МЕТРИЧНИ ПРОСТРАНСТВА

Боян Златанов

Пловдивски Университет “Паисий Хилендарски”

Факултет по Математика и информатика

04.04.2018

Съдържание

1 Елементи от теория на множествата

Едно от най–важните понятия в математиката е понятието множество или пространство, където аксиоматично са дефинирани съотношения между елементите на множеството. В този случай казваме, че в множеството е зададена структура на съответствие.

В тази глава ще припомним някои основни понятия, означения и резултати, свързани с теория на множествата.

1.1 Определения и основни операции с множества

В математиката се срещат разнообразни множества: множеството от естествените числа $\mathbb{N}$, множеството от рационалните числа $\mathbb{Q}$, множеството от реалните числа $\mathbb{R}$, множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$, множеството от сходящите редици, множеството от непрекъснатите функции, множеството от полиномите с цели коефициенти. Понятието множество е толкова общо, че е трудно да му се даде определение в което да не се използва като синоним на „множество” думата „съвкупност” или „група елементи”.

Не е необходимо да даваме точно определение на понятието множество, защото ние свободно използваме понятието множество, както в живота, така и в науката и всички сме наясно за какво говорим.

Множествата ще ги означаваме с главните букви $A, B, C, \ldots X, Y, Z, \ldots, \Gamma, \Lambda$, а елементите на множеството ще ги означаваме с малките букви $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots \alpha, \beta, \gamma \ldots$. Записваме, че елемента a принадлежи на множеството A с $a \in A$ и записваме, че елемента a не принадлежи на множеството A с $a \notin A$. Ако за всеки елемент a който принадлежи на A е изпълнено, че принадлежи и на B записваме $A \subseteq B$, като не изключваме, A и B да се състоят от едни и същи елементи. Ако съществува поне един елемент от B, който не принадлежи на A, тогава записваме $A \subset B$. В тези два случая казваме, че A е подмножество на B. Например $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Казваме че две множества A и B съвпадат, ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Записваме, че множествата A и B съвпадат с $A = B$.

Определение 1.1 *Нека е дадена редица от множества* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

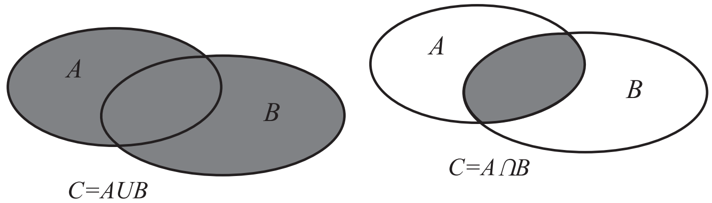
Казваме, че редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е монотонно растяща относно включване, ако*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \ldots$$

Казваме, че редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е монотонно намаляваща относно включване, ако*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \ldots$$

Понякога не знаем отнапред, дали дадено множества съдържа дори и един елемент (например можема да разглеждаме множеството от корените на дадено уравнение). Поради тази причина е удобно да използваме така нареченото празно множество, което не се състои от никакви елементи и го означаваме с $\emptyset$ и приемаме че за всяко множество A е изпълнено $\emptyset \subseteq A$.



Фигура 1: Обединение и сечение на множества

Определение 1.2 *Нека са дадени две множества A и B:*
а) обединение на множествата A и B наричаме множеството C, което се състои от всички елементи, които принадлежат поне на едно от множествата A или B и го означаваме с $C = A \cup B$;
б) сечение на множествата A и B наричаме множеството C, което се състои от всички елементи, които принадлежат едновременно и на двете множествата A и B и го означаваме с $C = A \cap B$ (Фигура 1).

Аналогично се дефинира сечение и обединение на произволна съвкупност от множества $C = \cup_\alpha A_\alpha$, $C = \cap_\alpha A_\alpha$. Множеството $C = \cup_\alpha A_\alpha$ се състои от всички елементи c, които принадлежат на поне едно от множествата A_α. Множеството $C = \cap_\alpha A_\alpha$ се състои от всички елементи c, които принадлежат на всяко едно от множествата A_α.

Теорема 1.1 *Нека A и B са множества. Тогава са верни равенствата:*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \tag{1}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \tag{2}$$

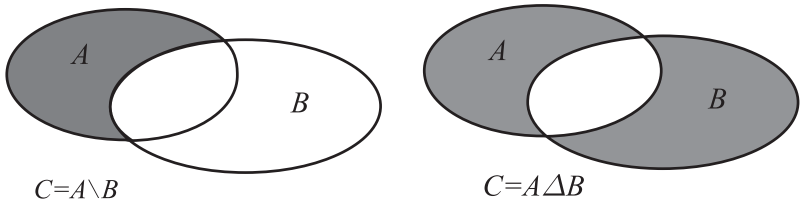
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{3}$$

Доказателство: Ще докажем, че $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Другите равенста се доказват аналогично.

Нека $x \in (A \cup B) \cap C$. Следователно $x \in C$ и $x \in A \cup B$. Тогава x принадлежи на поне едно от множествата $A \cap C$ или $B \cap C$ и следователно $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Нека сега $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, тогава x принадлежи на поне едно от множествата $A \cap C$ и $B \cap C$. Следователно x принадлежи на C и принадлежи на поне едно от множествата A или B с което получихме, че $x \in (A \cup B) \cap C$. □

Определение 1.3 *Нека са дадени две множества A и B. Разлика на множествата A и B наричаме множеството C, което се състои от всички елементи на A, които не са елементи на B и се означаваме с $C = A \backslash B$.*



Фигура 2: Разлика и симетрична разлика на множества

В теорията на метричните пространства, се случва да се разглеждат множества, които са подмножества на някое основно множество X. Тогава множеството $X\setminus A$ наричаме допълнение на множеството A и се означава с A^c.

Определение 1.4 *Нека са дадени две множества A и B. Симетрична разлика множествата A и B се нарича множеството $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ и се означава с $C = A\Delta B$ (Фигура 2).*

Теорема 1.2 *(принцип на двойнственост) Нека е дадено множеството X и нека A_α, $\alpha \in \Gamma$ е съвкупност от подмножества на X. Тогава*
а) $X\setminus(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha)$;
б) $X\setminus(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha)$.

Доказателство: а) Нека $x \in X\setminus(\cup_\alpha A_\alpha)$, това означава, че x не принадлежи на $\cup_\alpha A_\alpha$ и следователно не принадлежи на нито едно от множествата A_α. Това означава, че x принадлежи на всяко от множествата $X\setminus A_\alpha$ и следователно $x \in \cap_\alpha(X\setminus A_\alpha)$.

Нека сега $x \in \cap_\alpha(X\setminus A_\alpha)$. Тогава x е елемент от всяко едно от множествата $X\setminus A_\alpha$ и следователно не принадлежи на нито едно от множествата A_α, което означава, че $x \notin \cup_\alpha A_\alpha$ и следователно $x \in X\setminus(\cup_\alpha A_\alpha)$.

Доказателството на б) е аналогично. □

Определение 1.5 *Нека са дадени две множества A и B. Декартово произведение на множествата A и B наричаме съвкупността от наредените двойки елементи (a, b), където $a \in A$ и $b \in B$ и се означава с $A \times B$.*

Задачи

Задача 1. Нека A и B са множества. Докажете, че следните три условия са еквивалентни:
а) $A \subseteq B$;

б) $A \bigcup B = B$;
в) $A \bigcap B = A$.
Задача 2. Нека $A, B \subseteq X$. Докажете, че:
а) $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато $B^c \subseteq A^c$;
б) $A \backslash B = A \bigcap B^c$;
в) $(A \bigcup B) = A^c \bigcap B^c$ и $(A \bigcap B) = A^c \bigcup B^c$ (закони на Де Морган).
Задача 3. Нека $B_n = [1, 1 + 1/n]$. Намерете:
а) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$; б) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.
Задача 4. Горна и долна граница за редицата от множества $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ наричаме

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

а) опишете от какви елемнти се състоят множествата $\limsup_{n\to\infty} A_n$ и $\liminf_{n\to\infty} A_n$;
б) докажете, че

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

в) докажете, че ако редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотоно растяща или намаляваща по отношение на включване на множества, то

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n;$$

г) дайте пример на редица от множества за които

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \neq \liminf_{n\to\infty} A_n;$$

д) докажете, че

$$X \backslash (\limsup_{n\to\infty} A_n) = \liminf_{n\to\infty} (X \backslash A_n).$$

Задача 5. За дадена редица от множества $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ конструирайте редица $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, така че $B_n \subseteq A_n$, $B_n \bigcap B_m = \emptyset$ и $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

1.2 Изображения между множества

В реалния анализ се разглеждат функции $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$, като за всяко $x \in X$ съществува единствено $y \in Y$, така че $y = f(x)$. Множеството X се нарича дефиниционна област на функцията f, а Y–област от стойности на f.

Можем да обобщим понятието функция, като разглеждаме произволни множества X и Y. Казваме, че f изобразява X в Y, ако за всяко $x \in X$ съществува единствено $y \in Y$, така че $y = f(x)$ и това се означава с $f : X \to Y$. Често думата „функция" се използва, когато X и Y са множества от реални числа. Ако X и Y са произволни множества се използва думата „изображение".

Елемента $y \in Y$, удовлетворяващ $y = f(x)$ наричаме образ на x за изображението f. Нека $y \in Y$, множеството от всички елементи $x \in X$, за които $y = f(x)$ наричаме праобраз на y и означаваме с $f^{-1}(y)$.

Нека $A \subseteq X$. Множеството $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ наричаме образ на множеството A. Множеството $f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y) : y \in B \subseteq Y\}$ наричаме праобраз на множеството B.

Определение 1.6 *Изображението $f : X \to Y$ наричаме:*
а) инективно, ако $f(x_1) \neq f(x_2)$ за всеки две $x_1 \neq x_2$;
б) сюрективно, ако за всяко $y \in Y$ съществува $x \in X$, такова че $f(x) = y$;
в) биективно, ако е инективно и сюрективно едновременно.

Често вместо сюрективно изображение се казва, че изображението е "върху" и вместо биективно изображение се кава, че изображението е "взаимно еднозначно"

Ако едно изображението $f : X \to Y$ е биективно, тогава за всяко $y \in Y$ съществува единствено $x \in X$, такова че $f(x) = y$. Следователно можем да разгледаме изображението $f^{-1}(y) : Y \to X$, дефинирана по правилото: $f^{-1}(y) = x$, ако $f(x) = y$. За всяко биективно изображение f са в сила равенствата

$$x = f^{-1}(f(x)), \quad y = f(f^{-1}(y)).$$

Твърдение 1.1 *Нека $f : A \subseteq X \to B \subseteq Y$, тогава:*
а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
б) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
в) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Доказателство: а) Нека $x \in f^{-1}(A \cup B)$, следователно $f(x) \in A \cup B$, което означава, че $f(x)$ принадлежи на поне едно от множествата A или B. Следователно x принадлежи на поне едно от множествата $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$ и така получаваме, че $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

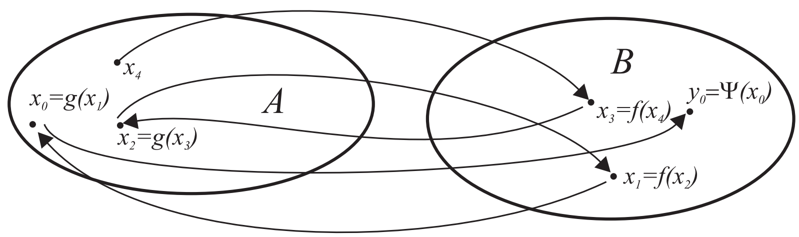
Нека $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, следователно x принадлежи на поне едно от множествата $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$. Това означава, че $f(x)$ принадлежи на поне едно от множествата A или B и следователно $f(x) \in A \cup B$, което означава, че $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

б) и в) се доказват аналогично. □

Теорема 1.3 *(Кантор–Бернщайн) Нека A и B са две множества. Ако съществуват взаимно еднозначно съответствие $f : A \to B_1 \subset B$ и взаимно еднозначно съответствие $g : B \to A_1 \subset A$, то съществува взаимно еднозначно съответствие между A и B.*

Доказателство: Без да намаляваме общността на разглежданията, можем да считаме, че множествата A и B не се пресичат. Ще разбием множествата A и B на непресичащи се подмножества, така че да можем да конструираме взаимно еднозначно съответствие между получените подмножествата.

Нека $x \in A$ е произволно избран. Ще определим множеството $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ индуктивно. Нека да положим $x_0 = x$. Ако елемента x_n е вече определен, тогава определяме x_{n+1} по следния начин:
i) Ако n е четно число, тогава полагаме x_{n+1}, да бъде елемента, който удовлетворява равенството $g(x_{n+1}) = x_n$, ако такъв елемент съществува;
ii) Ако n е нечетно число, тогава полагаме x_{n+1}, да бъде елемента, който удовлетворява равенството $f(x_{n+1}) = x_n$, ако такъв елемент съществува (Фигура 3).



Фигура 3: Теорема на Кантор–Бернщайн

Възможни са два случая:
1) За някое n елемента x_{n+1} не съществува. Числото n ще наричаме порядък на x.
2) Редицата $\{x_{n+1}\}$ е безкрайна. Тогава ще казваме, че x има безкраен порядък.

Разбиваме A на следните три множества: A_E състоящо се от елементи, които имат четен порядък; A_O състоящо се от елементи, които имат нечетен порядък; A_I състоящо се от елементи, които имат безкраен порядък. Разбиваме по аналогичен начин и множеството B на B_E, B_O и B_I.

Лесно се съобразява, че f изобразява A_E в B_O и A_I в B_I, а g^{-1} изобразява A_O в B_E. Така взаимно еднозначното съответствие Ψ, дефинирано с

$$\Psi = \begin{cases} f, & x \in A_E \bigcup A_I \\ \\ g^{-1}, & x \in A_O \end{cases}$$

е търсеното взаимно еднозначно съответствие между A и B. Например на Фигура 3 точката $x_0 \in A$ има порядък 4, а точката $y_0 = f(x_0) \in B$ има порядък 5 и те са съответни при изображението Ψ. $\square$

Феликс Бернщайн (1878 – 1956) е германски евреин. Той произхожда от семейство на учени - баща му физиолог, а дядо му е политически писател, учен, журналист, издател, който е изиграва важна рола в синагогалната реформа в Германия. Когато Алберт Айнщайн е бил дете, му е попаднала една от научните книги на дадято на Бернщайн (Арон Бернщайн) и тя толкова го е възхитиле, че това го е накарало да се откаже да става цигулар, а да се занимава с наука. Георг Кантор е приятел на баща му и докато още е ученик в гимназията

Феликс Бернщайн посещава семинара на Кантор. Кантор предлага на Бернщайн да коригира доказателството в теоремата, за равномощност на множества.

Бернщайн получава куп похвали от Кантор за конструкцията, която предлага. В този момент все още младият Бернщайн иска да учи изкуства, а не математика. По–късно той се ориентира към математиката и под ръководство на Хилберт и Клайн защитава дисертация по теория на множествата. Бернщайн емигрира в САЩ през 1934 г. Получава съгласието на ръководството на Колумбийския университет, че ще бъде назначен на постоянна длъжност, но ръководството се отмята от обещанието си. Това дава повод за следния коментар на Фишер (голям английски математик)„Бернщайн, защо не дойдеш в Англия? В Ангрия джентълменското ръкостискане е равносилно на подписан договор". Бернщайн помага на много емигрирали учени от нациска Германия да си намерят работа. По–голямата част от научното творчество на Бернщайн е в областта приложната математика, статистиката, актюерството и математическата биология. Той доказва хипотезата за наследяването на кръвната група.

Фигура 4: Felix Bernstein

Задачи

Задача 1. Покажете, че не е вярно $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.
Задача 2. Нека $f : X \to Y$. Докажете, че $f^{-1}(Y\backslash B) = X\backslash f^{-1}(B)$.

Нека A е произволно множество. Означаваме с $\mathcal{P}(A)$ съвкупността от всички подмножества на A.
Задача 3. Нека A и B са множества. Докажете:
а) $\mathcal{P}(A)\bigcup\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A\bigcup B)$;
б) $\mathcal{P}(A)\bigcap\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A\bigcap B)$.

Нека $A\subset X$. Функцията $\mathcal{X}_A : A \to \{0,1\}$, се нарича характеристична функция и се дефинира с

$$\mathcal{X}_A(a) = \begin{cases} 1, & a\in A \\ \\ 0, & a\notin A. \end{cases}$$

Задача 4. Нека A е множество. Докажете, че функцията $f : \mathcal{P}(A) \to \{\mathcal{X}_B\}_{B\in\mathcal{P}(A)}$, дефинирана с $f(B) = \mathcal{X}_B$.
Задача 5. Намерете необходимо и достатъчно условие, за да е изпълнено равенството $A\times B = B\times A$.
Задача 6. Нека $f : X \to Y$ е произволна функция. Докажете:
а) $f\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f\left(A_\gamma\right)$;
б) $f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f\left(A_\gamma\right)$;
в) Дайте контра пример с който да покажете, че в точка б) не не може да се замени $\subseteq$ с $=$.

Задача 7. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Докажете:
а) ако f и g са инективни, то и $g \circ f$ е инективна;
б) ако f и g са сюрективна, то и $g \circ f$ е сюрективна;
в) ако f и g са биективни, то и $g \circ f$ е биективна.
Задача 8. Нека $f : X \to Y$. Докажете че следните две твърдение са еквивалентни:
а) f е инективна;
б) $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$ е в сила за всеки две множества $A, B \in \mathcal{P}(X)$.
Задача 9. Нека $f : X \to Y$ е произволна функция. Докажете:
а) $f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(A_\gamma)$;
б) $f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(A_\gamma)$;
в) $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

1.3 Разбиване на множество на класове

Често се налага едно множество да се разбива на множества, които не се пресичат. Например можем да разглеждаме равнината като съвкупността от всички прави, които са успоредни на оста O_x или да е разглеждаме като обединението на всички окръжности с център координатното начало и радиус $r \geq 0$. Друг пример е разбиването на множествата A и B в Теоремата на Кантор-Бернщайн (Теорема 1.3) на подмножества A_E, A_O, A_I и B_E, B_O, B_I.

Когато едно множество X се разбива на множества, които взаимно не се пресичат, казваме че то е разбито на класове.

Признаците на които може да бъде разбито една множество на класове могат да бъдат различни. Например можем да разбием множеството от всички триъгълници на класове от триъгълници с равни лица. Ясно е, че ако триъгълника ΔABC е в един клас с триъгълника $\Delta A_1B_1C_1$ и $S_{\Delta A_2B_2C_2} = S_{\Delta ABC}$, то $S_\Delta A_2B_2C_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1}$.

Нека разгледаме друг пример, да кажем, че две точки от равнината са в един клас, ако се намират на разстояние по–малко или равно на 1. така няма да получим разбиване на равнината на класове. Ако x се намира на разстояние 1 от y винаги можем да намерим точка z, която е на разстояние 1 от x и на разстояние по-голямо от 1 от y. Следователно ще получим, че z трябва да е в един клас с x и в различен клас с y, което е невъзможно.

Нека е даден някакъв признак φ, така че за всеки два елемента $x, y \in X$ можем да кажем, че или удовлетворяват този признак или не го удовлетворяват. Ако елемента x е свързан с елемента y спрямо признака φ отбелязваме $x\varphi y$. Например ако два триъгълника ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ имат равни лица, а φ е признака за равнолицеви триъгълници то записваме $\Delta ABC\varphi\Delta A_1B_1C_1$.

Нека да отбележим, че ако x е свързан с елемента y спрямо признака φ, то не е задължително да е изпълнено, че y е свързан с елемента x спрямо признака φ. Например нека в множеството на естествените числа да разгледаме признака $\geq$ и да разгледаме числата 1 и 2. Тогава очевидно, че $2 \geq 1$, но $1 \not\geq 2$.

Определение 1.7 *Казваме, че съотношението φ е съотношение на еквивалентност ако:*
1. $x\varphi x$ за всяко $x \in X$ (рефлексивност);
2. ако $x\varphi y$, то $y\varphi x$ (симетричност);
3. ако $x\varphi y$ и $y\varphi z$, то $x\varphi z$ (транзитивност).

