : $D_b = ?,\ \overline{i_d} = ?$

$$i_{d_1} = \frac{d_1}{100} = \frac{24}{100} = 0.24; \qquad \frac{t_1}{D} = \frac{2}{12}$$

$$i_{d_2} = \frac{d_2}{100} = \frac{24+1.5}{100} = \frac{25.5}{100} = 0.255; \qquad \frac{t_2}{D} = \frac{1}{12}$$

$$i_{d_3} = \frac{d_3}{100} = \frac{25.5+1.5}{100} = \frac{27}{100} = 0.27; \qquad \frac{t_3}{D} = \frac{1}{12}$$

$$i_{d_4} = \frac{d_4}{100} = \frac{27+1.5}{100} = \frac{28.5}{100} = 0.285; \qquad \frac{t_4}{D} = \frac{1}{12}$$

$$i_{d_5} = \frac{d_5}{100} = \frac{28.5+1.5}{100} = \frac{30}{100} = 0.30; \qquad \frac{t_5}{D} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{t_{средно}}{D} = \frac{t_1}{D} + \frac{t_2}{D} + \frac{t_3}{D} + \frac{t_4}{D} + \frac{t_5}{D} = \frac{6}{12}$$

$$D_b = D_{b1} + D_{b2} + D_{b3} + D_{b4} + D_{b5} = S*\frac{t_1}{D}*i_{d_1} + S*\frac{t_2}{D}*i_{d_2} + S*\frac{t_3*}{D}i_{d_3} + S*\frac{t_4}{D}*i_{d_4} + S*\frac{t_5}{D}*i_{d_5} =$$

$$= \frac{S}{D}*(t_1*i_{d_1} + t_2*i_{d_2} + t_3*i_{d_3} + t_4*i_{d_4} + t_5*i_{d_5}) =$$

$$= 80\,000\left(\frac{2}{12}*0.24 + \frac{1}{12}*0.255 + \frac{1}{12}*0.27 + \frac{1}{12}*0.285 + \frac{1}{12}*0.3\right) = 10\,640 \text{ лв.}$$

Същият дисконт ще бъде получен при следния постоянен годишен сконтов процент

$$\overline{i_d} = \frac{\frac{t_1}{D}*i_{d_1} + \frac{t_2}{D}*i_{d_2} + \frac{t_3}{D}*i_{d_3} + \frac{t_4}{D}*i_{d_4}\ \frac{t_5}{D}*i_{d_5}}{\frac{6}{12}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{12}*0.24 + \frac{1}{12}*0.255 + \frac{1}{12}*0.27 + \frac{1}{12}*0.285 + \frac{1}{12}*0.3}{\frac{6}{12}} = 0.266\ (\overline{d} = 26.6\%)$$

Следователно собственикът на полицата ще получи сумата

$K_0 = S - D_b = 80\,000 - 10\,640 = 69\,360$ лв.

II.2. Сложно дисконтиране

II.2.1. Математически (точен) дисконт

Формула за сложен математически (точен) дисконт - $PV(K_n, i, n) = \dfrac{K_n}{(1+i)^n}$

Изразът $ABF(i,n) = (1+i)^{-n}$ се нарича n-ти дисконтов фактор

Пример 8. Задължение от 50 000 лв. в сконтирано 4 години преди срока. Определете изплатената сума, ако сконтирането се извършва на годишна база с 30% годишен лихвен процент.

Решение:

$Дадено: K_n = 50\,000\ лв., \quad i = 30\%,\ n = 4, \qquad Търси\ се: K_0 = ?$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{30}{100} = 0.30$$

$$PV(K_n, i, n) = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{50000}{(1+0.30)^4} = 21148.68\ лв.$$

II.2.2. Банков (търговски) дисконт

Формула за сложен банков(търговски) дисконт - $PV(S) = S * (1 - i_d)^n$

Пример 9. Задължение от 46 000 лв. в сконтирано 4 години преди срока. Определете изплатената сума, ако сконтитането се извършва на: а) шествмесечие; б) на тримесечие. Годишния сконтов процент е 24%.

