ВСЕЛЕНА И МАТЕМАТИКА

1. ЗАГАДКАТА.

Преди години професор М. Ливио изнася лекция в Университета Корнел, като един от слайдовете в презентацията му е озаглавен:

„Математик ли е Бог?"

Веднага щом той се появява на екрана, един от студентите на първия ред ужасено възкликва:

„Силно се надявам, че не е!"

По късно професорът пише:

Моят реторичен въпрос не целеше да предложи философска дефиниция на понятието за Бог, нито пък беше част от хитро замислен план за сплашване на онези слушатели, които не обичат математиката. По-скоро целта ми беше да представя една загадка, която в продължение на столетия са се опитвали да разрешат някои от най-блестящите умове на света - **универсалността и привидното вездесъщество и всемогъщество на математиката.** Такива качества обикновено свързваме с божественото, или както пише английският физик Д. Джийнс (1877-1946):

„Изглежда вселената е била проектирана от някой, който се е интересувал от чиста математика".

Фактите:

- Наистина, математиката изглежда подозрително успешна в описването и обясняването не само на космоса като цяло, но дори и на някои от привидно хаотичните човешки постъпки.
- Независимо от това, дали математиците се опитват да формулират теории за вселената, дали анализаторите на стоковите борси се мъчат да предскажат следващия борсов срив, дали невробиолозите създават модели на функционирането на мозъка, или статистиците се опитват да оптимизират разпределението на ресурсите, всички те неизбежно използват някаква математика.
- Нещо повече, дори учените да прилагат формални системи, разработени без връзка една с друга, те все пак се позовават на една и съща обща и вътрешно съгласувана математика.

Какво придава на математиката такива невероятни възможности?

Този въпрос си е задавал и Айнщайн:

„Как е възможно чистата математика, която е плод на **независимото от опита** човешко мислене , да пасва така добре на материалните обекти?"

Това чувство на пълно объркване съвсем не е ново. Още някои от философите на древна Гърция, най-вече Питагор и Платон, са благоговеели пред очевидната способност на математиката да оформя и направлява развитието на вселената, като в същото време остава отвъд силите на хората да я изменят, направляват или да и влияят по какъвто и да било начин.

В този аспект световно известният специалист по математическа физика Роджър

Пенроуз например разграничава три различни „свята":

- **свят на съзнателното възприятие -** светът**,** който приютява всички обитаващи съзнанието ни образи;
- **материален свят -** него обикновено обозначаваме с понятието „материална действителност“;
- **Платоновия свят на математическите идеи -** който според Пенроуз е също толкова действителен, колкото световете на материята и съзнанието, е **родината на математиката**. Тук откриваме естествените числа 1, 2, 3,, 4,..,, фигурите и теоремите на Евклидовата геометрия, Нютоновата теория на движението, струнната теория, теорията на катастрофите и математическите модели на динамиката на фондовите борси.

Според Пенроуз налице са следните три загадки:

1. Материалният свят изглежда се подчинява на закони, които обитават света на математическите идеи. Тъкмо това някога е озадачило Айнщайн, както и носителя на Нобелова награда за физика Юджийн Вигнер (1902-1995), според когото: „приложимостта на езика на математиката за формулиране на физическите закони е чуден дар, който нито разбираме, нито заслужаваме. Трябва да сме благодарни за него и да се надяваме, че той ще продължи да ни съпътства в бъдещите изследвания и ще обхване, за добро или лошо, за радост или почуда, още повече клонове на нашето знание“.

2. Второ, самите ни съзнаващи умове, които са обиталището на съзнателното възприятие - по какъв начин те възникват в рамките на матетиалния свят? Как е възможно **умът** да се роди от **материята**? Що бъдем ли някога в състояние да формулираме теория за дейността на съзнанието, която да бъде също толкова вътрешно съгласувана и убедителна, колкото съвременната теория за електромагнетизма?

3. Въпросните възприемащи умове по необясним начин успяват да получат достъп до света на математиката, откривайки, създавайки или описвайки съкровищницата на абстрактните математически и идеи и понятия.