Теорема 1.4 *Условията едно съотношение φ да е рефлексивно, симетрично и транзитивно са необходими и достатъчни, за да може множеството X да се разбие на класове.*

Доказателство: Нека X е разбито на класове, т.е $X = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ и $X_\alpha \bigcap X_\beta = \emptyset$ за всеки две $\alpha, \beta \in \Gamma$. Нека да разгледаме съотношението φ, дефинирано по следният начин: $x\varphi y$ тогава и само тогава, когато x и y принадлежат на едно и също множество X_α. Ще проверим, че така дефинираното съотношение е съотношение на еквивалентност.
1. Очевидно $x\varphi x$, защото $x \in X_\alpha$, за някое $\alpha \in \Gamma$;
2. Ако $x\varphi y$, тогава съществува $\alpha \in \Gamma$, така че $x, y \in X_\alpha$ и следователно $y\varphi x$;
3. Ако $x\varphi y$ и $y\varphi z$ тогава съществува $\alpha \in \Gamma$, така че $x, y \in X_\alpha$ и от $y \in X_\alpha$ следва, че $z \in X_\alpha$ и следователно $x\varphi z$.

Нека сега φ е рефлексивно, симетрично и транзитивно. Нека дефинираме множествата $X_a = \{x \in X : a\varphi x\}$. От рефликсивността на φ следва, че $a \in X_a$ и следователно всяко $a \in X$ принадлежи на някой клас X_a.

Ще покажем, че два класа X_a и X_b или съвпадат или нямат общи елементи. Нека съществува $c \in X_a \bigcap X_b$. Тогава $a\varphi c$ и $c\varphi b$ и от тразитивността на φполучаваме, че $a\varphi b$. Нека сега $x \in X_a$ е произволен елемент. От $x\varphi a$ и $a\varphi b$ следва, че $x \in X_b$. Аналогично се доказва, че ако $y \in X_b$, то $y \in X_a$. Следователно, ако съществува $c \in X_a \bigcap X_b$, то $X_a = X_b$.
$\square$

Очевидно е че изображенията между две множества са тясно свързани с разбиването на класове. Можем да разглеждаме като елементи от един клас всички $x \in X$, за които $f(x)$ са равни. Ако е дадено разбиване на множеството X нека разгледаме функцията f, която на всяко $a \in X$ съпоставя класа на еквивалентност X_a в който влиза a.

Можем да разгледаме изображение в равнината, което проектира всяка точка върху оста O_x. Така получаваме разбиване на равнината на класове от прави, които са успоредни на оста O_y.

Можем да разгледаме еквивалентност в множеството на реалните числа, като казваме че две числа са еквивалентни, ако имат еднакви дробни части.

Определение 1.8 *Нека е дадено множеството X. Означаваме с $X \times X$ множеството от всички наредени двойки (x, y), където $x, y \in X$. Нека $R_\varphi \subset X \times X$. Казваме, че φ е бинарно отношение в X ако $x\varphi y$ тогава и само тогава, когато $(x, y) \in R_\varphi$.*

Пример за бинарно отношение е равенството на елементи. В този случай множеството R_φ се състои от елементите (x, x), $x \in X$. Множеството (x, x), $x \in X$ наричаме диагонал в $X \times X$ и означаваме с Δ.

Всяко отношение на еквивалентност е бинарно отношение, което удовлетворява условията:
1. $\Delta \in R_\varphi$ (рефлексивност);
2. ако $(x,y) \in R_\varphi$, то $(y,x) \in R_\varphi$ (симетричност);
3. ако $(x,y) \in R_\varphi$ и $(y,z) \in R_\varphi$, то $(z,x) \in R_\varphi$ (транзитивност).

Задачи

Задача 1. Кои от следните отношения се явяват отношение на еквивалентност:
а) Отношението $=$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
б) Отношението за подобие на триъгълници;
в) Отношението $\leq$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Задача 2. Кои от следните отношения се явяват отношение на еквивалентност:
а) Отношението $R_m \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(a,b) : a-b$ се дели на $m \in \mathbb{N}\}$;
б) Отношението $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(a,b) : a-b$ е рационално число $m \in \mathbb{N}\}$;
в) Отношението $R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $R = \{((a,b),(c,d)) : ad = bc$ ако $bd \neq 0$ или $a = c$ако $bd = 0\}$;
г) Отношението $R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $R = \{((a,b),(c,d)) : a+d = b+c\}$;
д) Отношението $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) : a = c\}$;
е) Отношението $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $R = \{((a,b),(c,d)) : b = d\}$;
е) Отношението $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) : a-[a] = b-[b]\}$, където $[a]$ е функцията цяла част на число.

Задача 3. Казваме, че две положителни функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ са еквивалентни, ако

$$0 < \underline{\lim}_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } \overline{\lim}_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty.$$

Докажете, че така дефинираното съотношение е съотношение на еквивалентност.

1.4 Изброими множества

Разглеждайки различни множества можем да им съпоставим числа, които да описват колко елемента има в тях. Например брой на върховете на даден многоъгълник, брой на простите числа, по малки от дадено число, брой на молекулите вода на земята. Всяко от тези множества има краен брой елементи, без значения дали знаем точния им брой или не. Има и други множества, които имат безброй много елементи. Например всички естествени числа, всички окръжности в равнината, всички полиноми с рационални коефициенти.

Можем да сравняваме броя на елементите на две крайни множества. Но не можем да разсъждаваме така относно безкрайните множества. Например, кои са повече окръжностите в равнината или рационалните числа; непрекъснатите функции в интервала $[0,1]$ или правите в пространството.

Как сравняваме две крайни множества? Можем да преброим елементите на едното и на другото и да сравним кое от тях има повече елементи, но може и да намерим дали съществува взаимно еднозначно съответствие между елементите на двете множества.

Ясно е че взаимно еднозначно съответствие между две крайни множества съществува, тогава и само тогава, когато двете множества имат равен брой елементи. Ако поискаме да проверим дали броя на студентите и броя на столовете в една зала е един и същ не е необходимо да броим двете множества, достатъчно е да кажем всеки студент да седне на един стол. Ако всеки студент седне и не остане празен стол значи че двете множества имат равен брой елементи. Това означава, че сме намерили биективно изображение между столовете в стаята и студентите. Нека отбележим, че ако за множества с краен брои елементи е възможно да ги сравняваме, както като ги броим, така и с търсенето на биективно изображение, то за безкрайни множества е възможно да ги сравняваме само чрез установяване на взаимно еднозначни съответствия.

Едно от най-простите безкрайни множества е множеството на естествените числа.

Определение 1.9 *Казваме, че едно множества M е изброимо, ако съществува взаимно еднозначно съответствие между M и $\mathbb{N}$.*

Казано с други думи множеството M е изброимо, ако неговите елементи могат да се номерират във вид на безкрайна редица $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ или съществува взаимно еднозначни съответствие $f : \mathbb{N} \to M$ и тогава казваме, че сме номерирали множеството M.

Пример 1.1 *Множеството на всички цели числа $\mathbb{Z}$ е изброимо.*

Наистина множеството $\mathbb{Z}$ можем да го номерираме по следния начин

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & 2n & 2n+1 & \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow & \ldots \\
\mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots & -n & n & \ldots
\end{array}$$

Можем да запишем и явна формула на взаимно еднозначното съответствие $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ четно} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пример 1.2 *Множеството на всички четни положителни числа $\mathbb{Z}_{2n}$ е изброимо.*

Наистина, можем да го номерираме чрез съответствието: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{2n}$, $f(n) = 2n$.

Пример 1.3 *Множеството $M = \{2, 2^2, 2^3 \ldots 2^n, \ldots\}$ е изброимо.*

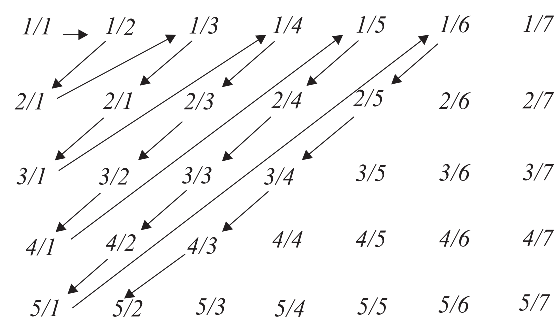
Наистина, можем да го номерираме чрез съответствието: $f : \mathbb{N} \to M$, $f(n) = 2^n$.

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е безкрайна числова редица с различни елементи. Нека разгледаме подредицата ѝ $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогава функцията $f : \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, зададена чрез $f(a_n) = a_{2n}$ е взаимно еднозначно съответсвие т.е. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е еквивалентна на $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ като множество.

Твърдение 1.2 *Всяко подмножество на изброимо множество е или крайно или изброимо.*

Доказателство: Нека A е изброимо множество и $B \subset A$. Нека да номерираме елементите на A: $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$. Нека $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ са тези, които принадлежат на B. Ако сред числата $n_1, n_2, n_3, \ldots$ има най-голямо, тогава B е крайно, ако пък няма най–голямо, тогава B е изброимо, защото $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ задава взаимно еднозначно съответствие между B и $\mathbb{N}$ чрез $f(k) = a_{n_k}$. $\square$

Пример 1.4 *Множеството на всички рационални числа $\mathbb{Q}$ е изброимо.*



Фигура 5: Преброяване на рационалните числа

Да разгледаме таблицата (Фигура 5):

Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ е дефинирано с редицата: $f(1) = \frac{1}{1}$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{2}{1}$, $f(4) = \frac{1}{3}$, $f(5) = \frac{2}{2}$, $f(6) = \frac{3}{1}$, $f(7) = \frac{1}{4}$,....

Възможно е да се напише и явна формула за полученото съответствие:

$$f(k) = \frac{k - \frac{(n-1)n}{2} + 1}{\frac{(n+1)n}{2} - k + 2}, \quad \text{за всяко} \quad k \in [\frac{(n-1)n}{2} - 1, \frac{(n+1)n}{2}] \quad \text{и всяко} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нека отбележим, че в горната таблица някои от числата се повтарят, т.е. получаваме, че "по-голямо" множество от $\mathbb{Q}$ е изброимо и според Твърдение 1.2 следва, че $\mathbb{Q}$ е изброимо.

Твърдение 1.3 *Обединението на краен брой изброими множества или изброим брой изброими множества е изброимо множество.*

Доказателство: Нека $A_1, A_2, \ldots$ са изброими множества. Можем да считаме, че те не се пресичат. В противен случай ще разгледаме множествата $A_1, A_2 \backslash A_1, A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \ldots,$

всяко от които е най-много изброимо. Нека $A_i = \{a_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$. Разглеждаме таблицата:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \dots, & a_{1n}, & \dots \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \dots, & a_{2n}, & \dots \\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \dots, & a_{3n}, & \dots \\
a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \dots, & a_{4n}, & \dots \\
\dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\
a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & a_{n4}, & \dots, & a_{nn}, & \dots \\
\dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots
\end{array}
$$

и дефинираме изображение $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, както се дефинира в Пример 1.4. $\square$

Твърдение 1.4 *Всяко безкрайно множество съдържа изброимо подмножество.*

Доказателство: Нека M е безкрайно множество. Избираме $a_1 \in M$. От факта, че M е безкрайно следва, че $M_2 = M \backslash \{a_1\}$ е безкрайно и можем да изберем $a_2 \in M_2$. Множеството $M_3 = M \backslash \{a_1, a_2\}$ е безкрайно следва, че можем да изберем $a_3 \in M_3$. Така индуктивно избираме редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където $a_n \in M_n = M \backslash \{a_k\}_{k=1}^{n-1}$ от различни елементи. $\square$

От Твърдение 1.2 и Твърдение 1.4 следва, че изброимите множества са „най-малките“ сред всички безкрайни множества.

До този момент сравнявахме все множества с множеството на естествените числа. Можем да сравняваме множества от произволно естество.

Определение 1.10 *Казваме, че две множества M и N са еквивалентни и пишем $M \sim N$, ако съществува взаимно еднозначно съответствие между M и N.*

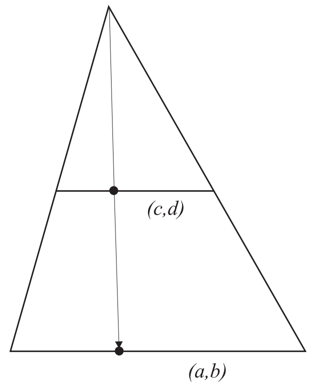
Пример 1.5 $[a, b] \sim [c, d]$ *(Фигура 6).*

Пример 1.6 *Сферата и разширената комплексна равнина са еквивалентни (Фигура 7).*

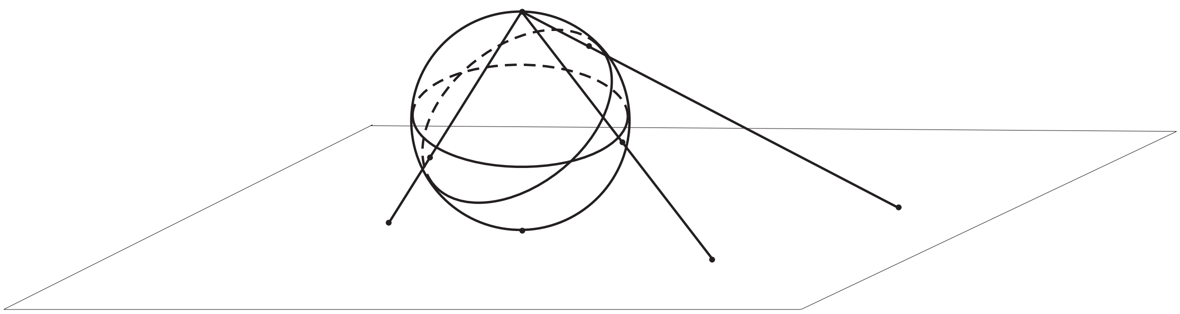
Пример 1.7 $(0, 1) \sim \mathbb{R}$ *(Фигура 8).*

Разглеждаме съответствието $y = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{arctg} x + \dfrac{1}{2}$.

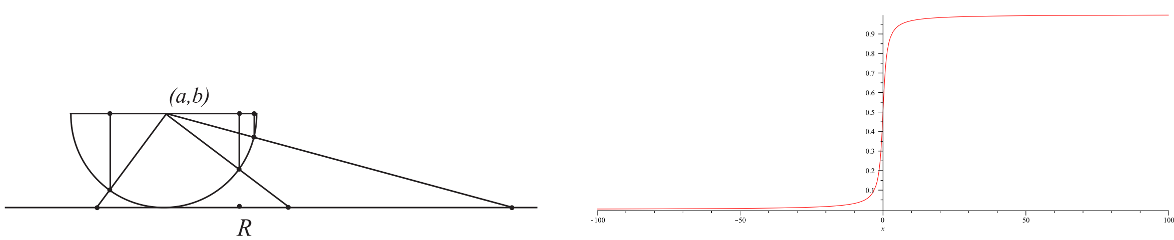
От разгледаните до момента примери се вижда, че винаги безкрайните множества се оказват еквивалентни на някое свое подмножество. Например $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, $(0, 1) \sim \mathbb{R}$. Това явление е характерно за безкрайните множества.



Фигура 6: $[a, b] \sim [c, d]$



Фигура 7: Сферата и разширената комплексна равнина



Фигура 8: $(0, 1) \sim \mathbb{R}$

Твърдение 1.5 *Всяко безкрайно подмножество е еквивалентно на някое свое подмножество.*

Доказателство: Наистина от всяко безкрайно множество M можем да изберем изброимо негово подмножество $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека разбием A на две подмножества $A_1 = \{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ и $A_2 = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, че $A \sim A_1$ и следователно $A \cup (M \backslash A) = M \sim A_1 \cup (M \backslash A) = M \backslash A_2$, т.е. $M \sim M \backslash A_2$. $\square$

Задачи

Задача 1. Докажете, че ако M е безкрайно множество, а A е негово изброимо подмножество, то $M \sim (M \cup A)$.
Задача 2. Докажете, че множеството от всички полиноми с рационални коефициенти е изброимо.
Задача 3. Докажете, че множеството от всички рационални интервали (т.е. интервалите с краища, които са рационални числа) е изброимо.
Задача 4. Докажете, че множеството от всички точки в равнината с рационални координати е изброимо.
Задача 5. Докажете, че множеството от всички редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, които имат само краен брой различни от нула елементи, които са рационални числа е изброимо.
Задача 6. Докажете, че множеството $\mathbb{Q}$ е
а) изброимо обединение на затворени множества.
б) изброимо сечение на отворени множества.
Задача 7. Докажете, че множеството $\mathbb{Q}$ е
а) изброимо обединение на затворени множества.
б) изброимо сечение на отворени множества.
Задача 8. Докажете, че следните множества са изброими или крайни:
а) взаимно не пресичащи се интервали върху реалната права;
б) взаимно не пресичащи се кръгове върху двумерната равнина;
г) точките на прекъсване на монотонна функция;
д) точките на прекъсване от първи род на функция на една променлива;
е) стойностите на локален минимум на функция дефинирана върху интервал.

1.5 Неизброими множества

Всички примери до сега бяха примери на изброими множества. Възниква въпросът, дали съществуват безкрайни множества, които не са изброими.

Теорема 1.5 *Множеството на реалните числа в интервала* $[0,1]$ *е неизброимо.*

Доказателство: Нека допуснем противното, т.е. че множеството $[0,1]$ може да бъде номерирано $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека разгледаме числата $x \in [0,1]$ записани в десетичен запис $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Тогава да запишем редицата $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_1 & = & 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots \\
\alpha_2 & = & 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots \\
\alpha_3 & = & 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n}\dots \\
\dots & . & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_4 & = & 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots
\end{array}$$

Всяко число записано във вид на крайна десетична дроб $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, където $a_n \neq 0$, съвпада с десетичната дроб $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} c_n 999999999 \dots$, където $c_n = a_n - 1$. Нека построим дробта $\beta = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ по диагоналната процедура на Кантор, а именно $b_n \neq a_{nn}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава $\beta \neq \alpha_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Следователно $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \neq [0,1]$ и така получихме, че множеството $[0,1]$ не може да бъде номерирано. $\square$

Ще направим и второ доказателство на Теорема 1.5.

Доказателство: Да допуснем, че числата в интервала $[0,1]$ могат да бъдат номерирани и подредени в редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека разделим интервала $[0,1]$ на три равни части $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$. Числото x_1 със сигурност не се съдържа в поне един от интервалите. Нека да означим този интервал с Δ_1 (ако не се съдържа в два интервала, можем да приемем, че избираме по десния интервал от двата) и него също да го разделим на три равни части. Ще получим интервал $\Delta_2 \subset \Delta_1$ в който не се съдържа x_2. Продължавайки така ще получим редица от вложени един в друг интервали, с дължини клонящи към нула. Следователно съществува $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, но по предположение x трябва да принадлежи на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, следователно съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $x = x_n \notin \Delta_n$, което е противоречие. $\square$

Всички множества, които са еквивалентни на $[0,1]$, казваме че имат мощност континуум.

Пример 1.8 *Интервалите* $[a,b]$ *и* (a,b) *са неизброими.*

Пример 1.9 *Множествата* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ *и* $\mathbb{R}^3$ *са неизброими.*

Пример 1.10 *Множеството от всички прави в равнината е неизброимо.*

Пример 1.11 *Множеството от всички непрекъснати функции в* $[0,1]$ *е неизброимо.*

Задачи

Задача 1. Докажете, че числата, които имат два различни десетични записа са изброим брой.
Задача 2. Докажете, че:
а) алгебричните числа са изброим брой;
б) транцидентните числа са неизброим брой.
Задача 3. Намерете биективно съответствие между множествата $[0,1]$ и $(0,1)$.
Задача 4. Изброимо или не изброимо е подмножеството на двумерното евклидово пространство което удовлетворява условието, че разстоянието между всеки две негови точки е рационално число?
Задача 5. Изброимо или не изброимо е подмножеството на двумерното евклидово пространство което удовлетворява условието, че разстоянията от всяка точка до две фиксирани точки са рационални числа.