Решение:

$Дадено: K_n = 46\,000$ лв. $\qquad Търси\ се: K_0 = ?$

$$i_d = \frac{d}{100} = \frac{24}{100} = 0.24$$

$$а)\ K_0 = K_n\left(1 - \frac{i_d}{m}\right)^{n\,m} = 46\,000\left(1 - \frac{0.24}{2}\right)^{4*2} = 16\,543.19 \text{ лв.}$$

$$б)\ K_0 = K_n\left(1 - \frac{i_d}{m}\right)^{n\,m} = 46\,000\left(1 - \frac{0.24}{4}\right)^{4*4} = 17\,092.42 \text{ лв}$$

Пример 10. Колко време преди падежа е сконтирана полица на стойност 50 000лв., ако собственикът е получил 30 000 лв. и сконтирането се извършва на тримесечие при годишен сконтов процент 24%?

$Дадено: K_0 = 30\,000$ лв. $\qquad Търси\ се: n = ?$

$K_n = 50\,000$ лв.

$$i_d = \frac{d}{100} = \frac{24}{100} = 0.24$$

Решение: $n = \frac{1}{m}\frac{\ln\frac{K_0}{K_n}}{\ln\left(1-\frac{i_d}{m}\right)} = \frac{1}{4}\frac{\ln\frac{30\,000}{50\,000}}{\ln\left(1-\frac{0.24}{4}\right)} = 2.056 = 2г.\ 6м.$

Пример 11. Притежател на полица с номинал 50 000 лв. иска да я сконтира 45 дни преди падежа. Една банка сконтира по годишен сконтов процент 30%, а друга предлага сконтиране по годишен номинален лихвен процент 30%. Кои условия са по-изгодни за притежателя на полицата?

$Дадено: K_n = 46\,000$ лв. $\qquad Търси\ се: K_0 = ?$

$$i_d = \frac{d}{100} = \frac{30}{100} = 0.30$$

$$i = \frac{p}{100} = \frac{30}{100} = 0.30$$

Решение:

$$K_0 = K_n(1 - ni_d) = 50\,000\left(1-\frac{45}{365}*0.30\right) = 48\,150.68 \text{ лв.}$$

$$K_0 = \frac{K_n}{1+ni} = \frac{50\,000}{1+\frac{45}{365}*0.30} = 48\,216.64 \text{ лв.}$$

Следователно за притежателя на полицата по-изгодно е сконтиране с номинален лихвен процент.

II.2.3. Еививалентност между сконтов и лихвен процент

При какви стойности на i и i_d резултатите от математическото и банковото дисконтиране са равни ако са равни стойността на задължението ($K_n = S$) и броя на сконтовите периоди (n)? $\left(\text{т.е. } PV(K_n, i, n) = \frac{K_n}{(1+i)^n} = PV(S) = S*(1-i_d)^n\right)$

Формули за еквивалентност

$$i_d = \frac{i}{1+i} \qquad\qquad i = \frac{i_d}{1-i_d}$$

Пример 12. Банка желае да получи за своите кредити 24% годишна лихва. Намерете годишния сконтов процент, който осигурява желаната доходност.

Решение:

$$i_d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.24}{1+0.24} = 0.1935 \; (i_d = 19.35\%)$$

II.3. Непрекъснато дисконтиране.

Непрекъснатото дисконтиране е обратна операция на непрекъснатото олихвяване и основно служи за провеждане на финансово-икономическия анализ необходим при обосноваването на избора на дадено инвестиционно решение.

Формули за непрекъснато дисконтиране - $K_0 = K_n e^{-i*n}$.

II.4. Задачи за самостоятелна подготовка.

а) Прост дисконт

4.1. Фирма X дължи на банка 24000 лева с падеж 15.05. Фирмата изплаща задължението предварително на 06.04. Колко трябва да заплати фирмата? (чрез банков (търговски) дисконт и чрез математически (точен) дисконт).

4.2. На 01.01.2001 година г-н X дава на г-н У заем от 10000 лева за 1 година с годишна лихва 24%. На 01.07. г-н X купува от фирма автомобил за 20000 лева и поради недостиг на налични средства за покупката им предлага да допълни сумата с вземането си от г-н У. Фирмата се съгласява да приеме и сконтира вземането , само ако то й осигури 30% годишна лихва. Колко трябва да доплати за автомобила г-н X?

4.3. Задължение от 125000 лева трябва да бъде заплатено след 125 дни с 6% годишна лихва. Същото е сконтирано от банка 80 дни преди падежа със сконтова ставка 7,5%. Определете получената сума.