За съжаление Пенроуз не предлага обяснение за нито една от тези три загадки. Вместо това заключава лаконично:

„Без съмнение световете са не три, а само един, но понастоящем нямаме дори бледи идея за него"

Това е далеч по-скромно признание, в сравнение с отговора на учителя от пиесата на А. Бенет „Цели четиридесет години“ , отнасящ се до донякъде сходен въпрос:

Фостър: Все още не съм съвсем наясно по въпроса за Светата Троица, господине.

Учителят: Три в едно, едно в три, съвсем ясно е. Ако имаш съмнения по въпроса, обърни се към учителя си по математика.

Как се е почувствал ученика след това „обяснение“ всички можем да си представим.

В действителност има два различни аспекта, свързани с успеха на математиката в обясняваното на света около нас (които Вигнер обозначава като „необяснимата ефективност на математиката"), като единият от тях е много по-изумителен от другия.

Първият можем да наречем „**активен**". Когато физиците се лутат из лабиринта на природата, те осветяват пътя си с помощта на математиката - инструментите, които използват и разработват, моделите, които развиват и хипотетичните обяснения, които въвеждат, неизменно са математически по своята природа. Например Нютон е наблюдавал падаща ябълка, луната и вълните по брега на морето (поне се твърди че ги е наблюдавал), а не математически уравнения. Въпреки това той успява да извлече от тези природни феномени ясни, стегнати и невероятно точни математически закони, на които се подчинява природата. Аналогично Джеймс Кларк Максуел (1831-1879) разширява рамките на класическата физика, като включва в нея всички електрични и магнитни явления, известни през шестдесетте години на XIX в. Това той успява да направи с помощта на едва четири математически уравнения.

Но загадъчната ефективност на математиката има също и „**пасивна**" страна, която е толкова удивителна, че „**активната**" й страна бледнее пред нея.

Понятия и отношения, изследвани от математиката без да е имано предвид каквото и да било външно приложение, след десетилетия (а понякога след цели векове) ни дават решение на въпроси, формулирани по повод изследването на материалната действителност! Как е възможно това?

Един от елитните математици Г. Х. Харди (1877-1947) е бил така горд от това, че изследванията му се ограничават в областта на чистата математика, че гръмко обявил: **„Нито едно мое откритие не е допринесло ни най-малко и вероятно няма да допринесе, пряко или непряко, за добро или лошо, за благоустрояването на света".**

Както можете да предположите, оказало се, че греши. Едно от откритията му се е превъплътило в закона на Харди-Вайнберг , който е един от фундаменталните принципи, използвани от генетиците при изучаването на еволюцията на биологичните популации. Така дори Харди, един от най-гласовитите противници на приложната математика, е бил насила въвлечен в производството на практически приложими математически теории.

Това обаче е само върхът на айсберга. Кеплер и Нютон откриват, че планетите в нашата слънчева система при движението си около Слънцето описват елипси - геометрични фигури, изследвани от гръцкия математик Менехъм (около 350 г.пр.Хр.) т.е. цели две хилядолетия по-рано.

Новите видове геометрии, чието начало поставя Б. Риман (1826-1866) в класическата си лекция от 1854 г. се оказват точно това, което е нужно на Айнщайн за описване на тъканта на космоса.

Резултатите на Галоа (1811-1832) създадени с единствената цел да се изследват решенията на алгебрични уравнения, днес са се превърнали в инструмент използван от физици, инженери, лингвисти и дори антрополози за описване на твърде различни по вид симетрии в природата.