Задача 6. Множеството на непрекъснатите функции дефинирани върху единичния интервал, единичния квадрат, единичния куб е неизброимо.
Задача 7. Множеството от всички затворен множества върху реалната права е неизброимо.

1.6 Мощност на множество

Ако две крайни множества са еквивалентни, то те се от един и същи брой елементи. Ако две безкрайни множества са еквивалентни, казваме че те имат еднаква „мощност”. За крайните множества на мощността можем да съпоставим число. Мощността на множествата еквивалентни с множеството на естествените числа се означава с $\aleph_0$ и се чете „алеф нула”. Множествата еквивалентни на отсечката $[0, 1]$ казваме, че имат мощност „континуум” и се означава със символа $\aleph$.

Нека A и B са две множества с мощности съответно $m(A)$ и $m(B)$. Логически са възможни следните случай:
1. A е еквивалентно на подмножество на B и B е еквивалентно на подмножество на A;
2. A е еквивалентно на подмножество на B, но B не е еквивалентно на подмножество на A;
3. B е еквивалентно на подмножество на A, но A не е еквивалентно на подмножество на B;
4. A не е еквивалентно на подмножество на B и B не е еквивалентно на подмножество на A;
Ако е в сила
1. получаваме, че$m(A) = m(B)$;
2. получаваме, че $m(A) < m(B)$;
3. получаваме, че $m(A) > m(B)$;
4. трябва да считаме, че мощността на множествата е несравнима. Случай 4. не е възможен, както следва от теоремата на Цермело.

За пълнота ще припомним теоремата на Цермело: всяко множество може да бъде напълно наредено. Еквивалентна на теоремата на Цермело е аксиомата за избора: Ако са дадени множествата $\{X_\gamma\}_{\gamma\Gamma}$, то можем от всяко множество X_γ а изберем по един елемент x_γ. Също така е еквивалентна на Теоремата на Хаусдорф и на Лемата на Цорн.

Интересен е въпроса, дали съществува множество с най голяма мощност.

Теорема 1.6 *Нека M е произволно множество и нека $\mathcal{M}$ е множеството съставено от всички подмножества на M. Тогава $m(\mathcal{M}) > m(M)$.*

Доказателство: Очевидно е че $m(M) < m(\mathcal{M})$ защото едноточковите множества са подмножества на M и те са еквивалентни на M.

Остава да покажем, че мощностите $m(M)$ и $m(\mathcal{M})$ не съвпадат.

Ще покажем, че не съществува взаимно еднозначно съответствие $f : M \to \mathcal{M}$. Да допуснем, че има такова съответствие. Ще конструираме $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$ за което не съществува $x \in M$, така че $f(x) = \mathcal{X}$.

Ако $f(a) = A$ и $a \in A$, то $a \notin \mathcal{X}$, ако $f(a) = A$ и $a \notin A$, то $a \in \mathcal{X}$. Да допуснем, че съществува $x \in M$, така че $f(x) = \mathcal{X}$. Има две възможности $x \in \mathcal{X}$ или $x \notin \mathcal{X}$. Ако $x \notin \mathcal{X}$ не е възможно защото по конструкция $\mathcal{X}$ се състои от всички елементи които не принадлежат на съответното си множество и следователно трябва $x \in \mathcal{X}$. Ако $x \in \mathcal{X}$, противоречи на построението на $\mathcal{X}$, че се състои от елементите, които не принадлежат на съответните си множества. $\square$

Мощността на $\mathcal{M}$ се означава с $2^{m(M)}$.

Вярно е равенството $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

1.7 Множество на Кантор

Нека $F_0 = [0,1]$. Ще получим индуктивно редицата от множества $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Нека $F_1 = F_0 \backslash (1/3, 2/3)$, $F_2 = F_1 \backslash \{(1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)\}$. Множеството F_4 се получава, като за всеки от интервалите на F_4 отстраняваме средите на части, които са със дължина $(1/3)^3$ и така конструираме индуктивно редица от вложени един във друг затворени интервали (Фигура 9). Множеството $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ се нарича множество на Кантор.

От Твърдение 4.5, следва че $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ е затворено множество. Очевидно точките

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots \tag{4}$$

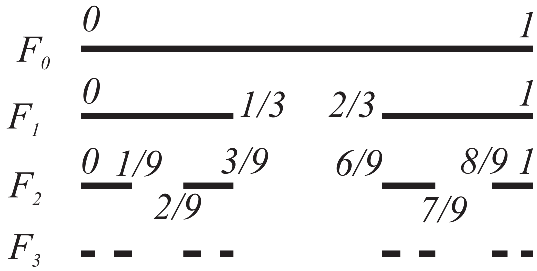
принадлежат на F. Да разгледаме всяко число $x \in [0,1]$, записано в троична бройна система $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, където $a_n = 0, 1, 2$. Лесно се вижда, че $x \in F$ тогава и само тогава, когато $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, където a_n е равно на 0 или 2. Множеството от всички безкрайни редици от 0 или 2 е еквивалентно на $[0,1]$. От факта, че (4) е изброимо множество следва, че (4) не може да изчерпва всички точки от F.

Нека разгледаме редицата $I = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \dots, \frac{15}{16}, \dots\}$. Нека положим

$D_{1/2} = (1/3, 2/3)$
$D_{1/4} = (1/9, 2/9) \quad D_{3/4} = (7/9, 8/9)$
$D_{1/8} = (1/27, 2/27) \quad D_{3/8} = (7/27, 8/27) \quad D_{1/8} = (19/27, 20/27) \quad D_{3/8} = (25/27, 26/27)$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Очевидно, че $D = \cup_{q \in I} D_q = F_0 \backslash F$. Лесно се проверява, че „дължината” на D е 1:

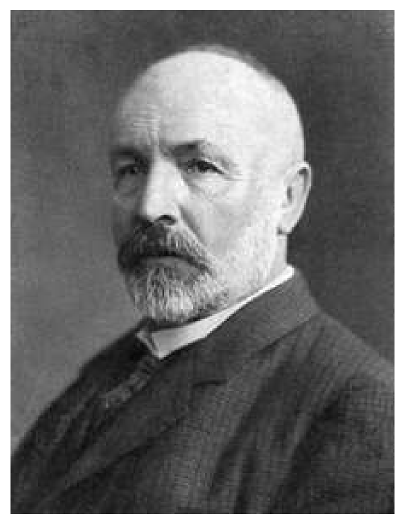
$$\sum_{q \in I} |D_q| = 1/3 + (1/9 + 1/9) + (1/27 + 1/27 + 1/27 + 1/27) + \dots = 1.$$



Фигура 9: Множества на Кантор

Интересно е, че $\mathrm{int}F = \emptyset$, $\overline{F} = F$, $\partial F = F \backslash (\mathrm{int}F) = F$, $|F| = 0$ и въпреки всичко се оказва, че $F \sim [0, 1]$ и $m(F) = m([0, 1])$.

Георг Кантор (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor 1845 – 1918). Той е най–известен с работите си върху теория на множествата. Той открива важността на биективните изображения, безкрайните множества и наредените множества. Кантор дефинира мощност на множества и сравнява големината на различните безкрайни множества. Теорията на Кантор за трансфинитните числа е била толкова шокираща, че редица велики математици, негови съвременници Кроникер, Поанкарие, Вайл, Брауер, не са е възприемали. Докато Людвиг Витгенстеин повдига философски аргументи срещу тях. Дори някои теолози са приемали резултатите му за абсолютната безкрайност, като предизвикателство на божията природа. Поанкаре нарича идеите му: "смъртоносна болест" инфектирала математиката, Кронекер го нарича "научен шарлатанин", "ренегат" и "развращаващ младежта". Това негативно отношение се смята за причина за честите депресии, в които изпадал Кантор. В наши дни голямото мнозинство математици, които не са нито конструктивисти, нито финитисти приемат работата на Кантор върху трансфинитните множества и аритметика, като я смятат за основна смяна на парадигмата. По думите на Давид Хилберт: "Никой няма да ни изгони от Рая, който Кантор създаде". През 1904 Кралското общество награждава Кантор със "Sylvester Medal", най-високото отличие за Кралското общество. Кантор изпраща за публикуване свои резултати в списанието Acta Mathematica, но главният редактор Gösta Mittag-Leffler помолва Кантор да изтегле своята статия, защото „... е изпреварила времето си с около 100 години". Кантор коментира това „ да изчакам до 1984 година за мен изглежда доста неприемливо". След този случай Контор повече не изпраща статии в Acta Mathematica.



Георг Кантор

2 Метрични пространства

Ще илюстрираме понятието разстояние със следния пример, в който сме дали разстоянията между три града в България.

	Бургас	Пловдив	София
Бургас	0	272	392
Пловдив	272	0	156
София	392	156	0

Веднага се забелязват основни свойства на функцията разстояние: разстоянието е нула само по диагонала, разстоянието е по–голямо или равно на нула, разстоянието от един град до друг е по–малко отколкото, ако на път се отбием през трети град.

Често мерните единици с които измерваме разстоянието могат да бъдат от различно естество. Понякога километри, метри или крачки, не са удачни за да се зададе разстояние. Например често казваме че разстоянието от точка A до точка B е 2 и половина часа шофиране, или час и четвърт ходене, или 4 дена преход през джунглата, или до 4–я светофар, или още 3 препятствия остават да се прескочат до финала, или на 8 светлини години.

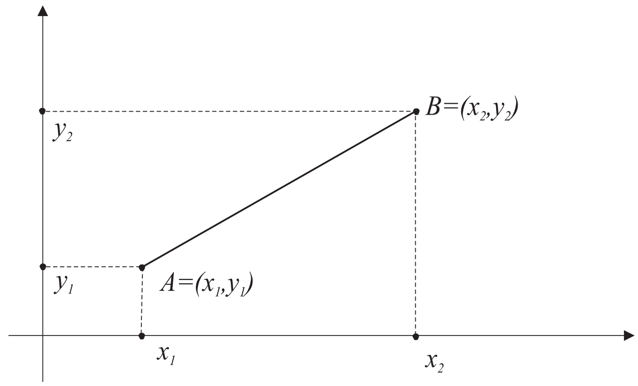
Метрика е функция, която измерва разстоянието, пространство е множество с произволна структура и метрично пространство е множество със структура определена от коректно дефинирано разстояние.

2.1 Определение на метрично пространство

Една от важните операции в анализа е граничният преход. В основата на тази операция стои фактът, че върху реалната права е определено разстояние между две точки. Много от фундаменталните факти в анализа не са свързани с алгебричната структура на реалните числа, т.е. че те образуват поле, а се опират само на понятието разстояние. Нека да разгледаме множеството на реалните числа $\mathbb{R}$. Разстояние между две точки $x, y \in \mathbb{R}$ се дефинира чрез функцията модул $|x - y|$. Добре известни са основните свойства на функцията модул:
1) $|x - y| \geq 0$ за всеки две точки $x, y \in \mathbb{R}$;
2) $|x - y| = 0$ тогава и само тогава, когато $x = y$;
3) $|x - y| = |y - x|$ за всеки две точки $x, y \in \mathbb{R}$;
4) $|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$ за всеки три точки $x, y, z \in \mathbb{R}$.

В двумерното евклидово пространство $\mathbb{R}^2$, добре известно е че разстоянието между две точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ е равно на $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (Фигура 10). Не е трудно да се провери, че то удовлетворява свойствата 1)–4).

Обобщавайки свойствата 1)–4), стигаме до понятието метрика и метрично пространство.



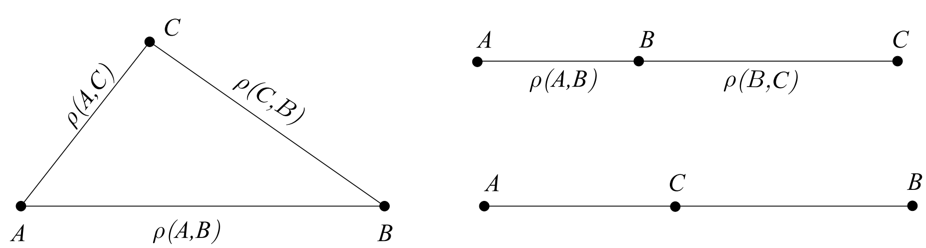
Фигура 10: Разстояние в $\mathbb{R}^2$

Определение 2.1 *Нека X е непразно множество. Функцията $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ се нарича метрика върху X или разстояние върху X, ако удовлетворява следните условия (аксиоми на метриката):*
1) $\rho(x, y) \geq 0$ за всеки две точки $x, y \in X$;
2) $\rho(x, y) = 0$ тогава и само тогава, когато $x = y$;
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ за всеки две точки $x, y \in X$;
4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ за всеки три точки $x, y, z \in X$ (неравенство на триъгълника).

Числото $\rho(x, y)$, удовлетворяващо условията 1),2),3) и 4), се нарича разстояние между точките $x, y \in X$.

Определение 2.2 *Множеството X, върху което е определена метрика ρ, се нарича метрично пространство и се означава с (X, ρ).*

Понятието метрично пространство е дефинирано от Морис Фреше.



Фигура 11: Неравенство на триъгълника

Възможно е върху едно и също множество X да се дефинират различни метрики. Тогава пространствата (X, ρ_1) и (X, ρ_2) са различни метрични пространства.

Морис Фреше (Maurice Fréchet) (1878–1973) е френски математик. Неговите основни приноси са в топологията и дефинирането на цяла ново понятие – метричните пространства. Има приноси и във вероятностите и статистиката, математическия анализ. Той дефинира понятието компактност. Неговата дисертация "Sur quelques points du calcul fonctionnel, 1906" дава началото на изследванията на метричните пространства, въпреки, че името метрично пространство е въведено малко по–късно от Хаусдорф. Той открива независимо от Рис теоремата за представяне в пространството на всички функции с интегрируем по лебег квадрат.

Фреше е роден в протестантско семейство. Баща му е бил директор на протестантски дом за сираци, а по–късно става директор на протестантско училище. Третата Република не е имала симпатии към религиозното обучение и баща му остава без работа. Семейството се издържа от майка му, която създава пансион за чужденци в Париж. Учител по математика в средното училище на Фреше е големия математик Якоб Хадамар. Хадамар открива веднага потенциала за математика на малкия Морис и започва да се занимава с него индивидуално. След като Хадамар се мести да работи в университета в Бордо през 1894, той продължава да поставя на Фреше математически задачи и остро да критикува грешките му. Много по-късно Фреше си признава, че тези задачи са го карали да живее в постоянен страх, да не би да не успее да ги реши, въпреки, че винаги е бил изключително благодарен на Хадамар.

Морис Фреше

Фреше е мобилизиран за Първата световна война и поради факта, че е знаел много езици, които научава като дете в приюта за чужденци, който държи майка му, служи като преводач в британската армия. Забележително е, че дори и по време на войната, докато е на фронта, той продължава да публикува статии.

Въпреки забележителните си резултати, Фреше не е бил обичан във Франция. Илюстрация за това е че е бил номиниран многократно за член на Френската академия на науките, но е избран за член, чак когато е на 78 години.

Свойствата 1)–4) са естествено обобщение на представата за разстояние между две точки в двумерното или тримерното пространство. Свойства 1) и 2) показват, че разстоянието е винаги не отрицателно число и е различно от нула за всеки две различни точки. Аксиома 3) показва, че разстоянието от x до y е равно на разстоянието от y до x. Условие 4) е известно като неравенство на триъгълника от добре известния факт, че сумата а на кои да е две от страните на триъгълник е по–голяма от третата (Фигура 11).

Твърдение 2.1 *Ако (X, ρ) е метрично пространство, то е в сила неравенството*

$$|\rho(x,z) - \rho(z,y)| \leq \rho(x,y)$$

за всеки $x, y, z \in X$.

Доказателство: От неравенството на триъгълника можем да напишем неравенствата:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

и

$$\rho(z, y) \leq \rho(z, x) + \rho(x, y)$$

и следователно са изпълнени неравенствата

$$\rho(x, z) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y)$$

и

$$\rho(z, y) - \rho(z, x) \leq \rho(x, y),$$

което означава, че $|\rho(x, z) - \rho(z, y)| \leq \rho(x, y)$.

Задачи

Задача 1. Докажете, че аксиомите за метрика са еквивалентни на следните две условия:
i) $\rho(x, y) = 0$ тогава и само тогава, когато $x = y$;
ii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ за всеки три точки $x, y, z \in X$.

Задача 2. Нека (X, ρ) е метрично пространство. Докажете, че за всеки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ е в сила неравенството на триъгълника:

$$\rho(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1^{n-1}} \rho(x_i, x_{i+1}).$$

Задача 3. Нека (X, ρ) е метрично пространство. Докажете, че за всеки четири точки $x, y, u, v \in X$ е в сила неравенството:

$$|\rho(x, y) - \rho(u, v)| \leq \rho(x, u) + \rho(y, v).$$

Задача 4. Проверете, кои от следните функции са метрики в $\mathbb{R}$:
а) $\rho(x, y) = x - y$;
б) $\rho(x, y) = x^3 - y^3$;
в) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$;
г) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$;
д) $\rho(x, y) = |\mathrm{arctg}(x) - \mathrm{arctg}(y)|$;
е) $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$;
ж) $\rho(x, y) = x^2 + 2y^2|x - y|$.

Задача 5. Нека X са точките по дадена окръжност. Нека да фиксираме точка $M_0 \in X$. Нека да определим функцията ρ по следния начин:
а) ако $X, Y \neq M_0$, то $\rho(X, Y)$ е равно на дължината на дъгата която съединява точките X и Y и не съдържа M_0;
б) ако $X = M_0$ или $Y = M_0$, то $\rho(X, Y)$ е равно на дължината на по-късата дъга с краища

X и Y;
в) ако $X = Y$, то $\rho(X, Y)$ е равно на нула.

Докажете, че ρ не е метрика.

Задача 6. Нека $X = \{x, y, z\}$. Нека да определим функцията ρ по следния начин:

$$\rho(x, z) = \rho(z, x) = \rho(x, y) = \rho(z, y) = 2\rho(y, x) = \rho(y, z) = 1$$

Метрика ли е ρ? Удовлетворява ли неравенството на триъгълника ρ?

Задача 7. Нека $X = \{x, y, z\}$. Нека функцията ρ удовлетворява

$$\rho(x, y) = \rho(y, z) = 1$$

Какви стойности може да приема $\rho(x, z)$, за да бъде ρ метрика?

Задача 8. Нека $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Нека да определим функцията ρ по следния начин:

$$\rho(x_i, x_i) = 0 \quad \rho(x_0, x_i) = \rho(x_i, x_0) = 1, i > 0 \quad \rho(x_i, x_j) = d, i \neq j, i, j > 0$$

Докажете, че за $d = \sqrt{2}$ функцията ρ е метрика. Намерете всички стойности на d за които ρ е метрика.

Задача 9. Нека X е множеството от всички български градове по река Дунав. Нека разстоянието между два града да бъде времето което е необходимо да измине един кораб за да стигне от единия град до другия. Дефинира ли се разстояние между българските градове по река Дунав по този начин , ако кораба се движи със скорост 20 км/ч, а течението на реката е 1км/ч. Какво може да кажете, ако приемем, че течението на реката е 0км/ч

Задача 10. Нека X е полетата на шахматната дъска. Нека разстоянието между две полета да бъде броя ходове които са нужни да направи:
а) царя;
б) топа;
в) коня;
Дефинира ли се разстояние между полетата върху шахматната дъска?