4.4. Търговска фирма Х получава на 01.02. от доставчика си фирма У холови гарнитури на стойност 100 000 лева, срещу които издава полица за 112 000 лева с падеж 01.05. На 01.04. фирмата У сконтира полицата в своята банка, която работи с годишен сконтов процент 45%. Каква сума е получила фирмата?

4.5. Полица с номинал 15 000 лв., издадена на 03.04 с падеж 10.08 е представена за сконтиране в банка на 11.07 по годишен сконтов процент 26%. Върху номиналната стойност на полицата се начислява проста лихва с номинален годишен лихвен процент 32%. Каква сума е получил собственикът на полицата ?

4.6. Полица с номинал 40 000 лв. се представя за сконтиране в банка 20 дни преди падежа, при което банката удържа комисионна 800 лв. Какъв сконтов процент използва банката? Как ще се промени резултатът, ако при сконтиране на полицата банката използва прост номинален лихвен процент?

Депозитен сертификат – документ, удостоверяващ, че собственикът му е титуляр по срочен депозит в банката.

Депозитен сертификат от дисконтов тип – доходът от придобиване на *депозитен сертификат от дисконтов тип,* се определя от факта, че той се продава по цена, по-ниска от номинала, а се изкупува по номинална стойност.

4.7. Депозитен сертификат с номинал 60 000 лв. се издава за 1 година при начисляване на проста лихва с годишен номинален процент 35 %. На каква цена може да се откупи сертификата 150 дни преди срока на падежа, така че обезпечеността на тази финансова операция да е 42 % номинален годишен лихвен процент при начисляване на проста лихва?

4.8. Депозитен сертификат от дисконтов тип с номинал 400 000 лв. е закупен 150 дни преди падежа по цена, определена от проста схема на сконтиране със сконтов годишен процент 34% и след 90 дни е продадена по цена, определена от проста схема на сконтиране със сконтов годишен процент 30%. Определете доходността на такава финансова операция във вид на номинален годишен лихвен процент. Каква ще бъде доходността, ако собственикът на сертификата го задържи до падежа? Влияе ли на доходността номиналната стойност на сертификата?

4.9. При сконтиране на полица с номинал 150 000 лв. 200 дни преди падежа, банката удържа 24 000 лв. Определете: а) доходността на тази финансова операция за банката във вид на прост годишен номинален лихвен процент; б) по какъв прост сконтов процент е сконтирана полицата?

4.10. Полица с номинал 50 000 лв., издадена на 01.06 с падеж 01.09 същата година, се представя за сконтиране в банка на 02.08 при сконтов годишен процент 32% и проста схема на сконтиране. Върху номиналната стойност на полицата се начислява проста лихва по номинален годишен лихвен процент 30%. Определете във вид на прост годишен лихвен процент доходността на тази финансова операция за собственикът на полицата и за банката.

б) Сложен дисконт

4.11. Кредит от 12 000 лв. със срок на погасяване 5 години е погасен 3 години преди срока със сконтов процент 14%. Намерете дисконта.

4.12. От какъв капитал може да се получат 20 000 лв. след 2.5 години олихвяване с проста лихва с номинален годишен лихвен процент 25%. На колко е равен дисконта?

4.13. Кредит от 200 000 лв. със срок на погасяване 6 години е погасен 3 години преди срока. Определете върнатата сума, ако сконтирането се извършва: а) на шестмесечие; б) месечно с годишен сконтов процент 18%.

4.14. Полица е сконтирана 21 месеца преди падежа, при което собственикът на полицата получил 0.8 от номинала на полицата. По какъв годишен сконтов процент е сконтирана полицата.

4.15. При сконтиране на полица на собственика е изплатена сума, равна на половината от номинала на полицата. Колко време преди падежа е сконтирана полицата, ако годишният сконтов процент е 5%?

Тема 3. РЕНТА И РЕНТНИ ИЗЧИСЛЕНИЯ

Съдържание:

I.1. Означения и определения.