През 1975 г. Файгенбаум, тогава млад специалист по математическа физика, изследвайки числено асимптотичното поведението на решението едно уравнение (с калкулатор) установил че получените числа клонят към 4.669.... Това се получило и при редица други уравнения. Файгенбаум бързо заключил, че това откритие разкрива някаква универсална закономерност, макар че не разполагал с никакво приложно обяснение за това явление. Нещо повече статията му посветена на този проблем е била отхвърлена от редица научни списания. Не след дълго обаче резултатите от различни експерименти показали, че поведението на втечнения хелий при загряване съвпада със закономерността, установена от Файгенбаум. Оказало се, че това не е единственото явление в природата, при което се наблюдава тази закономерност. Забележителното число на Файгенбаум се появило отново в изследването на прехода на течности към състояние на турбулентност и дори било използвано за описване на процесите, които протичат в капещите чешми.

Списъкът на такива математически „предвиждания", служещи за целите на различни научни дисциплини може да бъде продължаван неопределено дълго.

2. ОТКРИТА ИЛИ ИЗМИСЛЕНА

Както стана дума необяснимата ефективност на математиката поставя пред нас множество вълнуващи въпроси като:

Наистина ли математиката съществува независимо от човешкия ум?

С други думи, откриваме ли ние истините на математиката, също както астрономите откриват непознати галактики или пък математиката не е нищо повече от човешко творение?

Ако наистина тя живее в някакво абстрактно приказно царство, каква е връзката между обитавания от нея загадъчен свят и материалната действителност?

Как човешкият мозък, с цялата си ограниченост, успява да проникне в този неизменен свят, помещаващ се извън пространството и времето?

От друга страна, ако математиката е само човешко творение и не съществува извън умовете ни, как можем да си обясним обстоятелството, че тя успява по чудодеен начин да отговори на въпроси, които космосът и човешкия живот поставят цели столетия по-късно?

Всъщност трябва да намерим отговорите на следните два фундаментални въпроса:

(1) Съществува ли математиката независимо от човешкия ум?

(2) Защо математическите понятия са приложими далеч отвъд контекста, в който първоначално са разработени?

Нито един от тези въпроси не може да бъде отхвърлен с лека ръка. За съжаления или за радост дори съвременните математици, когнитивни учени и философи не успяват да постигнат съгласие по отношение на техните отговори и това води до появата на две противоположни концепции.

Математиката съществува назависимо от нас:

През 1989 г, френският математик Ален Кон, носител на две от най-престижните награди за математика, Фийлдсов медал (1982) и Крофордова награда (2001), изказва възгледите си по въпроса съвсем еднозначно:

„Например за мен реалността на поредицата прости числа е по-устойчива, отколкото заобикалящата ни материална действителност. Работещият математик може да се оприличи на изследовател, който открива нови светове. И точно в работата си откриваме голите факти. Например когато правим прости изчисления забелязваме, че простите числа сякаш нямат край. Задачата на математика в този случай е да се докаже, че съществуват безкрайно много прости числа. Този отдавна получен резултат дължим на Евклид и, ако един ден някой обяви, че е намерил най-голямото просто число, лесно ще му покажем, че греши.

Тоест срещаме се с реалност, която е толкова неоспорима, колкото и природната.“

М. Гарднър, известният автор на множество забавни математически задачи, също разглежда математиката като нещо, което откриваме. Според него отвъд всякакво съмнение е, че числата и математиката като цяло имат самостоятелно съществуване независещо от това, дали някой знае за тях. Той отбелязва остроумно:

„Ако два динозавъра срещнат други два на една поляна, то там ще има общо четири динозавъра, макар че наоколо няма хора, които да констатират този факт, а самите динозаври са прекалено глупави, за да знаят нещо подобно".

Като схванем определено математическо понятие, например понятието за естествено число, то след това пред нас се разкриват неоспорими факти, например , че $3^2 + 4^2 = 5^2$, който факт по никакъв начин не зависи от нашето мнение.