Задача 11. Нека върху X са дефинирани метрики ρ_i и $\lambda_i > 0$. Докажете, че функцията

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i(x, y)$$

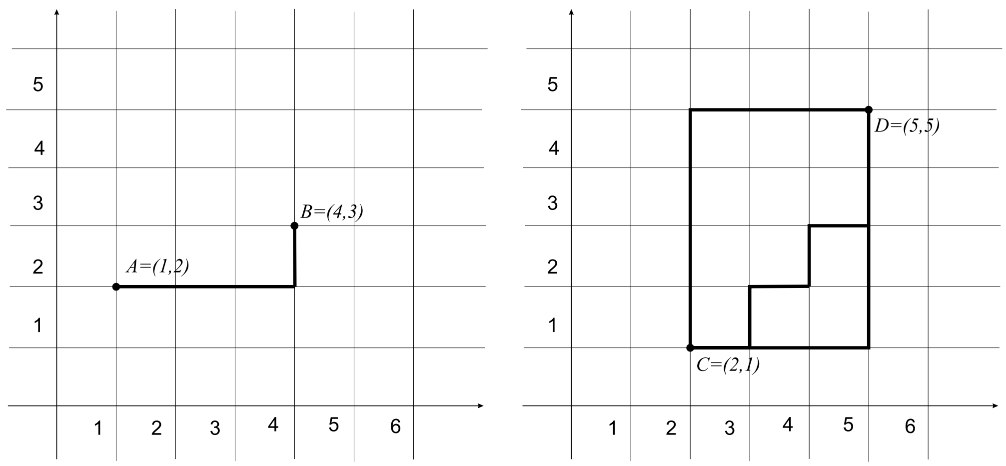
е метрика върху X.

2.2 Примери на метрични пространства

Пример 2.1 *Нека X е произволно множество. За всеки два елемента $x, y \in X$ полагаме*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Полученото метрично пространство се нарича дискретно метрично пространство.



Фигура 12: Манхатанско разстояние

С $\mathbb{R}^m$ ще означаваме множеството от всички наредени m–орки от реални числа, т.е. $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Точките $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ съвпадат и записваме $x = y$, тогава и само тогава, когато $x_i = y_i$ за всяко $i = 1, \ldots, m$.

Пример 2.2 *В множеството $\mathbb{R}^m$ може да се въведе метрика с помощта на формулата*

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{m} |y_k - x_k|.$$

Полученото метрично пространство означаваме с $\mathbb{R}^m_1$.

Проверката на аксиомите 1)–4) на метричното пространство е тривиална.

Нека дадем геометрична интерпретация на функцията ρ_1. Да разгледаме Декартовата равнина $\mathbb{R}^2$ и нека $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Нека разстоянието между $X_1 = (x_1, y_1)$ и $X_2 = (x_2, y_2)$ е най–краткия път от X_1 до X_2 по правите $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $y = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогава $\rho_1(X_1, X_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Например, ако $A = (1, 2)$ и $B = (4, 3)$, то очевидно $\rho_1(A, B) = |1 - 4| + |2 - 3| = 4$ (Фигура 12).

Някои автори наричат тази метрика "Манхатанско разстояние" от естествената прилика с разстоянието необходимо да се пропътува с кола от адрес "А" до адрес "Б" в Ню Йорк, където улиците са изток–запад или север–юг.

Пример 2.3 *В множеството $\mathbb{R}^m$ може да се въведе метрика и с помощта на формулата*

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{k=1,\ldots,m} |y_k - x_k|.$$

Полученото метрично пространство означаваме с $\mathbb{R}^m_\infty$.

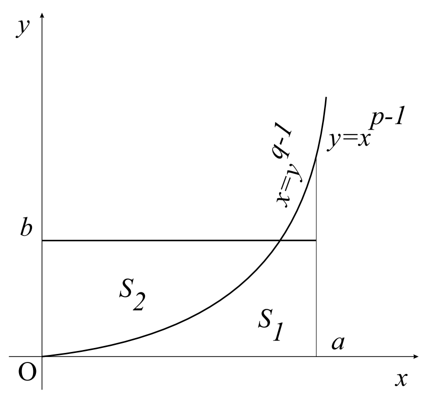
Лесно се проверява, че функцията ρ_∞ удовлетворява аксиомите 1)–4) и следователно ρ_∞ задава метрика.

Лема 2.1 *(Неравенство на Юнг) Ако $a, b > 0$ и $p, q > 1$, удовлетворяват $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то в сила е неравенството*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{5}$$

Уилям Хенри Юнг (William Henry Young) (1863 – 1942) е английски математик. Юнг учи в училище в Лондон, където директора е Едуин Абот, автор на математическата новела "Плоскандия". Пръв директора открива потенциала на Юнг да се занимава с математика и го насърчава. Юнг завършва университет в Кембридж. Той не успява да завърши, като пръв студент от випуска, но нека споменем, че това отличие се взема много трудно, а също така и големите математици не са успявали да го вземат, понеже се е изисквало да си по–скоро опитен в отговарянето на въпроси отколкото да имаш дълбока математическа мисъл. Юнг прави правилният избор и не се бори да стане първи, а отделя свободно време да се занимава със спорт. Той има резултати в теория на мярката, редове на Фурие, диференциално смятане. Трябва да отбележим, че независимо от Лебег, Юнг открива теория на мярката и интегрирането. Подхода му е различен, но по–късно се доказва, че е еквивалентен на този на Лебег. Най–сериозните резултати на Юнг са в областта на функции с няколко променливи. Съвремените учебници по Математически анализ използват точно подхода на Юнг.

Уилям Юнг



Фигура 13: Неравенство на Юнг

Доказателство: Разглеждаме кривата с уравнение $y = x^{p-1}$ или $x = y^{q-1}$. Нека означим с S_1 лицето на фигурата заградена от $y = x^{p-1}$, $x = a$ и $y = 0$ и да означим с S_2 лицето на фигурата, заградена от $x = y^{q-1}$, $y = b$ и $x = 0$. Очевидно $ab \leq S_1 + S_2$ (Фигура 13).

Лицата S_1 и S_2 се изчисляват лесно

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}, \qquad S_2 = \int_0^a y^{q-1} dy = \frac{b^p}{p}.$$

Така получаваме $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. $\square$

Теорема 2.1 *(неравенство на Хъолдер) Нека $a_k, b_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$ и $p, q > 1$ са свързани с равенството*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{6}$$

Тогава е изпълнено неравенството

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q}. \tag{7}$$

Неравенството на Хьолдер е открито първо от Роджерс през 1888. Хьолдер открива неравенството независимо от Роджерс през 1889.

Ото Хъолдер (Otto Ludwig Hölder) (1859 – 1937) е германски математик, роден в Щутгарт. Той е ученик на Леополд Кронекер (Leopold Kronecker), Карл Вайерщрас (Karl Weierstras) и Ернст Кумер (Ernst Kummer). Хъолдер е известен с неравенство на Хъолдер, Теорема на Жордан-Хъолдер, условие на Хъолдер. Леонард Джеймс Роджърс (Leonard James Rogers 1862 – 1933) Роджерс е бил талант в много области, всичко което е правил го е правил добре. Освен математика и музика, той е бил роден лингвист и фонетик, чудесен мим, кънкьор, правил е каменни градини. Всичко го е правил добре, защото го е правил с любов. Най-необходимото нещо в живата му е била музиката и чак след това се нарежда математиката. Имал е много малка нужда от това да бъде признат за нещата, които е правил.


Ото Хьолдер


Леонард Роджърс

Роджърс е известен с тъждествата на Роджърс–Рамануджан (Ramanujan), Роджърс – Рамануджан непрекъснати дроби, Трансформация на Роджърс. Тъждеството на Роджърс–Рамануджан има интересна история. Тя е публикувана през 1894 от Роджърс. Никой не обръща внимание на неговите резултати, чак до 1913, когато Рамануджан преоткрива формулата, но не може да е докаже нито той нито колегите с които е споделя и е публикува без доказателство. През 1917 година Рамануджан прелиствайки стари томове на “Proceedings of the London Mathematical Society” случайно попада на статията на Роджърс. След кореспонденция между двамата, Роджърс успява значително да опрости оригиналното си доказателство. Неоценяването на резултатите на Роджърс продължава, когато през 1936 година, бъдещият Фийлдсов *медалист – Atle Selberg, публикува едно обобщение на тъждеството на Роджърс–Рамануджан, което всъщност се оказва само един частен случай на оригиналния резултат на Роджърс.*

Доказателство: Нека първо разгледаме случая, когато:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p = \sum_{k=1}^{n} b_k^p = 1. \tag{8}$$

Ако е изпълнено условието (8), ще покажем, че

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq 1. \tag{9}$$

От Лема 2.1 следва, че за всяко $k \in \mathbb{N}$, $a_k b_k \leq \dfrac{a_k^p}{p} + \dfrac{b_k^q}{q}$. Сумираме по k от 1 до n и вземайки предвид (6) и (8), получаваме (9).

Ако не е изпълнено (8) полагаме

$$A_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p}}, \qquad B_k = \frac{b_k}{\left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{1/q}}.$$

Очевидно $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k^p = \sum_{k=1}^{n} B_k^p = 1$. Следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{1/q}} = \sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leq 1.$$

□

В частния случай, когато $p = q = 2$ получаваме неравенството на Коши–Буняковски–Шварц.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804 – 1889). Бащата на Буняковски е бил подполковник в кавалерията и загива през 1809 г. във Финландия. Първоначалното си образование Буняковски получава в Москва в дома на вторият си баща. През 1820 г. Буняковски заминава да учи математика в чужбина. Първо е живял в Кобург, където е вземал частни уроци, а след това е слушал лекции в Лозанската академия. Две години живее в Париж и е имал възможността да се бъде учен от Лаплас, Пуасон, Фурие, Ампер, Льожандър и Коши. През 1824 г. Буняковски получава бакалаварска степен, а през 1825 г. защитава дисертация. През 1826 г. Буняковски се завръща в Санкт Петербург и започва да се занимава с преподаване и научна дейност.

Виктор Буняковски

Карл Херман Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz 1843 – 1921) е германски математик, известен основно с работите си по комплексен анализ. Шварц се записва да учи химия в Берлин, но неговите учители Кумер и Вайерщрас го привличат към математиката. Той се занимава в много области на математиката, като теория на функциите, диференциална геометрия, вариационно смятане. Много теореми и методи носят неговото име : Additive Schwarz method, Schwarz alternating method, Schwarzian derivative, Schwarz lemma, Schwarz's list, Schwarz minimal surface, Schwarz theorem (also known as Clairaut's theorem), Schwarz integral formula, Schwarz–Christoffel mapping, Schwarz–Ahlfors–Pick theorem, Schwarz reflection principle, Schwarz triangle, Schwarz triangle map

Карл Шварц

Теорема 2.2 *Ако $a_k, b_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$ и $p \geq 1$, то в сила е неравенството*

$$\left(\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}. \tag{10}$$

Доказателство: При $p = 1$ неравенството е очевидно.

Нека $p > 1$. За да докажем неравенството, нека разгледаме тъждеството

$$(a+b)^p = (a+b)^{p-1}a + (a+b)^{p-1}b.$$

В това тъждество заменяме a с a_k, а b с b_k, сумираме по k от 1 до m и получаваме

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^{p-1}a_k + \sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^{p-1}b_k. \tag{11}$$

Прилагаме към всяка от двете суми, стоящи от дясно в (11), неравенството на Хьолдер и отчитайки, че $(p-1)q = p$, получаваме

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^p\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}\right).$$

Делим двете страни на неравенството на $(\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^p)^{1/q}$ и установяваме

$$(12)\qquad \left(\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^p\right)^{1/p}.$$

□

Следствие 2.1 *(неравенство на Минковски) Нека $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$ и $p \geq 1$. Тогава е изпълнено неравенството*

$$(13)\qquad \left(\sum_{k=1}^{m}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доказателство: От свойствата на функцията $|\cdot|$ и Теорема 2.2 получаваме

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

□

Херман Минковски (Hermann Minkowski 1864 – 1909) е известен с използването на геометрични методи за решаване на задачи от теория на числата, математическата физика и най–вече с теория на относителността. Минковски е учител по математика на Алберт Айнщайн. Минковски показва, че специалната теория на относителноста, представена от Айнщайн алгебрично може да се разглежда и геометрично, като теория на 4–мерното „пространство–време“. Първоначално Айнщайн е възприемал идеята на Минковски само като един математически трик, но по–късно осъзнава, че тази идея е необходима за развие общата теория на относителността.

Херман Минковски

Пример 2.4 *Нека $p \geq 1$ е фиксирано число. Нека $\mathbb{R}^m$ е множеството от всички наредени m–орки реални числа. За всеки две точки $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ от $\mathbb{R}^m$ полагаме*

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m}|y_k - x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Полученото метрично пространство означаваме с $\mathbb{R}^m_p$.

Аксиомите 1)-3) очевидно са изпълнени.

За да докажем аксиома 4), разглеждаме точките $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и $z = (z_1, \ldots, z_m)$ от $\mathbb{R}^m$. Полагаме $x_k - z_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, тогава

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p\right)^{1/p} = \rho_p(x,z) + \rho_p(y,z),$$

което е точно неравенството (13).

Очевидно за $p = 1$ получаваме метриката ρ_1, разгледана в Пример 2.2.

Метриката в $\mathbb{R}_2^m$, $\rho_2(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k - x_k|^2\right)^{1/2}$ се нарича Евклидова метрика.

Пример 2.5 *Нека $p \geq 1$ е фиксирано число и нека ℓ_p е множеството от всички редици $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, за които $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. За всеки две редици $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ от ℓ_p полагаме*

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{14}$$

Полученото метрично пространство означаваме с ℓ_p.

Сходимостта на реда (14) се проверява като се използва неравенството : $|y_k - x_k|^p \leq 2^{p-1}\left(|y_k|^p + |x_k|^p\right)$. Тъй като редовете $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$ са сходящи, то следва че и редът $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{p-1}\left(|y_k|^p + |x_k|^p\right)$ също е сходящ и от принципа за сравняване на редовете получаваме, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p$ е сходящ. Аксиомите 1)-3) очевидно са изпълнени.

Съгласно неравенството на Минковски (13) за всяко $m \in \mathbb{N}$ е в сила

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$

Тъй като редовете $\sum_{k=1}^{m} |a_k|^p$ и $\sum_{k=1}^{m} |b_k|^p$ са сходящи, то след граничен преход при $m \to \infty$ получаваме неравенството на Минковски за безкрайни суми

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}. \tag{15}$$

Като приложим неравенството на Минковски (15) за безкрайни суми при $a_k = x_k - z_k$ и $b_k = z_k - y_k$, $k \in \mathbb{N}$, както в Пример 4 получаваме, че $\rho_p(x,y) \leq \rho_p(x,z) + \rho_p(y,z)$.

Пример 2.6 *Нека ℓ_∞ е съвкупността от всички ограничени редици $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Това означава, че $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, когато $\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty$. За всеки две редици $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ полагаме*

$$\rho_\infty(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k - x_k|.$$

Полученото метрично пространство означаваме с ℓ_∞.

Аксиомите 1)-3) са изпълнени.

Остава да докажем, че е в сила и аксиома 4). Нека $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Тогава

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|x_k - y_k|\} \le \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|x_k - z_k| + |z_k - y_k|\} \\ &\le \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|x_k - z_k|\} + \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|z_k - y_k|\} = \rho(x,z) + \rho(z,y).\end{aligned}$$

Ако (X,ρ) е метрично пространство, то и (Y,ρ) е метрично пространство за всяко $Y \subset X$. Пространството (Y,ρ) наричаме подпространство на (X,ρ). Нека c е съвкупността от всички сходящи редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, c_0 е съвкупността от всички редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящи към 0 и c_{00} е съвкупността от всички редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с краен брой елементи различни от нула. Очевидно $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$. Лесно се вижда, че метриката ρ_∞ в c_0 е равна на $\rho_\infty(x,y) = \max_{k\in\mathbb{N}} |y_k - x_k|$.

Пример 2.7 *Нека $C_{[a,b]}$ е съвкупност от всички непрекъснати функции в интервала $[a,b]$ За всеки две функции f и g от $C_{[a,b]}$ полагаме*

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Полученото метрично пространство означаваме с $C_{[a,b]}$.

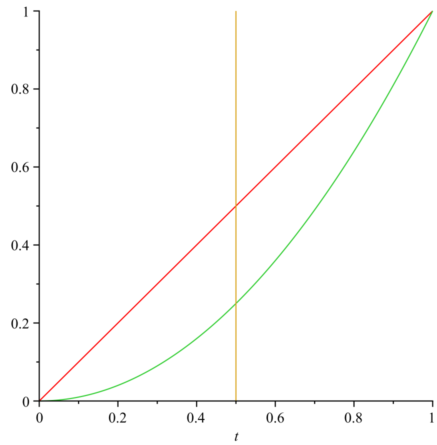
Аксиомите 1)-3) са изпълнени. Остава да докажем, че е в сила и аксиома 4). Нека $f,g,h \in C_{[a,b]}$. Нека $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = |f(x_0) - g(x_0))|$. Това е изпълнено, защото както знаем от Теоремата на Вайерщрас всяка непрекъсната функция, зададена в краен затворен интервал, достига точната си горна и долна граници и $|f - g|$ е непрекъсната функция. Тогава

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= |f(x_0) - g(x_0)| \le |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0))| \\ &\le \max_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| = \rho(f,h) + \rho(h,g).\end{aligned}$$

Пример 2.8 *Намерете разстоянието $\rho(t,t^2)$ в пространството $C_{[0,1]}$.*

Решение 1: От неравенството $|t - t^2| = t - t^2 = -\left(\frac{1}{2} - t\right)^2 + \frac{1}{4}$ получаваме, че $\rho(t,t^2) = \max_{t\in[0,1]} |t - t^2| = 1/4$ (Фигура 14).

Решение 2: Нека разгледаме функцията $f(t) = t - t^2$. Уравнението $f^{'}(t) = 1 - 2t = 0$ има единствено решение $t = 1/2$. От $f^{''}(1/2) = -1 < 0$ следва, че функцията f има най-голяма стойност $1/4$ в интервала $[0,1]$ в точката $1/2$.



Фигура 14: $\max_{0\leq t\leq 1}|t-t^2|$

Пример 2.9 *Нека $M_{[a,b]}$ е съвкупност от всички ограничени функции в интервала $[a,b]$, т.е. за всяка функция $f\in M_{[a,b]}$ съществува M, така че $|f(t)|\leq M$ за всяко $t\in[a,b]$. За всеки две функции f и g от $M_{[a,b]}$ полагаме*

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|.$$

Пример 2.10 *Нека $C_{\mathbb{R}}$ е множеството от всички непрекъснати функции в $\mathbb{R}$ и нека*

$$d_n(f,g)=\sup_{x\in[-n,n]}|f(x)-g(x)|,\quad n\in\mathbb{N}$$

и

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}.$$

Тогава $(C_{\mathbb{R}},d)$ е метрично пространство. Нека отбележим, че d_n не дефинира разстояние за никое $n\in\mathbb{N}$.

Използвайки (5), заключаваме, че за всеки две $p,q>1$, свързани с равенството $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, е изпълнено интегралното неравенство на Хьолдер

$$\int_a^b|f(t)g(t)|dt\leq\left(\int_a^b|f(t)|^pdt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|g(t)|^qdt\right)^{1/q},\tag{16}$$

за всеки две функции, за които съществуват интегралите в дясната страна на (16). От (16) Следва интегралното неравенство на Минковски

$$\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^pdt\right)^{1/p}\leq\left(\int_a^b|f(t)|^pdt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|g(t)|^pdt\right)^{1/p}$$

за $p \geq 1$.

Пример 2.11 *Нека $C_{[a,b]}$ е съвкупност от всички непрекъснати функции в интервала $[a,b]$. За всеки две функции f и g от $C_{[a,b]}$ полагаме*

$$\rho(f,g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Полученото метрично пространство означаваме с $C^p_{[a,b]}$.

Намерете разстоянието между t и 0. Докажете, че $\lim_{p\to\infty} \rho_{C^p_{[a,b]}}(t,0) = \rho_{C_{[a,b]}}(t,0)$. Намерете разстоянието между t^2 и 0. Докажете, че $\lim_{p\to\infty} \rho_{C^p_{[a,b]}}(t^2,0) = \rho_{C_{[a,b]}}(t^2,0)$.

Пример 2.12 *Нека разгледаме краен брой метрични пространства (X_i, ρ_i), $i = 1, \dots n$. Нека $X = \prod_{i=1}^n X_i$ е декартовото произведение на множествата X_i т.е. $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ тогава и само тогава, когато $x_i \in X_i$ за $i = 1, \dots n$. Дефинираме метрика в X чрез*

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^n \rho_i(x_i, y_i).$$

Лесно се проверява, че ρ е метрика.