Платежен поток – представлява редица от плащания и постъпления подредени хронологично;

Финансова рента – платежен поток, чиито членове са от един тип и интервалите от време между последователните членове на платежния поток са равни;

Анюитет – финансова рента с равни членове;

Период на рентата – интервалът от време между последователните членове на платежния поток;

Срок на рентата - интервалът от време между началото на изплащането рентата до края на последния и период;

n – брой на годините във фазата на спестяване;

l – номинален годишен лихвен процент във фазата на спестяване;

p – брой на плащанията/вноските за една година;

r – брой на годините във фазата на изплащане на рентата;

m – брой на олихвяванията в една година

S_0 – начална сума ;

S_k - нараснала сума след k лихвени периода, вноски в началото на периода, при p =1, m = 1 ;

$S_n = K$ - крайната сума след n лихвени периода, вноски в края на периода, при p =1, m = 1;

$R(t)$ – остатък при наличие на начална сума S_0, след t броя тегления в началото на всеки период;

$R_{end}(t,k)$ – остатък при наличие на начална сума S_0, след t броя тегления в края на всеки период, като тегленето започва от края на k-тия период;

b – периодични вноски;

a – периодични тегления;

I.2. Основни финансови функции.

2.1. n – ти лихвен фактор

$$AUF(n,l) = (1+l)^n .$$

2.2. n – ти дисконтов фактор

$$ABF(n,l) = (1+l)^{-n} .$$

2.3. Дисконто-сумиращ фактор:

а) в случая когато p=1, m=1, r=1

$$DSF(n,l) = \frac{(1+l)^n - 1}{l(1+l)^n} = \frac{1-(1+l)^{-n}}{l} .$$

б) в случая когато p>1, m>1, r=1

$$DSF(n,l,m,p) = \frac{1-\left(1+\frac{l}{m}\right)^{-nm}}{p\left[\left(1+\frac{l}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]}$$

2.4. Капитало-възстановяващ (анюитетен) фактор

$$KWF(n,l) = \frac{l(1+l)^n}{(1+l)^n - 1} = \frac{l}{1-(1+l)^{-n}} .$$

2.5. Фактор на равните серии (на крайната стойност)

а) при p=1, m=1, r=1

$$EWF\left(n,l\right)=\frac{\left(1+l\right)^{n}-1}{l}$$

б) при p>1, m=1, r=1

$$EWF\left(n,l,p\right)=\frac{\left(1+l\right)^{n}-1}{p\left[\left(1+l\right)^{1/p}-1\right]}$$

в) при r>1, n/r цяло число.

$$EWF\left(n,l,r\right)=\frac{\left(1+l\right)^{n}-1}{\left(1+l\right)^{r}-1}=\frac{EWF\left(n,l\right)}{EWF\left(r,l\right)}$$

г) при p=1, m>1, r=1

$$EWF\left(n,\frac{l}{m},m\right)=\frac{\left(1+\frac{l}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{l}{m}\right)^{m}-1}=\frac{EWF\left(nm,\frac{l}{m}\right)}{EWF\left(m,\frac{l}{m}\right)}$$

д) при p>1, m>1, r=1.

$$EWF\left(n,\frac{l}{m},m,p\right)=\frac{\left(1+\frac{l}{m}\right)^{nm}-1}{p\left[\left(1+\frac{l}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$

2.6. фактор на равномерно намаляващите серии (разпределение на остатъчната стойност)

$$RWF\left(n,l\right)=\frac{l}{\left(1+l\right)^{n}-1}$$

I.3. Периодични влогове и тегления.

I.3.1. Периодични влогове.

3.1.1. $S_0 \neq 0$ (началната сума е различна от нула):

а/ формула за S_n, след n лихвени периода, с вноски в началото на периода

$S_n = S_0 . AUF\left(l,n\right)+ b. (1+l).EWF\left(l,n\right)$

В частност при $S_0 = 0$ (началната сума е нула) получаваме

$S_n = b.(1+l).EWF\left(l,n\right)$

б/ формула за S_n^{end}, след n лихвени периода, с вноски в края на периода

$$S_n^{end} = S_0.\,AUF\left(l,n\right) + b.EWF\left(l,n\right)$$

В частност при $S_0 = 0$ (началната сума е нула) получаваме

$$S_n^{end} = b.EWF\left(l,n\right)$$

3.1.2. Случаят p > 1, m > 1(вноските се правят p – пъти годишно, сумите се олихвяват m – пъти годишно).

$$S_{nm}(p) = S_0.\,AUF\left(\frac{l}{m}, nm\right) + b.\frac{(1+\frac{l}{m})^{nm} - 1}{p\left(\left(1+\frac{l}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)}.$$

3.1.3. Рента с период внасяне по голям от една година:

$$S_n(r) = b.\frac{\left(1+l\right)^n - 1}{\left(1+l\right)^r - 1}\ .$$

I.3.2. Периодични тегления.