Опонентите:

В отзива си за книгата, в която Кон представя идеите си, британския математик сър Майкъл Атия (Фийлдсов медал през 1966 и Абелева награда през 2004 г.) отбелязва:

„Всеки математик симпатизира на тезата на Кон. Всички ние усещаме, че целите числа и окръжностите съществуват в действителност, ето защо платонистката гледна точка е изключително привлекателна. Но защитима ли е тя? Ако светът беше едноизмерен или с дискретна структура, би било трудно да си представим как би възникнала геометрията. Изглежда, че с целите числа нещата са по-очевидни, тъй като броенето изглежда като нещо първично и фундаментално. Нека обаче си представим интелект, който е вложен не в човешко тяло, а в огромна, самотна и изолирана от всичко останало медуза, носеща се в дълбините на Тихия океан. Тя не би имала никакъв опит за отделни обекти, защото около нея няма нищо друго, освен вода. Движението, температурата и налягането биха били всичко, достъпно за сетивата ѝ. В тази несмесена с нищо чуждо непрекъснатост идеята за дискретни обекти изобщо не би възникнала, поради което не би имало нещо, което да подлежи на броене.

Ето защо Атия смята, че:

„Човекът създава математиката, идеализирайки и абстрахирайки елементи от материалния свят".

Лингвистът Д. Аакоф и физиологът Р. Нунез се съгласяват с него. В общата им книга „Произходът на математиката“ те обобщават:

„Математиката е естествена част от човешкото същество. Тя е продукт на нашите тела, на нашите умове, на всекидневния ни опит в света".

Гледната точка на Атия, Лакоф и Нунез обаче поставя друг интересен въпрос.

Ако математиката е изцяло човешко творение, то наистина ли тя е универсално валидна? С други думи, ако съществуват извънземни цивилизации, то тяхната математика ще съвпада ли с нашата?

Карл Сейгън (1934-1996) твърдеше, че отговора на този въпрос е положителен, докато някои молекулярни биолози и когнитивни учени предлагат и друга гледна точка към този въпрос, която е свързана с изследването на способностите на мозъка. Основната им концепция е, че математиката не се различава съществено от езика.

Например френския невролог Жан-Пиер Шанжо твърди:

„За мен аксиоматичният подход (използван в евклидовата геометрия например) е израз на способностите на мозъка, на когнитивните способности свързани с използването на езика у човека, а онова, което характеризира езика, е именно неговата креативна способност".

Тогава е резонно да се запитаме:

Ако математиката е само вид език, как можем да си обясним това, че повечето деца учат лесно езици, докато голяма част от тях се затрудняват с математиката?

Някои от сложните въпроси, които бяха поставени до този момент, могат да бъдат преформулирани по следния начин:

Има ли съществена разлика между математиката и другите изразни средства, използвани от човешкия ум, например изобразителното изуство и музиката?

Ако допуснем че няма, то защо тя се характеризира с такава впечатляваща вътрешна съгласуваност, каквато изглежда не е налице в никое друго човешко творение?

Много малко са научните дисциплини, които като математиката и до днес използват идеи на възраст около три хиляди години. Например възловият модел на атома от XIX в. просъществува едва две десетилетия, тъй като последващите открития показват, че част от основополагащите му допускания са погрешни докато в математиката нещата стоят по съвсем различен начин.

Това ни дава ли ни правото да разглеждаме математиката като майчиния език на Бог?

Ако някой мисли, че отговорът на въпроса, дали математиката е нещо, което измисляме или откриваме не е чак толкова важен то трябва да имаме предвид значението, което придобива този въпрос, когато го съотнесем с въпросите:

Измисляме или откриваме Бог?

Или иначе казано:

Бог ли създава хората по свой образ и подобие, или хората създават Бог по свой образ и подобие?

3. ЛИРИЧНО ОТКЛОНЕНИЕ

Ето три интересни мнения застъпващи различни гледни точки:

Плуралистите:

Математиците Ф. Дейвис и Р. Хърш описват настоящото положение в прекрасната си книга „Математическият опит“:

Повечето автори, които пишат по този въпрос са съгласни, че типичният действащ математик е платонист (разглежда математиката като нещо, което откриваме) през седмицата и формалист (разглежда математиката като нещо, което измисляме) в неделя. Иначе казано, когато се занимава с математика, той е убеден, че си има работа с обективна реалност, чиито свойства се опитва да определи. Когато обаче той бъде предизвикан да изложи философското си разбиране за тази реалност, за него е най-лесно просто да се преструва, че не вярва в нейното съществуване.