Пример на пространство, получено по тази конструкция е $\mathbb{R}^m_1 \equiv \prod_{i=1}^m \mathbb{R}$.

Друга възможна метрика в $X = \displaystyle\prod_{i=1}^n X_i$ е $d_p(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n (\rho_i(x_i,y_i))^p \right)^p$ за $p \geq 1$ и получаваме $\mathbb{R}^m_p \equiv \displaystyle\prod_{i=1}^n \mathbb{R}$ или ако $d_\infty(x,y) = \max\limits_{i\in\mathbb{N}}\{\rho_i(x_i,y_i)\}$ тогава получаваме $\mathbb{R}^m_\infty \equiv \displaystyle\prod_{i=1}^n \mathbb{R}$.

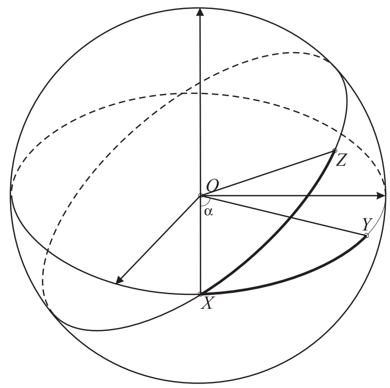
Ако $X = \prod_{i=1}^\infty X_i$ е декартово произведение на безброй много метрични пространства, тогава един начин за дефиниране на метрика в X е $\rho(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} \min\{\rho_i(x_i,y_i), 1\}$.

Нека в пространството X са дефинирани метриките ρ и d. Тогава функциите

$$\rho_\infty(x,y) = \max\{d(x,y), \rho(x,y)\},\ \rho_1(x,y) = d(x,y) + \rho(x,y) \text{ и } \rho_p(x,y) = \sqrt[p]{d^p(x,y) + \rho^p(x,y)}$$

също са метрики в X.

Пример 2.13 *Нека S е сфера в R^3. Дефинираме разстояние върху S, като най-краткото разстояние между точките x, y върху S. Най-краткия път се нарича геодезичен.*



Фигура 15: Геодезично разстояние

Пример 2.14 *Нека $p \geq 1$ е фиксирано число и нека $w = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ е намаляваща и сходяща към нула редица. Означаваме с $\ell_p(w)$ множеството от всички редици $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, за които $\sum_{k=1}^{\infty} w_k|x_k|^p < \infty$. За всеки две редици $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ от $\ell_p(w)$ полагаме*

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}.$$

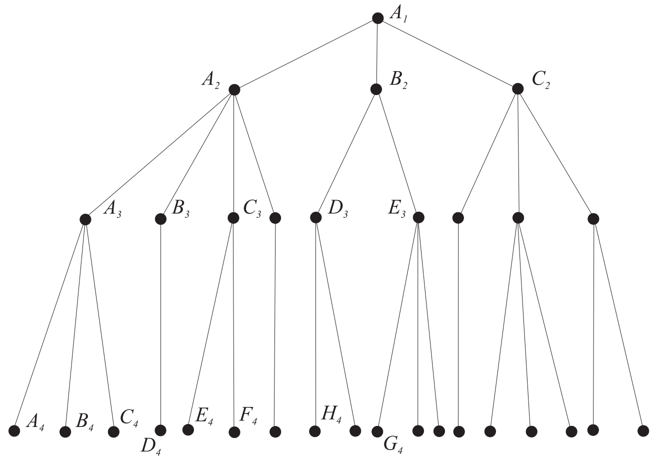
Пример 2.15 *Ако функцията ρ удовлетворява условията*
1) $\rho(x, y) \geq 0$ за всеки две точки $x, y \in X$;
2) ако $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$;
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ за всеки две точки $x, y \in X$;
4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ за всеки три точки $x, y, z \in X$.

Казваме, че ρ е псевдометрика и (X, ρ) е псевдометрично пространство. Нека да разделим X на класове на еквивалентност, така че $x \sim y$, ако $\rho(x, y) = 0$. Тогава, ако $\widetilde{X}$ е пространството от всички класове на еквивалентност и $\widetilde{\rho}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \rho(x, y)$, където x и y са произволни представителина класовете $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$.

Ще завършим с два примера от сфери различни от математиката.

Пример 2.16 *Нека X е множеството от хора с един и същи предшественик, например правнуци и прабаба. Дефинираме разстояние ρ между два индивида като броя поколения, които е необходимо да се върнем назад, за да достигнем до общия им предшественик. Например разстоянието между две сестри е 1, а между две първи братовчедки е 2 (Фигура 16). Лесно се проверява, че това е метрично пространство. В действителност тази метрика удовлетворява по–силното условие*

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}.$$



Фигура 16: Родословно дърво

Например $\rho(A_2, B_2) = 1$, $\rho(A_3, C_3) = 1$, $\rho(A_3, D_3) = 2$, $\rho(A_4, B_4) = 1$, $\rho(A_4, E_4) = 2$, $\rho(A_4, G_4) = 3$.

Определение 2.3 *Казваме, че метриката ρ е ултра–метрика, ако удовлетворява по-силното неравенство на триъгълника:*

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$$

за всеки $x, y, z \in X$.

Друг пример извън математиката.

Пример 2.17 *Нека X е множеството от n–буквените думи. Разстояние дефинираме с $\rho(x, y) = \sharp\{i : x_i \neq y_i\}$.*

Въпреки, че съществуват много реални ситуации в които разстоянието може да се опише с метрика, то съществуват и реални ситуации, където дефиницията за метрика е неприложима. Например в много градове има еднопосочни улици, което може да наруши условието за симетричност на разстоянието, въпреки че неравенството на триъгълника ще бъде изпълнено.

Върху реалната права могат да се въведат много метрики. Понякога е разумно да се въведе метрика, която разтяга или свива части от реалната права или изобщо от пространството X. Това може да ни бъде необходимо, ако моделираме ситуации в които някакво тегло е необходимо: едно и също разстояние, но по два различни пътя, например магистрала и черен път се изминава за различно време. Това винаги може да се постигне, защото всяка инективна функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ поражда метрика. Наистина ако разгледаме

$\rho(a, b) = |f(a) - f(b)|$. Инективността на изображението f е необходимо за да се осигури, че за всеки две $a \neq b$ е изпълнено $\rho(a, b) \neq 0$. Симетричността и неравенството на триъгълника следват непосредствено от свойствата на функцията модул. Като пример може да разгледаме:

$$d_1(x, y) = |e^x - e^y|; \quad d_2(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|; \quad d_3(x, y) = |\log(x/y)|.$$

Докажете, че пространствата $(\mathbb{R}, d_1)$, $(\mathbb{R}, d_2)$ и $((0, +\infty), d_3)$ са метрични пространства.

Задачи

Символът ℓ^0 ще използваме за означаване на множеството от всички редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$.

Задача 1. Нека в ℓ^0 е дефинирана функцията

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\min\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\}}.$$

Докажете, че ρ е метрика в ℓ^0.

Задача 2. Нека в ℓ^0 са дефинирани функциите

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

и

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\{|x_k - y_k|, 1\}.$$

докажете, че ρ и d са метрики в ℓ^0.

Задача 3. Нека в $C_{[0,1]}$ е дефинирана функцията

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt.$$

Докажете, че ρ е метрика.

Задача 4. Нека $C^{(1)}_{[0,1]}$ е пространството от всички функции с непрекъсната производна в интервала $[0, 1]$. Дефинираме

$$\rho_{1,1}(f, g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| + \max_{t \in [0,1]} |f'(t) - g'(t)|.$$

$$\rho_{1,\infty}(f, g) = \max\left\{\max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|, \max_{t \in [0,1]} |f'(t) - g'(t)|\right\}.$$

$$\rho_{1,2}(f, g) = \sqrt{(\max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|)^2 + (\max_{t \in [0,1]} |f'(t) - g'(t)|)^2}.$$

Докажете, че $\rho_{1,1}$, $\rho_{1,\infty}$ и $\rho_{1,2}$ са метрики в $C^{(1)}_{[0,1]}$.

Задача 5. Нека $C^{(n)}_{[0,1]}$ е пространството от всички функции с непрекъсната n–та производна в интервала $[0,1]$. Дефинираме

$$\rho_{n,1}(f,g) = \sum_{i=0}^{n} \max_{t\in[0,1]} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)|.$$

$$\rho_{n,\infty}(f,g) = \max_{i=1,2\dots,n} \left\{ \max_{t\in[0,1]} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)| \right\}.$$

$$\rho_{n,2}(f,g) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (\max_{t\in[0,1]} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)|)^2}.$$

Докажете, че $\rho_{n,1}$, $\rho_{n,\infty}$ и $\rho_{n,2}$ са метрики в $C^{(1)}_{[0,1]}$.

Задача 6. Нека $X = \mathbb{R}^n$. Функцията $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ е дефинирана чрез

$$\rho(x,y) = \min_{k=1,\dots,n} |x_k - y_k|.$$

Метрика ли е ρ?

Задача 7. Нека $X = \mathbb{Z}$. Функцията $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ е дефинирана чрез

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \\ 2^n, & x - y = 2^n a, n \in \mathbb{N}, a - \text{нечетно число.} \end{cases}$$

Метрика ли е ρ?

Задача 8. Нека $X = \mathbb{Q}$. Функцията $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ е дефинирана чрез

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \\ 3^n, & x - y = 3^n a/b, a, b - \text{не се делят на } \ 3, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Метрика ли е ρ?

Задача 9. Нека X е множеството от всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Определя ли метрика функцията $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ е дефинирана чрез

$$\rho(f,g) = \begin{cases} 0, & f = g \\ \\ 2^{-n}, & n - \text{най–малкото } \ n \ \text{ така че } \ f(n) \neq g(n). \end{cases}$$

Метрика ли е ρ?

Задача 10. Кои от метриките в разгледаните примери и задачи са ултра-метрики?

Задача 11. Нека (X, ρ) е метрично пространство. Докажете неравенството

$$|\rho(x, y) - \rho(z, v)| \leq \rho(x, v) + \rho(y, z)$$

за всеки $x, y, z \in X$

Задача 12. Докажете, че функцията $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ не дефинира метрика в $\mathbb{R}$. Какво можете да кажете за функцията $\rho(x, y) = |x - y|^2$?

Задача 13. Нека в множеството на всички ирационални числа $X = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ дефинираме функцията $\rho(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ за всеки $x, y \in X$. Метрика ли е тази функция?

Задача 14. Покажете, че множеството от естествените числа снабдено с метриката $\rho(n, m) = \dfrac{|m - n|}{mn}$ е метрично пространство.

Задача 15. Докажете, че пространството $(\mathbb{R}, \rho)$ е метрично пространство, ако $\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y| + 1, & x.y < 0 \\ |x - y|, & x.y \geq 0 \end{cases}$

Задача 16. Нека (X, d) е метрично пространство и $f : X \to X$ е биективно изображение. Докажете, че функцията $\rho(x, y) = d(f(x), f(y))$ е метрика в X.

Задача 17. Нека (X, d) е метрично пространство и $U, V \subset X$, такива че $U \bigcup V = X$ и $U \bigcap V = \emptyset$. Докажете, че функцията

$$\rho(x, y) = \begin{cases} d(x, y) + 1, & \text{когато точно една от точките } x, y \text{ принадлежи на } U \\ d(x, y), & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Задача 18. Нека всеки две $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ е дефинирана функцията

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x_1 - y_1|, & x_2 = y_2 \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1|, & x_2 \neq y_2. \end{cases}$$

Докажете, че $(\mathbb{R}^2, \rho)$ е метрично пространство.

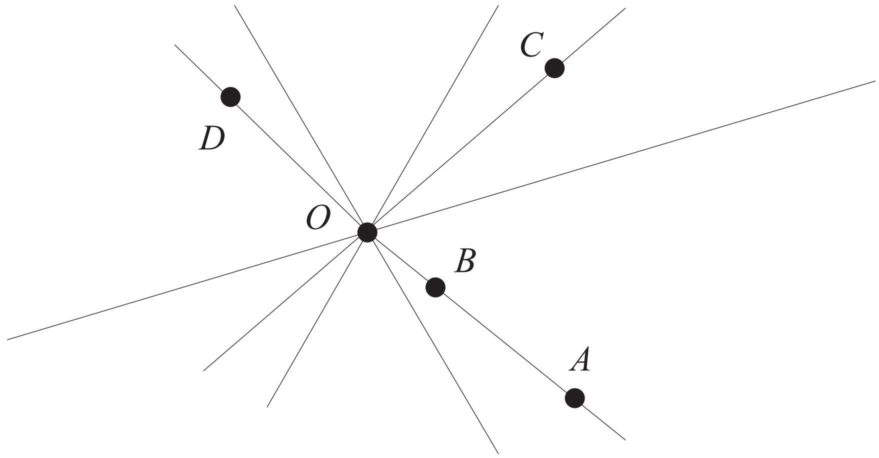
Задача 19. Нека всеки две $x, y \in \mathbb{R}^2$ е дефинирана функцията

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x| + |x - y| + |y|, & x \neq y. \end{cases}$$

Докажете, че $(\mathbb{R}, \rho)$ е метрично пространство.

Задача 20. Нека означим с $\mathcal{I}$ множеството от всички интервали в $\mathbb{R}$ от вида $[a, b]$. Нека за всеки два интервала $I = [a, b], J = [s, r] \in \mathcal{I}$ дефинираме функцията

$$\rho(I, J) = \max\{|a - s|, |b - r|\}.$$



Фигура 17: Метрика на френските железници

Докажете, че ρ е разстояние.

Задача 21. Нека разгледаме сноп от прави през точката O в равнината. Нека разстоянието между две точи е

$$\rho(X,Y) = \begin{cases} \rho_2(X,Y), & \text{ако точките } X,Y,O \text{ лежат на една права} \\ \rho_2(X,O)+\rho_2(O,Y), & \text{ако точките } X,Y,O \text{ не лежат на една права} \end{cases}$$

Докажете, че ρ е разстояние. Често тази метрика се нарича „метрика на френските железници" поради приликата с френската железопътна мрежа от началото на 20-ти век (Фигура 17).

3 Елементи на метрично пространство

Функцията разстояние ни позволява да измерваме разстоянието между две точки, разстоянието между две множества, диаметъра на множество.

3.1 Отворено и затворено кълбо

Ще въведем някои основни понятия от теорията на метричните пространства. Когато знаем какво е разстоянието между две точки, възниква въпроса кои точки се намират на едно и също разстояние от дадена точка и така стигаме до понятието кълбо в метрично пространство.

Навсякъде в тази глава X е метрично пространство и $A \subset X$ е негово подмножество.

Определение 3.1 *Отворено кълбо с радиус r и център x_0 наричаме*

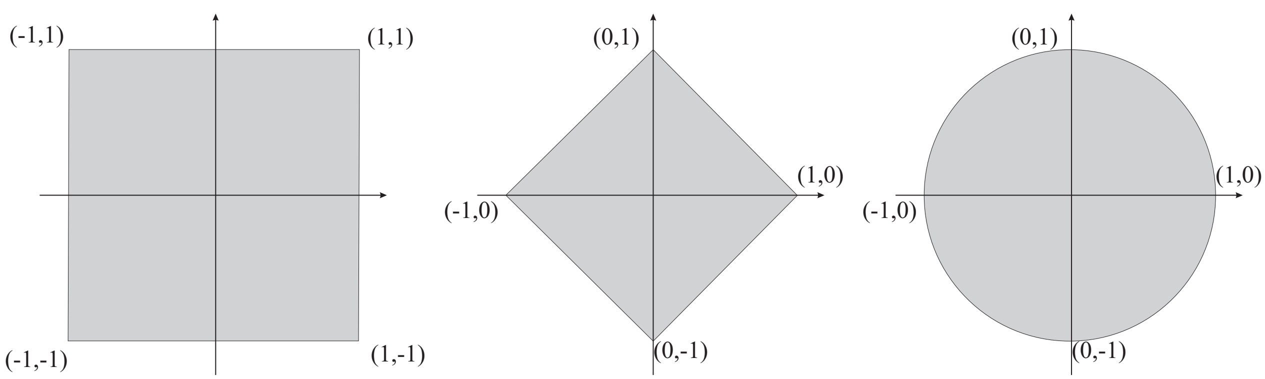
$$B_{x_0}(r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}.$$

Затворено кълбо с радиус r и център x_0 наричаме

$$B_{x_0}[r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}.$$

Отворено кълбо с център x_0 и радиус $\varepsilon > 0$ ще наричаме ε–околност на точката x_0 и ще означаваме с $O_\varepsilon(x_0)$.

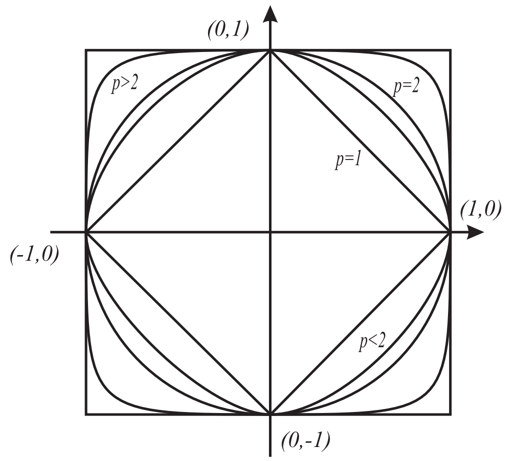
Нека разгледаме кълбата в $\mathbb{R}^2$ с център 0 и радиус 1 спрямо метриките ρ_∞, ρ_1, ρ_2 . Това са защрихованите фигури съответно на Фигура 18.



Фигура 18: Единичните кълба спрямо метриките ρ_∞, ρ_1, ρ_2 в R^2

Нека разгледаме кълба в $\mathbb{R}^2$ с център 0 и радиус 1 за $p = 1$, $1 < p < 2$, $p = 2$, $2 < p < \infty$, $p = \infty$. Те са изобразени на Фигура 19.

В дискретното метрично пространство $B_{x_0}(r)$ съвпада с x_0 за $r \leq 1$ и съвпада с цялото пространство за $r > 1$. Какво може да се каже за $B_{x_0}[r]$ в дискретното метрично пространство?



Фигура 19: Единичните кълба за метриките ρ_p в R^2

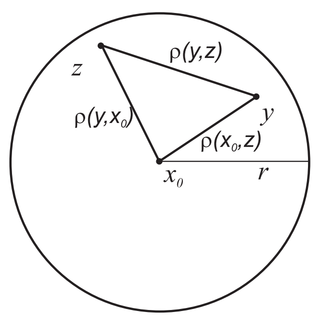
3.2 Диаметър на множество

Определение 3.2 *Диаметър на непразно подмножество $A \subset X$ наричаме*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}.$$

Пример 3.1 *Множеството $B_{x_0}[r]$ има диаметър по–малък или равен на $2r$.*

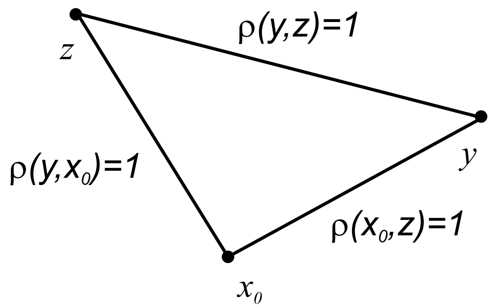
Решение: Нека $x, y \in B_{x_0}[r]$, тогава от неравенството $\rho(x,y) \leq \rho(x,x_0) + \rho(x_0,y) \leq r + r = 2r$ следва, че $\operatorname{diam}(B_{x_0}[r]) \leq 2r$ (Фигура 20).



Фигура 20: Диаметър на единичното кълбо

Нека да разгледаме дискретното метрично пространство. Тогава $B_{x_0}[1] \equiv X$, защото за всеки две $x, y \in B_{x_0}[1]$ е в сила неравенството $\rho(x,y) = 1$ (Фигура 21).

Твърдение 3.1 *Нека (X, ρ) е метрично пространство и $A \subseteq B \subset X$. Тогава* $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.