3.2.1. Непосредствени тегления:

а/ формула за Rn, след n лихвени периода, с тегления в началото на периода

$$R_n = S_0.\,AUF\left(l,n\right) - a.(1+l).EWF\left(l,n\right).$$

б/ формула за Rne, след n лихвени периода, с тегления в края на периода

$$R_{end}(n) = S_0.\,AUF\left(l,n\right) - a.(1+(1+l).EWF(l,n-1)).$$

3.2.2. Отложени тегления:

а/ формула за $R(n,k)$, след n лихвени периода, тегления в началото на периода, тегленето отложено с k периода

$$R(n,k) = S_0.AUF\left(l,n\right) - a.(1+l).EWF\left(l,n-k\right),\ k = 1,2,.....,\ n\text{-}1.$$

.

б/ формула за $R_{end}(n,k)$, след n лихвени периода, тегления в края на периода, тегленето отложено с k периода

$$R_{end}(n,k) = S_0.\,AUF\left(l,n\right) - a.(1+(1+l).EWF\left(l,n-k-1\right)),\ k = 1,2,.....,\ n\text{-}2.$$

I.3.3. Примери.

3.3.1. Намерете S_n и S_n^{end} ако $n = 6$, $l = 4\%$, $b = 1$ аko вноските се правят:

а/ един път в края на всяка година;

б/ един път в началото на всяка година;

3.3.2. В течение на 5 години внасяте по 1000 лева годишно, които се олихвяват с 4% годишно. Намерете общата сума към момента на последната вноска, ако вноските се правят:

а/ един път в края на всяка година;

б/ един път в края на всеки месец;

в/ един път в края на всяко тримесечие;

Намерете общата сума към момента на последната вноска, ако:

а/ един път в края на всяко шестмесечие;

б/ олихвяването се извършва в края всяко тримесечие;

в/ внасяте по 1000 лева годишно;

г/ l = 4% годишно;

д/ n = 3 години.

3.3.3. Внасяте в продължение на 7 години в началото на всяка година по 5000 лева в банка. С колко лева разполагате в края на на седмата година ако банката начислява 4% сложна декурсивна лихва?

3.3.4. Вие трябва да имате в банката на края на 5 година 10000 лева, за да получите заем за жилище. По колко лева трябва да внасяте в края на годината за да спестите тази сума ако банката начислява 4% сложна декурсивна лихва?

3.3.5. Внасяте 5000 лева, а трябва в края на седмата година да имате 50000 лева. По колко лева трябва да внасяте в края на всяка годината за да спестите тази сума ако банката начислява 4% сложна декурсивна лихва?

3.3.6. Внесли сте в банка 20000 лева и след третата година започвате да теглите в началото на всяка година по 1500 лева. С колко лева разполагате в края на на седмата година ако банката начислява 4% сложна декурсивна лихва?

II. РЕНТИ С АНЮИТЕТНИ ПЛЩАНИЯ.

II.1. Ренти с еднакви по размер годишни плащания

а. Елементи на рентата

- член на рентата М – сумата, която се получава периодично;
- период на рентата – интервала от време между две последователни плащания;
- откупна (настояща) стойност на рентата – капиталът К на рентата внесен наведнъж (миза), или спестяван чрез периодични вноски(премия - Р);
- Крайна стойност на рентата – началният капитал олихвен за съответния период.

1.2. Класификация - видове ренти

- По продължителност на периода - годишни, p – срочни, непрекъснати;
- По честота на олихвяването - годишни, m – кратни, непрекъснати;
- По вида на членовете – анюитети или с променливи членове;
- По броя на членовете – срочни (крайни), вечни;
- В зависимост от момента на плащането – предплащани, следпериодни;
- В зависимост от началото на плащането – непосредствени, отложени.

1.3. Формули.

Вноските във фазата на спестяването се олихвяват с годишна номинална лихва l, а във фазата на изплащането с с годишна номинална лихва l_*.