Платонистите:

Ето думите на представителя на платонизма, Г. Харди, в неговата „Апология на един математик“:

Според мен, а мисля и според повечето останали математици, има и друга действителност, която ще наричам „математическа действителност", въпреки че между математиците и философите няма и помен от съгласие относно нейната същност. Според някои тя е само „в ума" и в някакъв смисъл е построена от нас, според други съществува извън и независимо от съзнанието ни. Този, който успее да приведе убедително обяснение за свойствата на тази действителност, би решил с това някои от най-трудните въпроси на метафизиката. Ако пък успее да включи и материалната действителност в това обяснение, той би успял да ги разреши до един. Тук не бих обсъждал тези въпроси, дори и да бях в състояние да го направя. Вместо това ще изложа догматично собствената си позиция, за да избегна всякакви недоразумения по въпроса. Вярвам, че математическата действителност съществува извън нас, че наша задача е да я открием и наблюдаваме, че теоремите, които доказваме и които надуто описваме като наши собствени „творения" са просто бележки, които си водим по време на тези наблюдения. В един или друг вид това разбиране е било поддържано от много изтъкнати философи от Платон до наши дни. Аз ще използвам начин на изразяване, който е характерен за тези, които се придържат към това разбиране.

Анти Платон:

Математиците Е. Казнер (1878-1955) и Д. Нюман (1905-1966) изказват строго противоположно разбиране в „Математиката и въображението“:

„Това, че математиката се радва на такава репутация, с каквато не може да се похвали никое друго творение на целенасоченото мислене, съвсем не е изненадващо. Благодарение на нея е станал възможен напредъка на науките, тя е абсолютно необходима в нашите всекидневни дела и същевременно е истински венец на чистата абстракция, затова признаването на нейното превъзходство спрямо останалите постижения на човешкото мислене не е нищо друго, освен наше задължение.

Въпреки нейното превъзходство, първата адекватна оценка за същността й беше получена едва наскоро, благодарение на появата на неевклидовата и четиримерната геомерия. Това не означава, че напредъка в областта на математическия анализ, теорията на вероятностите, аритметиката на безкрайното, топологията и другите нейни дялове, които обсъдихме до този момент, трябва да бъдат пренебрегвани. Всеки от тях е допринесъл за разширяване на математиката, за задълбочаване на нейното значение и за подобряване на нашето разбиране за вселената. Все пак никой от тях не е допринесъл в такава степен за разбирането както на математиката като цяло, така и на отношението между отделните й части, както неевклидовите „ереси".

Благодарение на смелия критичен дух, който доведе до появата на тези ереси, ние преодоляхме разбирането, че математическите истини съществуват извън и независимо от нашите умове. Сега ни се струва странно, че подобно твърдение изобщо е било поддържано някога. Все пак тъкмо това са твърдели Питагор, Декарт и стотици други велики математици преди XIX в. Днес математиката е отхвърлила своите стари окови и повече не чувства никакви ограничения. Каквато и да е нейната същност, ние признаваме, че тя е свободна също както нашия ум и схватлива също както въображението ни. Неевклидовата геометрия е доказателство, че математиката, за разлика от „музиката на сферите", е наше собствено дело, върху което са наложени единствено такива ограничения, които произтичат от законите на мисленето.

Една удобна трактовка за всички би била една **единна формална и непротивиречива теория на множествата** но...., като е казал Б. Ръсел за съжаление **„множеството от всички множества не е множество“.**

Смъртта на формализма:

Защитниците:

Докато представителя на едното крило на формализма Ф. Фреге бил изключително загрижен за смисъла на аксиомите, то основният защитник на другото крило великият Д. Хилберт проповядвал избягването на всякаква интерпретация на математическите формули. Хилберт не се интересувал от въпроса дали цялата математика може да бъде изведена от логиката. За него тя се състояла от съвкупност от лишени от смисъл формули - структурирани схеми, съставени от произволни символи. Задачата за обосноваване на математиката се падала на нова дисциплина, която Хилберт наричал „метаматематика". Метаматематиката използвала математически методи, за да докаже непротиворечивостта на изводите в дадена формална система, характеризираща се с определено множество от аксиоми и строго дефинирани правила за извод. Иначе казано, Хилберт вярвал, че е възможно да докажем с математически средства, че математиката върши работа.