Фигура 21: Диаметър на единичното кълбо в дискретното метрично пространство

Доказателство: От $A \subseteq B$ получаваме неравенството

$$\sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\} \leq \sup\{\rho(u,v) : u,v \in B\}.$$

□

Твърдение 3.2 *Ако* $S \subset \mathbb{R}$, *тогава* $\operatorname{diam}(S) = \sup\{s \in S\} - \inf\{s \in S\}$

Доказателство: Ще разгледаме случая когато $\sup\{s \in S\}, \inf\{s \in S\} \neq \infty$. За всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $a, b \in S$, такива че

$$a - \varepsilon/2 \leq \inf\{S\} \leq a \leq b \leq \sup\{S\} \leq b + \varepsilon/2.$$

Следователно е в сила неравенството

$$\sup\{S\} - \inf\{S\} \leq b - a + \varepsilon \leq \operatorname{diam}(S) + \varepsilon.$$

От произволния избор на $\varepsilon > 0$ следва, че $\sup\{S\} - \inf\{S\} \leq \operatorname{diam}(S)$. От друга страна за всеки две $x, y \in S$ от неравенствата

$$\inf\{S\} \leq x, y \leq \sup\{S\}$$

получаваме $|x - y| \leq \sup\{S\} - \inf\{S\}$ и следователно $\operatorname{diam}(S) \leq \sup\{S\} - \inf\{S\}$. □

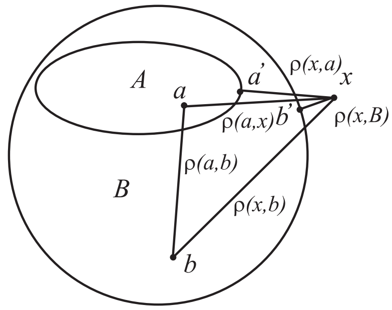
Пример 3.2 *Интервалите* $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ *и* (a,b) *имат диаметър* $b - a$.

Определение 3.3 *Ако* $A, B \subset X$ *са две непразни множества, то разстояние между тях наричаме*

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\}.$$

В частност разстояние между непразното множество $A \subset X$ *и* $x \in X$ *наричаме*

$$\rho(x,A) = \rho(\{x\},A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}.$$



Фигура 22:

Пример 3.3 *За всяко* $x \in \mathbb{R}$ *е изпълнено* $\operatorname{dist}(x, \mathbb{Q}) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = 0$.

Пример 3.4 *Нека* $l = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2^2 : ax_1 + bx_2 + c\}$ *е права в* $\mathbb{R}_2^2$. *Тогава разстоянието от* $z = (z_1, z_2)$ *до правата* l *е равно на* $\dfrac{|az_1 + bz_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Твърдение 3.3 *Нека* X *е метрично пространство и* $A \subseteq B \subseteq X$. *Тогава за всяко* $x \in X$ *е изпълнено*

$$\operatorname{dist}(x, B) \leq \operatorname{dist}(x, A) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \operatorname{diam}(B)$$

Доказателство: От включването $A \subseteq B$ следва, че

$$\operatorname{dist}(x, B) = \inf\{\rho(x, b) : b \in B\} \leq \inf\{\rho(x, a) : a \in A\} = \operatorname{dist}(x, A).$$

Нека $a \in A$ и $b \in B$ са произволно избрани. Тогава

$$\operatorname{dist}(x, A) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, b) + \rho(a, b) \leq \rho(x, b) + \operatorname{diam}(B).$$

От произволният избор на $b \in B$ следва, че $\operatorname{dist}(x, A) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \operatorname{diam}(B)$ (Фигура 22).

Твърдение 3.4 *Нека* (X, ρ) *е метрично пространство и* $x, y \in X$, $S \subset X$. *Тогава:*
а) $\operatorname{dist}(x, S) \leq \rho(x, y) + \operatorname{dist}(y, S)$;
б) $|\operatorname{dist}(x, S) - \operatorname{dist}(y, S)| \leq \rho(x, y) \leq \operatorname{dist}(x, S) + \operatorname{diam}(S) + \operatorname{dist}(y, S)$.

Доказателство: а) Нека $s \in S$ е произволно избрано. Тогава $\operatorname{dist}(x, S) \leq \rho(x, s) \leq \rho(x, y) + \rho(y, s)$. Последното неравенство е в сила за всички $s \in S$ и следователно $\operatorname{dist}(x, S) \leq \rho(x, y) + \operatorname{dist}(y, S)$.

б) Повтаряйки доказателството от а), след размяна на местата на x и y получаваме $\operatorname{dist}(y, S) \leq \rho(x, y) + \operatorname{dist}(x, S)$ и следователно

$$|\operatorname{dist}(x, S) - \operatorname{dist}(y, S)| \leq \rho(x, y).$$

За произволни $p, q \in S$ е в сила неравенството $\rho(x, y) \leq \rho(x, p) + \rho(p, q) + \rho(q, y) \leq \rho(x, p) + \operatorname{diam}(S) + \rho(q, y)$. От произволния избор на $p, q \in S$ следва б). $\square$

Определение 3.4 *Казваме, че множеството $A \subset X$ е ограничено, ако* $\operatorname{diam} A < \infty$.

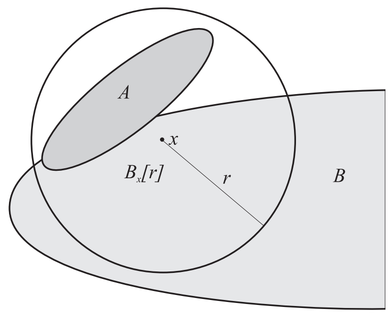
Твърдение 3.5 *Множеството $A \subset X$ е ограничено, тогава и само тогава, когато съществуват $x \in X$ и $r > 0$, така че $A \subseteq B_x[r]$.*

Доказателство: Ако съществуват $x \in X$ и $r > 0$, така че $A \subseteq B_x[r]$, тогава от Твърдение 3.1 и $\operatorname{diam}(B_x[r]) \leq 2r$ следва, че $\operatorname{diam}(A) \leq 2r < \infty$.

Нека $\operatorname{diam}(A) = d < \infty$ и нека $x \in X$ е произволно. Полагаме $r = d + \operatorname{dist}(x, A) + 1$. Нека $a \in A$. Съществува $b \in A$, така че $\rho(x, b) \leq \operatorname{dist}(x, A) + 1$ и от неравенството

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, b) + \rho(b, x) \leq d + \operatorname{dist}(x, A) + 1 = r$$

следва, че $a \in B_x[r]$. □



Фигура 23: Ограничено множество

На фигура 23 са дадени две множества в $\mathbb{R}^2_2$: елипса – A и вътрешността на парабола B. Веднага се вижда, че съществува кълбо (кръг), което да съдържа множеството A и не съществува кълбо (кръг), който да съдържа множеството B.

Метричното пространство $\mathbb{R}^2_p$ не е ограничено за никое $p \geq 1$. Кълбото $B_x(r) \subset \mathbb{R}^2_p$ е ограничено, метричното пространство $(\mathbb{R}^2_p, d)$, където $d(x, y) = \frac{\rho_p(x,y)}{1+\rho_p(x,y)}$ е ограничено.

Възможно е да се пресмята разстоянието от точка до обединение на множества.

Твърдение 3.6 *Нека (X, ρ) е метрично пространство и X_α, $\alpha \in \Gamma$ е съвкупност от подмножества на X, тогава*

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha\right) = \inf\{\operatorname{dist}(x, X_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}.$$

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$. Съществува $z \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$, така че $\rho(x, z) \leq \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha\right) + \varepsilon$ и съществува X_α, така, че $z \in X_\alpha$. Тогава

$$\inf\{\operatorname{dist}(x, X_\alpha) : \alpha \in \Gamma\} \leq \operatorname{dist}(x, X_\alpha) \leq \rho(x, z) \leq \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha\right) + \varepsilon.$$

От произволния избор на ε следва неравенството $\inf\{\operatorname{dist}(x, X_\alpha) : \alpha \in \Gamma\} \leq \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha\right)$.

От неравенството $\operatorname{dist}(x, X_\alpha) \geq \operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha\right)$, за всяко $\alpha \in \Gamma$ следва, че

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha\right) \geq \inf\{\operatorname{dist}(x, X_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}.$$

□

Твърдение 3.7 *Нека (X, ρ) е метрично пространство и X_α, $\alpha \in \Gamma$ е съвкупност от подмножества на X, тогава*

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcap_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha\right) \geq \sup\{\operatorname{dist}(x, X_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}.$$

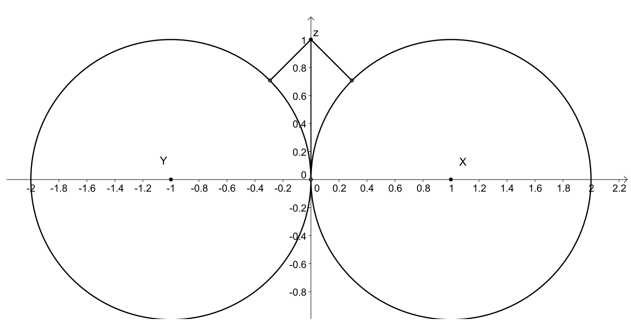
Доказателство: От неравенството $\operatorname{dist}(x, X_\alpha) \geq \operatorname{dist}\left(x, \bigcap_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha\right)$, за всяко $\alpha \in \Gamma$ следва, че

$$\operatorname{dist}\left(x, \bigcap_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha\right) \geq \sup\{\operatorname{dist}(x, X_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}.$$

□

Ще илюстрираме със следващия пример, че Твърдение 3.7 не е вярно с равенство, както Твърдение 3.6.

Пример 3.5 *Нека да разгледаме в $\mathbb{R}^2_2$ множествата $X = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ и точката $z = (0, 1)$.*



Фигура 24: Разстояние до сечение на множества

Лесно се вижда, че $\operatorname{dist}(z, X) = \operatorname{dist}(z, Y) = \sqrt{2} - 1 < 1 = \rho_2(z, (0,0)) = \operatorname{dist}(z, X \cap Y)$ (Фигура 24).

Задачи

Задача 1: Начертайте кълбо с радиус 1 и център 0 в пространството $\mathbb{R}^2$ с метрика:
а) $\rho(x, y) = \rho_\infty(x, y) + \rho_1(x, y)$;
б) $\rho(x, y) = \rho_1(x, y) + \rho_2(x, y)$;
в) $\rho(x, y) = \max\{\rho_\infty(x, y), 5\rho_1(x, y)\}$;
г) $\rho(x, y) = \rho_1(x, y) + \frac{1}{2}\rho_2(x, y) + \frac{1}{2^2}\rho_3(x, y)$;
д) $\rho(x, y) = \rho_1(x, y) + 2\rho_2(x, y) + 4\rho_4(x, y)$;
е) $\rho(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\rho_n(x, y)$.

Задача 2: Нека ρ_2 е Евклидовата метрика в $\mathbb{R}^2$. Нека разгледаме, така нареченото „железопътно метрично пространство" $(\mathbb{R}^2, \rho)$, където

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_2(x, y), & \text{ако } \ x, y, 0 \ \text{ лежат на една права} \\ \rho_2(x, 0) + \rho_2(y, 0), & \text{ако } \ x, y, 0 \ \text{ не лежат на една права.} \end{cases}$$

Тази метрика се нарича „железопътна метрика" по аналогия на железопътните пътища, където можем да приемем, че координатното начало $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ е някой голяма Ж.П. гара и ако искаме да стигнем от точка X до точка Y, които не лежат на една права с координатното начало, то трябва първо да стигнем до голямата гара $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ и после да продължим към Y.

Докажете, че „железопътното метрично пространство" $(\mathbb{R}^2, \rho)$ е метрично пространство. Какво представлява $\rho(x_0, y_0)$ за $x_0 = (1, 1)$ и $y_0 = (0, 0)$? Нарисувайте $B_{x_0}(r)$ за $r = 1/2$, $r = \sqrt{2}$ и $r = 2$.

Задача 3: Докажете, че ако $x \notin B_{x_0}(r)$, то $\operatorname{dist}(x, S_{x_0}(r)) \geq \rho(x_0, x) - r$.

Задача 4: Нека (X, ρ) е метрично пространство. Намерете множества $A, B \subset X$, такива че

$$\operatorname{diam}(A \bigcup B) \geq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B).$$

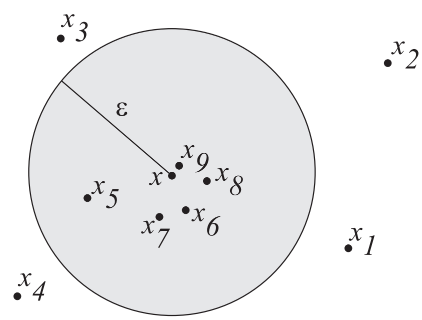
3.3 Сходящи редици в метрични пространства.

Основно понятие в реалния анализ е сходимстта на редици.

Определение 3.5 *Казваме, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е сходяща към точката $x \in X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че*

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon$$

за всяко $n \geq N$, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $x_n \in B_x(\varepsilon)$ за всяко $n \geq N$ (Фигура 25). Ако $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е сходяща към точката $x \in X$, записваме $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и x се нарича граница на редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.



Фигура 25: Сходяща редица

Дефиницията за граница на редица в метричното пространство X може да се изкаже и в термините на сходимост на числова редица. Именно, редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към точката $x \in X$, тогава и само тогава, когато $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Твърдение 3.8 *Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в метричното пространство (X, ρ). Съществува не повече от една точка x, към която $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.*

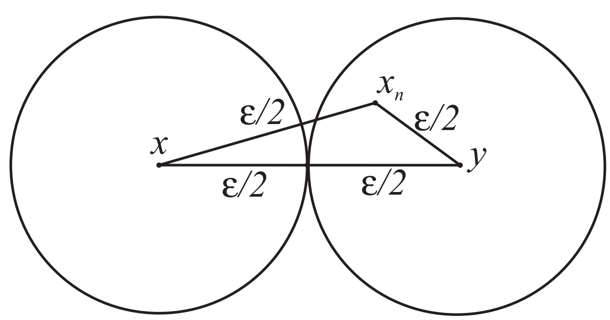
Доказателство: Нека допуснем противното, т.е. съществуват поне две точки x и y, които са граница на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека изберем $\varepsilon = \rho(x, y)/2$. Тогава съществува $N \in \mathbb{N}$, така че

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon$$

за всяко $n \geq N$ (Фигура 26). Прилагайки неравенството на триъгълника,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(x, y)$$

достигаме до противоречие. $\square$



Фигура 26: Единственост на границата на редица

От определението за ограниченост на едно множество получаваме, че една редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако съществува $r > 0$, така че $\rho(x_n, x_m) \leq r$ за всяко $n, m \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $\rho(x_n, x_m) \leq r$. От Твърдение 3.5, получаваме, че една редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако съществуват $x_0 \in X$ и $r > 0$, така че $\rho(x_0, x_n) \leq r$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Твърдение 3.9 *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Доказателство: Нека изберем $\varepsilon = 1$. Тогава съществува ν, така че $\rho(x, x_n) < 1$ за всяко $n \geq \nu$. Да положим $r = \max\{1, \rho(x, x_1), \rho(x, x_2), \ldots, \rho(x, x_{\nu-1}),\}$. Тогава очевидно $\rho(x, x_n) \leq r$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. □

Твърдение 3.10 *Нека $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ е декартово произведение на метричните пространства (X_i, ρ_i), $i = 1, \ldots, n$ и $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in X$. Тогава $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, тогава и само тогава, когато $\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i \in X_i$ за всяко $i = 1, \ldots, n$.*

Доказателство: Нека припомним, че разглеждаме X с метриката

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i, y_i) \tag{17}$$

за $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. От (17) следва неравенството

$$\rho_i(x_i, y_i) \leq \rho(x, y) \leq n \max_{1\leq i\leq n} \rho_i(x_i, y_i), \quad \text{за всеки } \ x, y \in X. \tag{18}$$

Нека $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, където $x = (x_1, \ldots, x_n)$. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $\rho(x^{(m)}, x) < \varepsilon$ за всяко $m \geq N$. От (18) получаваме $\rho_i(x_i^{(m)}, x_i) < \varepsilon$ за всяко $m \geq N$ и всяко $i = 1, \ldots, n$ т.е. $\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i$ за всяко $i = 1, \ldots, n$.

Обратно, нека $\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i$ в (X_i, ρ_i) за $i = 1, \ldots, n$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_i^{(m)}, x_i) = 0$ за $i = 1, \ldots, n$. Следователно за произволно $\varepsilon > 0$ съществува $N(i) \in \mathbb{N}$, така че

$$\rho_i(x_i^{(m)}, x_i) < \frac{\varepsilon}{n}$$

за $m \geq N(i)$. От (18) получаваме е изпълнено неравенството

$$\rho(x^{(m)}, x) \leq n \max_{1\leq i\leq n} \rho_i(x_i^{(m)}, x_i) < \varepsilon$$

за всяко $m \geq \max\{N(i) : 1 \leq i \leq n\}$. Следователно $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$. □

Забележка: Твърдение 3.10 е вярно, ако снабдим $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ с метрика $d_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{\rho_i\}$ или $d_p = \sqrt[p]{\rho_1^p + \rho_2^p + \cdots + \rho_n^p}$.

Определение 3.6 *Казваме, че две метрики ρ и d в X са еквивалентни, ако*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 \quad \textit{тогава и само тогава, когато} \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Пример 3.6 *Нека ρ е произволна метрика в X. Тогава метриката*

$$d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}.$$

е еквивалентна на ρ.

Наистина, ако $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho(x_n, 0)}{1+\rho(x_n, x)} = 0.$$

Обратно нека $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ тогава

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, 0)}{1-d(x_n, x)} = 0.$$

Пример 3.7 *Нека $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ е декартово произведение на метричните пространства (X_i, ρ_i), $i = 1, \ldots, n$. Тогава метриките*

$$d(x,y) = \max_{1\le i\le n} \rho_i(x_i, y_i)$$

и

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2}$$

са еквивалентни.

Задачи

Задача 1: Докажете, че в $\mathbb{R}^m$ метриките ρ_p и ρ_q са еквивалентни за всеки две $1 \le p, q \le \infty$.
Задача 2: Нека $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Докажете, че $(X, f(\rho))$ е метрично пространство за всяко метрично (X, ρ) тогава и само тогава, когато:
1) $f(x) \ge 0$;
2) $f(0) = 0$;
3) $f(x+y) \le f(x) + f(y)$.
а) Съществува ли за функцията f точка в която да бъде непрекъсната. Трябва ли функцията да бъде непрекъсната в точката 0.
б) Разгледайте примера $([0,1], \rho_1)$, където $\rho_1(x,y) = |x-y|$ и $([0,1], \sqrt{\rho_1})$.

в)Докажете, че метриките ρ_1 и $f(\rho_1)$ са еквивалентни, тогава и само тогава, когато f е непрекъсната в 0.
г) Разгледайте примера $([0,1], \rho_1)$, където $\rho_1(x, y) = |x - y|$ и
г.1) $f(x) = \sin(x)$, г.2) $f(x) = \ln(1 + x)$, г.3) $e^x - 1$, в.4) $\cos^2(x)$, г.5) $\dfrac{x}{1+x}$.
д) Конструирайте пример на функция f, която не е ограничена в никоя околност на точката 0.
Задача 3: Нека в $\mathbb{R}$ разгледаме метриката $d(x, y) = \left|\dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|}\right|$. Докажете, че d е еквивалентна на модул метриката в $\mathbb{R}$.
Задача 4: Нека $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ и удовлетворява условията:
1) $f(x) > 0$ за $x > 0$;
2) $f(0) = 0$;
3) f е ненамаляваща функция;
4) $\dfrac{f(x)}{x}$ е не растяща функция.
Докажете, че $\rho(x, y) = f(|x - y|)$ дефинира разстояние в $\mathbb{R}$.
Задача 5: Нека $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ и удовлетворява условията:
1) $f(x) > 0$ за $x > 0$;
2) $f(0) = 0$;
3) f е ненамаляваща функция;
4) $f''(x) \leq 0$ за всяко $x \in [0, +\infty)$.
Докажете, че $\rho(x, y) = f(|x - y|)$ дефинира разстояние в $\mathbb{R}$.
Задача 6: Нека (X, ρ) е метрично пространство и редиците $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ са сходящи съответно към $x, y \in X$. Докажете, че $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k) = \rho(x, y)$.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в (X, ρ). Нека $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ е строго растяща редица от естествени числа. Тогава редицата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ наричаме подредица на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Задача 7: Нека $x \in X$, където (X, ρ) е метрично пространство. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в (X, ρ) със свойството: Всяка подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ има подредица $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$, която е сходяща към x. Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
Задача 8: а) Докажете, че ако $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = x$, то $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$;
б) Докажете, че ако $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.
Задача 9: Нека (X, ρ) е метрично пространство и нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в X. Докажете, че ако редиците $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ са сходящи, то и редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.
Задача 10: Нека (X, ρ) е метрично пространство на непрекъснатите функции $f : [0, 1] \to$

$\mathbb{R}$. Изследвайте за сходимост редицата

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ -nx+2 & \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{2}{n} \\ 0 & \dfrac{2}{n} \le x \le 1, \end{cases}$$

ако
а) $\rho(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\}$
б) $\rho(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$
в) $\rho(f,g) = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx}.$

3.4 Критерии за сходимост на редици в някои метрични пространства

Твърдение 3.11 *Нека ℓ^0 е пространството от всички редици с метрика*

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ тогава и само тогава, когато за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$.