$K = M.DSF\ (l_*, n)$ – откупна (настояща) стойност на рента с миза, следпериодна;

$K = M.(1+l_*).DSF\ (l_*, n)$ - откупна (настояща) стойност на рента с миза, предплатена;

$P = M.DSF(l_*, k).RWF(l, n) = M.EWF(l_*, k).ABF(l_*, k).RWF\ (l, n)$ – премия за осигуряване за k броя плащания на рента с размер М, където във фазата на спестяване вноските се олихвяват с годишен лихвен процент ;

$K = \frac{M}{l_*}$ - откупна (настояща) стойност на рента следпериодна, вечна;

$K = \frac{M}{l_*}(1+l_*)$ - откупна (настояща) стойност на рента предплатена, вечна;

$K = M.(1+l_*)^{-k}.DSF\ (l_*, n)$ - откупна (настояща) стойност на рента отсрочена, следпериодна.

1.4. Примери.

Пример 1.4.1: Жилищно-спестовен влог

Бабата на един студент една година след раждането му внася в края на всяка година по $2\ 500$ € в спестовна сметка на внука й. Сметката се олихвява в края на всяка година с 3% годишна лихва (сложна лихва).

а) С каква сума ще разполага студентът, когато навърши 30 години?

$$R_n = P.EWF(30,3\%) = 2\,500\frac{1.03^{30}-1}{0.03} = 118\,938,54$$

б) Тъй като бабата смята, че тази крайна стойност на рентата е твърде ниска, тя би искала да знае по колко трябва да внася годишно, за да разполага внукът й след 30 години с $200\ 000$ €.

$$P = K.RWF(30,3\%) = 200\,000\frac{0.03}{1.03^{30}-1} = 4\,203,85$$

Пример 1.4.2: Настояща стойност на рента

В продължение на 15 години всяка година служител трябва да получава по $2\,000$ € от дружество за професионално пенсионно осигуряване. Дружеството обявява фалит. Изискване на служителя към съдебния изпълнител е да му бъде изплатена сконтираната настояща стойност на дължимите вноски. Каква сума може да изисква служителят при сконтов процент 4%?

$$K = M.DSF(15,4\%) = \frac{1-1.04^{-15}}{0.04}2\,000 = 22\,236,77$$

Служителят може да поиска $22\ 236,77$ €.

Пример 1.4.3: Определяне на началния капитал (настоящата стойност) K на рентата

Какъв трябва да бъде размерът на началния капитал K при следпериодна срочна рента, за да се гарантират годишни плащания в размер на $24\ 000$ € в продължение на 20 години при годишен лихвен процент 3%?

$$K = M.DSF(20,3\%) = \frac{1-1.03^{-20}}{0.03}24\,000 = 357059.40$$

Пример 1.4.4: Определяне на рентните плащания M

Какви трябва да са годишните рентни плащания M при следпериодна срочна рента при начален капитал K в размер на $500\ 000$ €? Годишният лихвен процент на рентата е 3%, като се очаква плащанията да продължат 25 години.

$$M = K.KWF(25,3\%) = 500\ 000\frac{0.03}{1-1.03^{-20}} = 28\ 713,94\ .$$

Пример 1.4.5: Определяне на срока n на рентата

Колко години може да се получава следпериодна срочна рента с годишни рентни плащания по $24\ 000$ €, ако началният капитал K е в размер на $500\ 000$ €, а годишният лихвен процент е 3%?

$$n = \frac{-\ln\left(1-\frac{Kl}{M}\right)}{\ln(1+l)} = \frac{-\ln\left(1-\frac{500\ 000.0,03}{24\ 000}\right)}{\ln(1,03)} = 33,18\ .$$

1.5. Задачи за самостоятелна подготовка.

1.5.1. Определете К на рента с член 9000 лева плащана в края на всяка година, която да се плаща 15 години, при олихвяване със 4% годишна сложна декурсивна лихва.

1.5.2. Определете М на годишна следпериодна рента, ако се вложат 50000 лева при 4% сложна декурсивна лихва.

1.5.3. Ако се вложат 60 000 лева при 5% сложна декурсивна лихва, колко време можете да получавате в края на всяка година рента с член 8000 лева.

1.5.4. Определете на стоящата стойност на рентата с член равен на 8000 лева, период 1 година, която да се изплаща 12 години при 5% сложна декурсивна лихва.

1.5.5. Каква годишна премия Р трябва да се внася в срок от 10 години при 5% сложна декурсивна лихва, ако искате да откупите 15 членна рента от 12000 лева, като искате първото плащане да започне на края на 10 година (началото на 11 година).