Гробарят:

Курт Гьодел бил особено заинтригуван от програмата на Хилберт, поради което избрал за тема на своята дисертация въпроса за пълнотата. Задачата на изследванията му била да определи дали формалисткият подход на Хилберт е достатъчен за извеждане на всички истинни математически твърдения. Гьодел защитил доктората си през 1930 г, и само година по-късно публикувал своите теореми за непълнота, които разтърсили из основи света на математиката и философията.

Изказани на разбираем език, тези теореми не звучат особено вдъхновяващо:

1. В сяка непротиворечива формална система **S**, в която може да бъде изразена определена част от формалната аритметика, е непълна относно твърденията на формалната аритметика, т.е. съществуват такива твърдения, които не могат да бъдат нито доказани, нито опровергани в **S**.

2. За всяка непротиворечива формална система **S**, в която може да бъде изразена определена част от формалната аритметика, непротиворечивостта на **S** не може да бъде доказана в самата **S**.

Зад тези наглед безобидни думи се крие смъртната присъда на формализма. Простичко казано, теоремите за непълнота показват, че формалистката програма на Хилберт от самото начало е била обречена на неуспех. Гьодел доказва, че всяка формална система, която е достатъчно богата, за да представлява някакъв интерес, е или непълна, или противоречива.

Тоест в най-добрия случай винаги би имало твърдения, които нито могат да бъдат доказани, нито могат да бъдат опровергани в нея, а в най-лошия случай тя просто би била противоречива. Тъй като за всяко твърдение А е в сила това, че или А, или не-А е вярно, то обстоятелството, че една финитна формална система винаги съдържа твърдения, които не може да докажат или опровергаят показва, че **„не можем да поставим рамка на Бог“.**

Иначе казано, Гьодел открива, че никоя формална система, съдържаща крайно множество от аксиоми и правила за извод, никога няма да може да обхване съвкупността от всички истини на математиката. Затова можем само да се надяваме, че използваните от нас аксиоматични системи са само непълни, а не непротиворечиви.

Нематематиците:

Най-категоричното твърдение по въпроса за това, откриваме или измисляме математиката, е изказано от когнитивния лингвист Д. Лакоф и психолога Р. Нунез в предизвикалата много полемики книга „Произходът на математиката“. Те твърдят следното:

Математиката е част от това, което ни прави хора. Тя произлиза от телата ни, от мозъците ни, от всекидневния ни опит в света. (Ето защо Лакоф и Нунез твърдят, че математиката е продукт на „въплътения ум".) ... Математиката е система от човешки понятия, в която по необичаен начин използваме обикновените инструменти, служещи на човешкото познание. ... Хората създават математиката, затова тяхна е грижата за нейното запазване и разширяване. Портретът на математиката разкрива пред нас едно човешко лице.

Когнитивните учени основават своите заключения на множество от експериментално потвърдени факти. В някои от изследванията им са използвани техники за визуализиране на функционирането на мозъка по време на решаване на математически задачи.

При други са изследвани математическите умения на деца, на примитивни племена, изхранващи се с лов и събиране на растения (като племето мундуруку), при които липсва образование подобно на нашето и на хора с различна степен на мозъчни увреждания. Повечето изследовали поддържат тезата, че поне част от математическите способности са вродени. Всички хора например са в състояние веднага да кажат (без да броят), дали виждат един, два или три обекта (тази способност се нарича субитизация). Най-вероятно примитивната аритметика, обхващаща групиране, сдвояване и елементарни операции като събиране и изваждане вероятно също е вродена, както и елементарното владеене на геометрични понятия (макар че това твърдение не е общоприето). Специалистите по невронауки са успели също да определят мозъчни зони, като например полето на Бродман №39, което се намира в лявото полукълбо и изглежда има основна роля при боравенето с числа и извършването на математически изчисления, но няма отношение към езиковите способности и паметта.