Доказателство: Нека за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k. \tag{19}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Съществува $k_0 \in \mathbb{N}$, така че $\displaystyle\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon/2$. Поради (19) съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, така че $|x_k^{(n)} - x_k| < \dfrac{\varepsilon}{2k_0}$ за всяко $k = 1, \ldots k_0$ и всяко $n \ge n_0$. Тогава за $n \ge n_0$ от веригата от неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x^{(n)}, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|} \\ &\le \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon}{2k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

получаваме, че $\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0$.

От неравенството $\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|} \geq \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|}$ за всяко $k, n \in \mathbb{N}$ следва, че за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$. $\square$

Твърдение 3.12 *Докажете, че* $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ *в* ℓ_∞ *тогава и само тогава, когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *така че за всяко* $n \geq N$ *и всяко* $k \in \mathbb{N}$ *е изпълнено* $|x_k^{(n)} - x_k| < \varepsilon$, *т.е.* $x_k^{(n)}$ *клони равномерно към* x_k *по* $k \in \mathbb{N}$.

Твърдение 3.13 *Докажете, че* $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ *в* c_0 *тогава и само тогава, когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *така че за всяко* $n \geq N$ *и всяко* $k \in \mathbb{N}$ *е изпълнено* $|x_k^{(n)} - x_k| < \varepsilon$, *т.е.* $x_k^{(n)}$ *клони равномерно към* x_k *по* $k \in \mathbb{N}$.

Твърдение 3.14 *Докажете, че* $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ *в* $C_{[a,b]}$ *тогава и само тогава, когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *така че за всяко* $n \geq N$ *и всяко* $t \in [a, b]$ *е изпълнено* $|x^{(n)}(t) - x(t)| < \varepsilon$, *т.е.* $x_k^{(n)}$ *клони равномерно към* x_k *в интервала* $[a, b]$.

Доказателствата на Твърдение 3.12, Твърдение 3.13 и Твърдение 3.14 следват непосредствено от определението за сходимост на редица и на метриките в ℓ_∞, c_0 и $C_{[a,b]}$.

Пример 3.8 *Ще изследваме сходимостта на редицата от функции* $f_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} + t^2$ *в пространствата* $C_{[0,1]}$ *и* $C_{[0,1]}^{(1)}$.

За всяко $t \in [0, 1]$ е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} + t^2 \right) = t^2 = f(t)$. Търсим на колко е равно

$$\max_{t\in[0,1]} \left| \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} + t^2 - t^2 \right| = \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \right| =?$$

От

$$\left(\frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \right)' = t^{n-1} - t^n = t^{n-1}(1 - t)$$

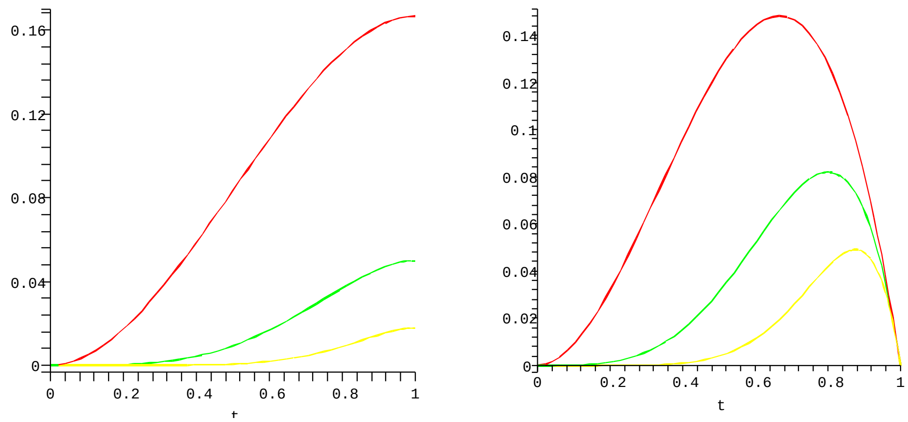
следва, че

$$\max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = |f_n(1) - f(1)| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \to 0$$

и следователно е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{C_{[0,1]}}(f_n, f) = 0$.

От дефиницията на метриката

$$\rho_{C_{[0,1]}^{(1)}}(x, y) = \max_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t) - y'(t)|$$



Фигура 27: $\rho_{C_{[0,1]}}$ $\rho'_{C_{[0,1]}}$

в $C^{(1)}_{[0,1]}$ следва, че остава да проверим, дали $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{[0,1]} |f_n^{'}(t)| = 0$. От

$$\left(t^{n-1} - t^n\right)^{'} = (n-1)t^{n-2} - nt^{n-1} = t^{n-2}(n-1-nt)$$

следва

$$\max_{t\in[0,1]} |f_n'(t) - f'(t)| = \left| f_n^{'}\left(\frac{n-1}{n}\right) - f^{'}\left(\frac{n-1}{n}\right) \right| = \left| \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right| \to 0.$$

от където получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{[0,1]} |f_n^{'}(t) - f^{'}(t)| = 0$. Следователно редицата от функции $f_n(t) = \dfrac{t^n}{n} - \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + t^2$ клони към t^2 в пространствата $C_{[0,1]}$ и $C^{(1)}_{[0,1]}$.

На Фигура 27 са дадени графиките на функциите $f_n(t) - f(t)$ и $f_n'(t) - f'(t)$ за $t = 2, 4, 7$.

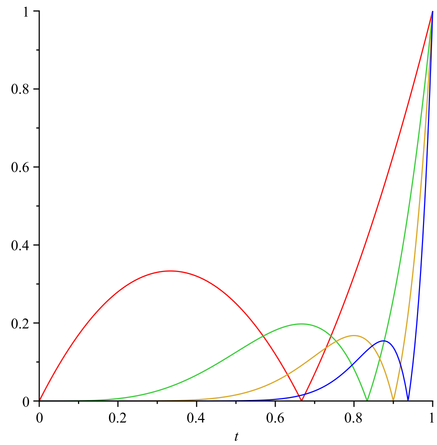
Пример 3.9 *Ще изследваме за сходимост редицата от функции* $f_n(t) = t^n - t^{n+1} + t$ *в пространствата* $C_{[0,1]}$ *и* $C^{(1)}_{[0,1]}$.

За всяко $t \in [0,1]$ е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} \left(t^n - t^{n+1} + t\right) = t = f(t)$. Търсим

$$\max_{t\in[0,1]} \left|t^n - t^{n+1} + t - t\right| = \max_{t\in[0,1]} \left|t^n - t^{n+1}\right|.$$

В Пример 3.9 получихме

$$\max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \left| f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) - f\left(\frac{n}{n+1}\right) \right| = \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \right| \to 0,$$



Фигура 28: $|nt^{n-1} - (n+1)t^n|$

от където следва $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{C_{[0,1]}}(f_n, f) = 0$.

Остава да намерим $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{[0,1]} |f_n'(t) - f'(t)|$. От $|f_n'(1) - f'(1)| = 1$ (Фигура 28) получаваме, че редицата от функции $f_n(t) = t^n - t^{n+1} + t$ не е сходяща в $C^{(1)}_{[0,1]}$.

Проверете, че редицата от функции в Пример 3.9 е сходяща в $C^{(1)}_{[0,a]}$ за всяко $0 < a < 1$.

Твърдение 3.15 *Докажете, че* $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ *в* $\mathbb{R}^m_p$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ *тогава и само тогава, когато за всяко* $k = 1, \dots m$ *е изпълнено* $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$.

Доказателство: Ще разгледаме случая, когато $p < \infty$.

($\Rightarrow$) Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ и $\varepsilon > 0$. От сходимостта на редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \ge N$ е изпълнено

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)} - x_k|^p\right)^{1/p} = \rho_p(x^{(n)}, x) < \varepsilon,$$

от където веднага следва $|x_k^{(n)} - x_k| < \varepsilon$ за всяко $k = 1, \dots m$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$.

($\Leftarrow$) Нека е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ за всяко $k = 1, \dots m$ и $\varepsilon > 0$. За всяко $k = 1, \dots m$ съществува $N_k \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \ge N_k$ е изпълнено $|x_k^{(n)} - x_k| < (\varepsilon/m)^{1/p}$. Тогава за всяко $n \ge \max\{N_k : k = 1, \dots m\}$ е в сила

$$\rho_p(x^{(n)}, x) = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)} - x_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Случая за $p = \infty$ се доказва аналогично. $\square$

Твърдение 3.16 *Докажете, че ако* $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ *в* ℓ_p, $1 \le p < \infty$, *то за всяко* $k \in \mathbb{N}$ *е изпълнено* $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$.

Доказателство: Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ и $\varepsilon > 0$. От сходимостта на редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \ge N$ е изпълнено

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p\right)^{1/p} = \rho_p(x^{(n)}, x) < \varepsilon,$$

от където веднага следва $|x_k^{(n)} - x_k| < \varepsilon$ за всяко $k = 1, \ldots, \infty$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$. $\square$

Задачи.

Задача 1. Ако $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$, изследвайте за сходимост редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространствата ℓ_∞, ℓ_p, c_0, ℓ^0 и намерете границата ѝ ако съществува:

$$1.1)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \ ; \quad 1.2)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} k, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \ ;$$

$$1.3)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k \le n^2 \\ 0, & k > n^2 \end{cases} \ ; 1.4)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^\alpha}, & k \le n^3 \\ 0, & k > n^3 \end{cases} \ ;$$

$$1.5)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}, & k \le n^3 \\ 0, & k > n^3 \end{cases} \ ; 1.6)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{k^3+1}}, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \ ;$$

$$1.7)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} 2, & k = 1 \\ -\dfrac{1}{n}, & 2 \le k \le 2n+1 \\ 0, & k > 2n+1 \end{cases} \ ; \quad 1.8)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ -\dfrac{1}{n}, & 2 \le k \le n+1 \\ 0, & k > n+1 \end{cases} \ ;$$

$$1.9)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+1}, & k = 1, 2 \\ -\dfrac{1}{n+1}, & 3 \le k \le 4n+2 \\ 0, & k > 4n+2 \end{cases} \ ; \quad 1.10)\ \ x_k^{(n)} = \begin{cases} 0, & k \le 2^n \\ \dfrac{1}{k}, & 2^n + 1 \le k \le 2^n + n \\ 0, & k > 2^n + n \end{cases} .$$

Задача 2. Изследвайте за сходимост в пространствата $C_{[0,1]}$ и $C^{(1)}_{[0,1]}$ и намерете границата на редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, ако съществува:

$$2.1)\ \ x_n(t) = t^{1+1/n}, \quad 2.2)\ \ x_n(t) = \frac{2nt}{1+n^2t^2}, \quad 2.3)\ \ x_n(t) = t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right),$$

$$2.4)\ \ x_n(t) = t^n - t^{2n}, \quad 2.5)\ \ x_n(t) = \frac{n}{2n+1}t^{2+1/n}, \quad 2.6)\ \ x_n(t) = \frac{n^2t^{3+1/n}}{(2n+1)(3n+1)}.$$

Задача 3. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е не растяща редица от функции, изобразяващи $[0;1]$ в $[0;1]$. Нека $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ за всяко $x \in [0,1]$ и f е непрекъсната. Докажете, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към f в $M_{[0,1]}$ (пространството от всички ограничени функции).

Задача 4. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от $C_{[0,1]}$ и $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dt = 0$. Нека $K : [0;1] \to [0;1]$ е непрекъсната. Докажете, че редицата $g_n(x) = \int_0^1 K(x,y)f_n(y)dy$ е сходяща в $C_{[0,1]}$.

3.5 Точка на докосване, гранична точка, изолирана точка

Определение 3.7 *Нека (X,ρ) е метрично пространство и $A \subset X$. Казваме, че точката x е точка на докосване за множеството A, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $y \in A \cap B(x,\varepsilon)$.*

Определение 3.8 *Множеството от всички точки на докосване наричаме затваряне на A и бележим с $\overline{A}$.*

По този начин за всяко множество A се определя операцията затваряне, която на множеството A съпоставя $\overline{A}$.

Твърдение 3.17 *Операцията затваряне удовлетворява следните свойства:*
1) $A \subseteq \overline{A}$;
2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
3) ако $A \subset B$, то $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доказателство: 1) Следва от определението за затваряне защото всяка точка от едно множество е и негова точка на докосване.

2) Нека $x \in \overline{\overline{A}}$, тогава за всяка околност $B_x(\varepsilon)$ съществува $x_1 \in \overline{A}$. Нека да положим $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x,x_1)$. В сила е включването $B_{x_1}(\varepsilon_1) \subset B_x(\varepsilon)$. Наистина, ако $z \in B_{x_1}(\varepsilon_1)$, то

$$\rho(z,x) \leq \rho(z,x_1) + \rho(x_1,x) < \varepsilon_1 + \rho(x_1,x) = \varepsilon.$$

От $x_1 \in \overline{A}$, следва че съществува $x_2 \in A \cap B_{x_1}(\varepsilon_1)$ и следователно $x_2 \in B_{x_1}(\varepsilon_1) \subset B_x(\varepsilon)$. Кълбото $B_x(\varepsilon)$ беше избрано произволна и следователно $x \in \overline{A}$.

4) От $x \in \overline{A \cup B}$ следва, че x принадлежи на поне едно от двете множества $\overline{A}$ или $\overline{B}$ и следователно $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Обратното включване следва непосредствено от 1), като се вземе предвид, че $A \subset A \cup B$ и $B \subset A \cup B$. □

Твърдение 3.18 *Точката x е точка на докосване за A, тогава и само тогава, когато съществува редица от точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, сходяща към x.*

Доказателство: Нека x е точка на докосване за A. Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува $x_n \in A$, така че $\rho(x_n, x) < 1/n$. Следователно $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Обратно, нека съществува $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, така че $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава съществува $N = N(\varepsilon)$, така че $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ за всяко $n \geq N$. Следователно x е точка на докосване за A. □

Пример 3.10 *Нека разгледаме множествата $(0,1)$ и $(0,1/2)\bigcup\{1\}$.*

За двете множества точката 1 е точка на докосване. За първото множество можем да изберем редицата $\{1 - 1/n\}_{n=1}^{\infty}$, а за второто множество можем да изберем стационарната редица $\{1\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 3.9 *Казваме, че точката x е гранична точка за множеството A, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $y \neq x$, така че $y \in A \cap B_x(\varepsilon)$.*

В Пример 3.10 точката 1 е гранична точка за първото множество, но не е гранична точка за второто множество.

Лесно се съобразява, че една точка x е точка на докосване за A, ако или $x \in A$ или x е гранична точка за A.

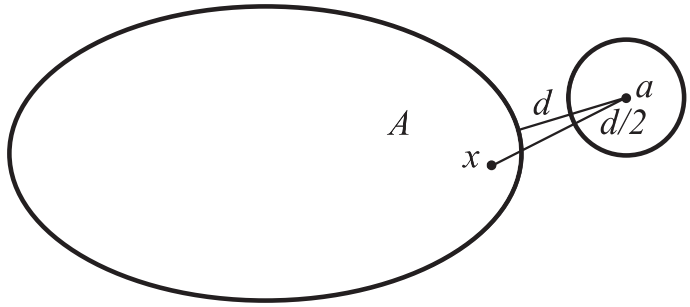
Определение 3.10 *Казваме, че точката a е изолирана точка за множеството A, ако съществува $\varepsilon > 0$ така че кълбото $B_a(\varepsilon)$ не съдържа други точки от A освен a.*

Лесно се съобразява, че затварянето на едно множество A се състои от изолираните му точки, граничните точки, които принадлежат на A и граничните точки които не принадлежат на A.

Твърдение 3.19 *Нека (X, ρ) е метрично пространство и $A \subset X$. Точката $a \in A$ е изолирана точка за множеството A тогава и само тогава, когато* $\mathrm{dist}(a, A\backslash\{a\}) > 0$.

Доказателство: Нека a е изолирана точка за A, тогава съществува $\varepsilon_0 > 0$, така че $B_a(\varepsilon_0)$ не съдържа други точки от A освен a. Следователно за всяко $x \neq a$ и $x \in A$ е в сила неравенството $\rho(a, x) \geq \varepsilon_0 > 0$ и следователно $\mathrm{dist}(a, A\backslash\{a\}) > 0$.

Нека сега $\mathrm{dist}(a, A\backslash\{a\}) = d > 0$. Да изберем $\varepsilon = d/2$. Тогава за всяко $x \in B_x(\varepsilon)$ е изпълнено $\rho(a, x) < \varepsilon = d/2 < d$ и следователно $x \notin (A\backslash\{a\})$. (Фигура 29) □



Фигура 29: Изолирана точка

4 Отворени и затворени множества

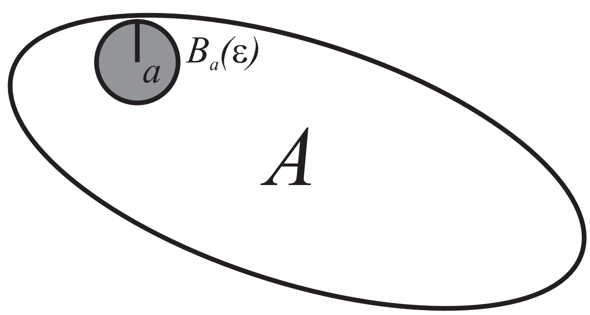
4.1 Отворени множества

Определение 4.1 *Нека $A \subset X$. Казваме, че точката $x \in A$ е вътрешна точка за A, ако съществува $r > 0$, така че $B_x(r) \subset A$. Множеството от всички вътрешни точки на множеството A означаваме с* $\operatorname{int} A$.

Ако x е вътрешна точка за A, то x е вътрешна точка за всяко B, което удовлетворява $A \subset B$.

Определение 4.2 *Казваме, че множеството A е отворено, ако се състои само то вътрешни точки.*

Еквивалентно изказване на Определение 4.2 е че множеството A е отворено, ако всяка точка от $a \in A$ съдържа и цяло кълбо с център a, т.е. за всяко $a \in A$ съществува $\varepsilon > 0$, така че $B_a(\varepsilon) \subseteq A$ (Фигура 30).



Фигура 30: Отворено множество

Пример 4.1 *Празното множество $\emptyset$ и цялото пространство X са отворени множества.*

Пример 4.2 *В метричното пространство X, снабдено с дискретната метрика, всяко множество е отворено.*

Нека A е произволно подмнежество на дискретното метричо пространство. Тогава за всяко $a \in A$, ако изберем $\varepsilon = 1/2$, то множеството $B_a(\varepsilon)$ се съдържа в A, защото се състои само от точката a.

Пример 4.3 *Множеството $\mathbb{Q}$ не е отворено в $\mathbb{R}$, разглеждано с метриката $\rho(x, y) = |x - y|$, но е отворено спрямо дискретната метрика.*

Наистина ако $x \in \mathbb{Q}$ и $r > 0$, тогава за достатъчно голямо $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $x < x + \sqrt{2}/n < x + r$. Следователно $x + \sqrt{2}/n \in B(x, r)$, но $x + \sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$. В случая на дискретна метрика за всяко $x \in \mathbb{Q}$ отвореното кълбо $B(x, 1/2) = \{x\} \subset \mathbb{Q}$, т.е. Q е отворено в $\mathbb{R}$.