Според Лакоф и Нунез един от най-важните начини за развиване на тези вродени способности е:

Конструиране на концептуални метафори, т.е. мисловни процеси, при които на абстрактни понятия се съпоставят по-конкретни.

Аритметиката например се основава на първичната метафора за съвкупност от обекти. От друга страна, абстрактната булева алгебра свързва метафорично класовете с числа. Подробната схема, разработена от Лакоф и Нунез, предлага интересно обяснение за това защо за хората някои математически понятия са много трудни за усвояване.

Други изследователи, сред които е специалистката по когнитивни невронауки Р. Варли от университета в Шефийлд допускат, че поне част от математическите структури се основават на езиковите способности:

„Математиката се развива, използвайки интелектуални способности, които са част от функционирането на езика“.

И така ние виждаме, че когнитивните учени предлагат сериозни аргументи в подкрепа на тезата, че математиката е свързана с човешкия ум, което изглежда на пръв поглед несъвместимо с мнението на платонистите.

4. Финалът

В нашия естествен език разликата между откриване и измисляне понякога е ясна, а друг път - не съвсем. Никой не би казал, че Шекспир е открил Хамлет, или че мадам Кюри е измислила радия.

В същото време появата на нови лекарства за различни болести обикновено се определя като откритие, въпреки че в случая става дума за упорито синтезиране на нови съединения от вече налични химични елементи.

Най-вероятно, че въпросът **„откриваме или измисляме математиката?"** е поставен погрешно. Нашата математика е смес от открития и измислици. Аксиомите, които характеризират понятието за евклидова геометрия, са измислени, също както и правилата на шаха. Към тях впоследствие са добавени още много други измислени дефиниции, въвеждащи понятията за триъгълник, успоредник, елипса и златно сечение. Теоремите на евклидовата геометрия, от друга страна, можем да считаме за открития, те са пътища, които свързват въведените до този момент понятия.

В някои случаи теоремите са открити чрез доказателство - математиците проверяват какво могат да докажат въз основа на аксиомите и така извеждат от тях теоремите.

В други случаи, както е описано в „За метода“ на Архимед, те първо откриват отговора на интересуващия ги въпрос и едва след това съответното доказателство.

В общия случай понятията са нещо, което измисляме. Понятието за просто число е измислено от нас, но теоремите, отнасящи се до простите числа, са открития.

Тогава може би правилният въпрос е:

Откритията, които правим в математиката, зависят ли от аксиоматиката или начина по който ги доказваме (т.е. зависят ли от технологията)?

В заключение бих казал, че най-много ми допада мисълта на Б. Ръсел от неговата книга „Проблеми на философията“:

Нека обобщим по следния начин изводите от нашето обсъждане на въпроса за значението на философията. Философията трябва да бъде изучавана, но не защото ни дава конкретни отговори на поставените от нея въпроси, тъй като за подобни отговори не можем по правило да сме сигурни, че са истинни, а по-скоро заради самите тези въпроси, тъй като те разширяват разбирането ни за това, какво е възможно, обогатяват въображението ни и намаляват догматичната увереност, която пречи на ума ни да се впусне в абстрактни разсъждения, но най-вече защото, поради величието на света, който тя ни кара да съзерцаваме, умът ни също се изпълва с величие и добива способност да встъпи в единение с вселената, което е най-висшето благо.

В тази лекция е съществено са използвани книгите:

1. Марио Ливио; Математик ли е Бог, Издателство „Изток-Запад“, 2010 .

2. Alwyn C. Scott; The Nonlinear Universe, Chaos, Emergence, Life; Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.