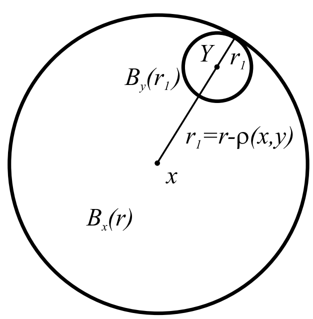
Определение 4.3 *Околност на точката x наричаме всяко отворено множество A, което съдържа x.*

Твърдение 4.1 *Нека X е метрично пространство. Тогава всяко отворено кълбо $B_x(r)$ е отворено множество.*

Доказателство: Нека $y \in B_x(r)$. Тогава $r_1 := r - \rho(x, y) > 0$. За всяко $z \in B_y(r_1)$ от неравенството на триъгълника получаваме

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + r_1 = r,$$

което показва, че $z \in B_x(r_1)$ т.е. $B_y(r_1) \subset B_x(r)$ и y е вътрешна точка за $B_x(r)$. $\square$

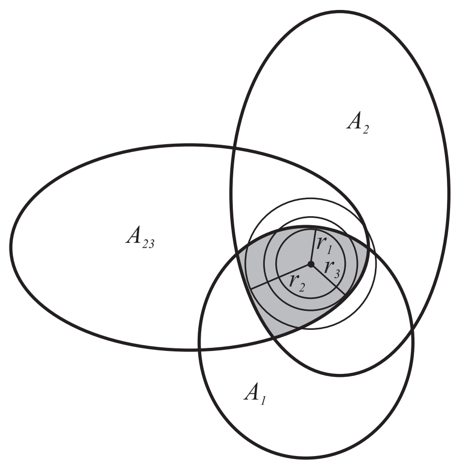


Фигура 31: Отворено кълбо

Пример 4.4 *Всеки интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ е отворено множество в $\mathbb{R}$. Интервалите $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ и $\mathbb{Q}$ не са отворени множества в $\mathbb{R}$.*

Твърдение 4.2 *Нека (X, ρ) е метрично пространство.*
1) Сечението на краен брой отворени множества $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ е отворено множество;
2) Обединението на произволна фамилия от отворени множества $A_\gamma \subseteq X$, $\gamma \in \Gamma$ е отворено множество.

Доказателство: 1) Нека $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Следователно съществуват $r_i > 0$, такива че $B_x(r_i) \subset A_i$ за $1 \leq i \leq n$. Нека $r = \min\{r_i : 1 \leq i \leq n\}$. Тогава $B_x(r) \subset \cap_{i=1}^{n} A_i$ (Фигура 32).



Фигура 32: Сечение на краен брой отворени множества

2) Нека x принадлежи на обединението на отворени множества. Следователно x принадлежи на поне едно от множествата, например A . От това, че A е отворено следва, че x е вътрешна точка за A и следователно е и вътрешна точка за обединението. $\square$

Ще покажем се един пример, че сечението на безкраен брой отворени множества може да не бъде отворено множество.

Пример 4.5 *Нека да разгледаме множествата $(0, 1 + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Лесно се вижда, че $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1+1/n) = (0, 1]$. За точката $1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1+1/n)$ не съществува отворен интервал с център 1, който да се съдържа целият в $(0, 1]$ и следователно $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1 + 1/n) = (0, 1]$ не е отворено множество.

Твърдение 4.3 *Множеството $\mathrm{int}A$ е отворено множество и то е най-голямото отворено множество, което се съдържа в A.*

Нека да поясним, че с „то е най-голямото отворено множество, което се съдържа в A" разбираме, че ако B е отворено подмножество, което се съдържа в A, то $B \subseteq \mathrm{int}A$.

Доказателство: Нека $x \in \mathrm{int}A$. От факта, че x е вътрешна точка за A следва, че $B_x(r) \subset A$ за някое $r > 0$. Съгласно Твърдение 4.1 всяка точка от $B_x(r)$ е вътрешна точка за $B_x(r)$ и следователно е вътрешна точка за A, което ни дава, че $B_x(r) \subset \mathrm{int}\ A$.

Ако $B \subset A$ е произволно отворено множество, то следва, че всяка точка от B е вътрешна точка за A и следователно $B \equiv \mathrm{int}B \subset \mathrm{int}A$. □

Пример 4.6 *Множеството $A = \{f \in C_{[a,b]} : |f(x)| < K\}$ е отворено множество в $C_{[a,b]}$.*

4.2 Затворени множества

Определение 4.4 *Казваме, че множеството A е затворено, ако $A = \overline{A}$.*

Пример 4.7 *Затвореното кълбо $B_x[r]$ е затворено множество.*

Наистина, нека y е точка на докосване за $B_x[r]$. Следователно съществува редица $\{y_n\} \subset B_x[r]$, сходяща към y. От неравенството на триъгълника

$$\rho(y, x) \leq \rho(y, y_n) + \rho(y_n, x) \leq \rho(y, y_n) + r \to r,$$

следва че $y \in B_x[r]$. □

Нека отбележим, че затварянето на отвореното кълбо $B_x(r)$ не винаги съвпада с $B_x[r]$. Наистина, нека разгледаме дискретното пространство X, съдържащо поне две точки. Тогава $\overline{B_x(1)} = \{x\} \neq X = B_x[1]$.

Едно множество в метрично пространство може да бъде нито отворено, нито затворено. Например $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ или $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. От друга страна, едно множество може до бъде както затворено така и отворено. В дискретното пространство всяко множество е както отворено, така и затворено. За всяко метрично пространсто X множествата X и $\emptyset$ са както затворени, така и отворени множества.

Пример 4.8 *Всеки интервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$ е затворено множество в $\mathbb{R}$.*

Пример 4.9 *Множеството $A = \{f \in C_{[a,b]} : |f(x)| \leq K\}$ е затворено множество в $C_{[a,b]}$.*

Пример 4.10 *Нека е (X, ρ) метрично пространство. Всяко множество $A \subset X$, състоящо се от краен брой точки е затворено.*

Твърдение 4.4 *Подмножеството $A \subset X$ е отворено тогава и само тогава, когато неговото допълнение A^c е затворено ($A^c = X \backslash A$).*

Доказателство: Ако $x \in A$ то x е или точка на докосване за A^c, или x е вътрешна точка за A, но в никакъв случай и двете едновременно. Следователно, ако A е отворено, неговите точки не могат да бъдат точки на докосване за A^c. От тук получаваме, че всички точки на докосване за A^c принадлежат на A^c. Обратно, ако A^c е затворено, то точките на A не могат да бъдат точки на докосване за A^c. Следователно те са вътрешни точки за A. □

Твърдение 4.5 *Нека X е метрично пространство. Тогава*
а) Обединението на краен брой затворени множества $A_1, \ldots, A_n$ е затворено.
б) Сечението на произволна фамилия от затворени множества е затворено.

Доказателство: а) Нека $A = \cup_{i=1}^n A_i$. Тогава $A^c = \cap_{i=1}^n A^c$ е отворено според Твърдение 4.2 и следователно A е затворено според Твърдение 4.4.
б) Нека $A = \cap_\alpha A_\alpha$. Тогава $A^c = \cup_\alpha A_\alpha^c$ е отворено според Твърдение 4.2 и следователно A е затворено според Твърдение 4.4. □

Ще илюстрираме Твърдение 4.5 с два примера.

Пример 4.11 *Нека разгледаме редицата от затворени множества $[0, 1 - 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Множеството $\bigcup_{n=1}^\infty [0, 1 - 1/n] = [0, 1)$ не е затворено множество.*

Пример 4.12 *Нека разгледаме редицата от затворени множества $[, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Множеството $\bigcap_{n=1}^\infty [, +\infty) = \emptyset$, което е затворено множество.*

Твърдение 4.6 *Затварянето $\overline{A}$ на множеството A е затворено множество и то е най-малкото затворено множество, съдържащо A.*

Нека да поясним, че с „то е най-малкото затворено множество, което съдържа A" разбираме, че ако B е затворено множество, което съдържа в A, то $\overline{A} \subseteq B$.

Задачи

Задача 1: Докажете, че във всяко метрично пространство (X, ρ) всяко отворено множество $S \subset X$ е обединение на отворени кълба $S = \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha, r_\alpha)$, където $x_\alpha \in S$ и $r_\alpha > 0$ за всяко α от някое индексно множество A.
Задача 2: Докажете че $\text{int } (\text{int } A) = \text{int } A$.
Задача 3: Докажете че $\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset$ и $\text{int } (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \emptyset$.
Задача 4: Дайте пример в $\mathbb{R}$ на:
а) безкрайна фамиля $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от непразни взаимно непресичащи се затворени множества $F_\alpha \cap F_\beta = \emptyset$, за $\alpha \neq \beta$, чието обединение не е затворено;
б) безкрайна фамиля $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от отворени множества, чието сечение не е отворено.
в) редица от затворени множества $\{F_i\}_{i=1}^\infty$, такива че $F_{i+1} \subset F_i$ за всяко $i \in \mathbb{N}$ и $\cap_{i=1}^\infty F_i = \emptyset$.
Задача 5: Нека $A = \{x \in C_{[0,1]} : \sin(t) < x(t) < 1 - t\}$. Докажете, че множеството A е отворено.

Задача 6: Нека $A = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^0 : 0 < x_n < 1, n \in \mathbb{N}\}$. Отворено или затворено е множеството A разглеждано като подмножество на ℓ_∞, ℓ^0.

Задача 7: Нека $A = A = \{x \in C_{[0,+\infty)} : x(t) > 0\}$. Отворено или затворено е множеството A? Намерете $\text{int}A$.
Задача 8: Нека разгледаме $x(t) = \sin(\pi t)$ и $y(t) = \sin(\pi t)$, като елементи на метричното пространство $C_{[0,1]}$. Намерете $r_x, r_y > 0$, така че $B_x[r_x] \bigcap B_y[r_y] = \emptyset$.
Задача 9:Конструирайте редица от затворени, непресичащи се кълба с радиус $1/10$, които се съдържат в единичното кълбо на ℓ_2
Задача 10: Дайте пример на метрично пространство с безброй много елементи, в което всяко множество е едновременно отворено и затворено. Дайте пример на метрично пространство (X, ρ) съдържащо едновременно две множества $A, B \subset X$, такива че A е едновременно отворено и затворено, а B не е нито отворено, нито затворено.
Задача 11: Нека (X, ρ) е метрично пространство. Дефинираме $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$ и наричаме граница на A.
а) Докажете, че множествата ∂A и $\partial A \backslash X$ са затворени.
б) Докажете, че $\partial X = \overline{X} \backslash \text{int } X$.
Задача 12: Намерете ∂A за:
а) Всяко подмножество A на дискретното метрично пространство;
б) $A = [0, 1) \subset \mathbb{R}$
в) $A = \{(x, 0) \subset \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.
Задача 13: За всяко от множествата кажете дали е отворено или затворено и намерете ∂A, $\text{int } A$, $\overline{A}$.
а) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) > (1 + x^2 + y^2) - 1\}$;
б) $\{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\}$;
в) $\{(x, 1/x) : x > 0\}$;
г) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$.
Задача 14: Нека (X, ρ) е метрично пространство и нека $\mathcal{H}X$ е съвкупността от всички непразни, ограничени, затворени подмножества на X. Нека $x \in X$, $F \in \mathcal{H}X$. Разстояние между x и F наричаме числото $\text{dist}(x, F) = \inf\{\rho(x, y) : y \in F\}$.
а) Покажете, че $\text{dist}(x, F) = 0$ тогава и само тогава, когато $x \in F$.
б) Докажете неравенството $\text{dist}(x, F) \leq \rho(x, y) + d(y, F)$ за всеки $x, y \in X$ и $F \in \mathcal{H}X$.
в) Нека разгледаме функцията $\rho_{\mathcal{H}X} : \mathcal{H}X \times \mathcal{H}X \to \mathbb{R}$, дефинирана чрез:

$$\rho_{\mathcal{H}X}(F, G) = \max\{\sup\{\text{dist}(x, G) : x \in F\}, \sup\{\text{dist}(y, F) : y \in G\}\}.$$

Покажете, че $\rho_{\mathcal{H}X}$ е метрика $\mathcal{H}X$.
Задача 15: Докажете, че c_0 затворено подпространство в ℓ_∞ и че c_0 е затварянето на c_{00}.
Задача 16: Коструирайте пример на множество в $\mathbb{R}$: без точки на сгъстяване, с точно една точка на сгъстяване, с точно две точки на сгъстяване. Намерете точките на сгъстяване за множеството $A = \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

5 Пълни метрични пространства

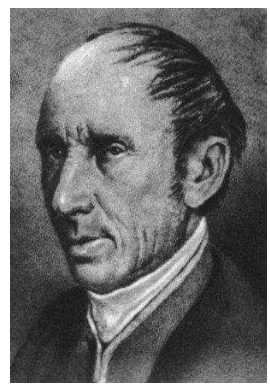
Важен елемент от Математическия анализ играе фактът, че всяка фундаментална редица от реални числа е сходяща. Аналогично на числовите редици се дефинира понятието фундаментална редица в произволно метрично пространство.

5.1 Фундаментални редици

Недостатъкът на определението за сходимост на числова редица е, че трябва да се знае границата ѝ, за да се приложи определението. Следващата теорема дава критерии за изследване на сходимост само чрез членовете на редицата.

Определение 5.1 *Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в метричното пространство (X, ρ). Казваме, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица или редица на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu \in \mathbb{N}$ такова, че за всеки $m, n \geq \nu$ е изпълнено неравенството $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Огустен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy 1789–1857) е френски математик. Първи учител на Огюстен Коши е бил баща му, който занимава сина си с история и древни езици и го кара да изучава античните автори в оригинал. През 1802 г. Коши постъпва в l'Ecole Centrale du Pantheon в Париж, където е изучавал главно древните езици. А през 1805 г. постъпва в Ecole Polytechnique и в l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees през 1807. Дипломира се като инженер и отива да рабити в Cherbourg през 1810. През 1813 се връща в Париж и по настояване на Лагранж и Лаплас започва да се занимава с математика. През 1816 г. е приет за член на Парижката академия на науките и преподава в Ecole Polytechnique до 1930, когато напуска, в знак на протест с новоприетия закон, да се дава клетва за вярност към правителството. Работи в Швейцария, Кралство Сардиния. През 1938 отказва предложената му позиция на ректор на College de France в знак на протест, че не е отменен закона, да се дава клетва за вярност към правителството. Връща се на работа Ecole Polytechnique през 1948, чак когато законът е отменен. Умира през 1857.



Пример 5.1 *В дискретното метрично пространство, фундаментални са само редиците, които от известно място нататък стават стационарни.*

Твърдение 5.1 *Нека (X, ρ) е метрично пространство. Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ е фундаментална редица, то тя е ограничена.*

Доказателство: Нека $\varepsilon = 1$. От условието, че $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица следва, че съществува $k \in \mathbb{N}$, така че $\rho(x_n, x_k) < 1$ за всяко $n \geq k$.

Нека $r = \max\{\rho(x_1, x_k), \dots, \rho(x_{k-1}, x_k), 1\}$. Тогава $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_{x_k}[r]$. □

Теорема 5.1 *Нека (X, ρ) е метрично пространство. Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ е сходяща редица, то тя е фундаментална.*

Доказателство: Нека $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. За сяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq \nu$ е изпълнено неравенството $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$. Тогава за всеки две числа $m, n \geq \nu$ са в сила неравенствата

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следователно редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална. □

Определение 5.2 *Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в X и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ е растяща редица от естествени числа. Тогава редицата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ наричаме подредица на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Теорема 5.2 *Нека (X, ρ) е метрично пространство нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица в X. Ако съществува сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, то и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.*

Доказателство: Нека редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална и съществува нейна сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогава съществува $x \in X$, така че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu \in \mathbb{N}$ и за всеки $n, m, n_k \geq \nu$ е изпълнено:

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \ \text{ и } \ \rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2,$$

от където получаваме

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница $x \in X$. □

Определение 5.3 *Метричното пространство (X, ρ) се нарича пълно, ако всяка фундаментална редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ е сходяща т.е. съществува $x \in X$, така че да е в сила $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.*

Пример 5.2 *Дискретното метрично пространство е пълно.*

Твърдението следва от факта, че фундаментални редици в него са само константните редици.

Пример 5.3 $\mathbb{R}$ *е пълно.*

Пример 5.4 $\mathbb{R}^m_p$, $1 \leq p \leq \infty$ *е пълно.*

I) Нека $1 \leq p < \infty$.
Нека $\{x^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ е фундаментална редица в $\mathbb{R}_p^m$. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, така че

$$(\rho_p(x^{(n)}, x^{(s)}))^p = \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)} - x_k^{(s)}|^p < \varepsilon^p$$

за всички $n, s \geq \nu$. Тогава за всяко $k = 1, \ldots m$ е изпълнено неравенството $|x_k^{(n)} - x_k^{(s)}| < \varepsilon$ за всички $n, s \geq \nu$. Следователно $\{x_k^{(s)}\}$ е фундаментална числова редица за всяко $k = 1, \ldots n$ и следоватено е сходяща. Нека положим $x_k = \lim\limits_{s\to\infty} x_k^{(s)}$ и $x = \{x_k\}_{k=1}^m$.

Ще покажем, че редицата $\{x^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ е сходяща и има за граница $x = \{x_k\}_{k=1}^m$. Наистина за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, така че $|x_k - x_k^{(s)}| < \dfrac{\varepsilon}{m^{1/p}}$ за всяко $s \geq N$ и всяко $k = 1, \ldots m$. Тогава

$$\rho_p(x, x^{(s)}) = \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k - x_k^{(s)}|^p\right)^{1/p} < \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon^p}{m}\right)^{1/p} = \varepsilon.$$

II) Нека $p = \infty$.
Доказва се по аналогичен начин.

Пример 5.5 *$C_{[a,b]}$ е пълно.*

Нека $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица в $C_{[a,b]}$. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, така че

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon/2 \tag{20}$$

за всеки $m, n \geq \nu$ и всяко $t \in [a, b]$. Следователно редицата $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в интервала $[a, b]$. Добре известно е, че нейната поточкова граница $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ е непрекъсната функция. Извършвайки граничен преход по $m \to \infty$ в (20), получаваме $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Пример 5.6 *ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ е пълно.*

I) Нека първо разгледаме случая когато $1 \leq p < \infty$.
Нека $\{x^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ е фундаментална редица в ℓ_p. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, така че неравенството

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(s)}|^p < \varepsilon^p \tag{21}$$

е изпълнено за всички $m, s \geq \nu$. Тогава за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $|x_k^{(m)} - x_k^{(s)}| < \varepsilon$ за всички $m, s \geq \nu$. Следователно $\{x_k^{(s)}\}$ е фундаментална числовао редица за всяко $k \in \mathbb{N}$ и следователно е сходяща.

Нека положим $x_k = \lim_{s\to\infty} x_k^{(s)}$ и $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$.

Трябва да докажем, че $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \ell_p$ и $\rho(x^{(n)}, x) \to 0$.

От (21) следва, че за всяко фиксирано $M \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(m)} - x_k^{(s)}|^p < \varepsilon^p,$$

тъй като в последната сума участват само краен брой събираеми. Ако фиксираме m и направим граничен преход по $s \to \infty$ получаваме

$$\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(m)} - x_k|^p \leq \varepsilon^p.$$

Последното неравенство е вярно за всяко $M \in \mathbb{N}$. След граничен преход по $M \to \infty$ получаваме неравенството

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k|^p \leq \varepsilon^p. \tag{22}$$

От неравенството $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ следва неравенството

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} + x_k - x_k^{(m)}|^p \leq 2^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)}|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(m)}|^p \right) < \infty$$

и следователно $x \in \ell_p$. Тъй като $\varepsilon > 0$ беше избрано произволно, намираме

$$\rho_p(x, x^{(m)}) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Пример 5.7 *Пространството $C^2_{[-1,1]}$, което се състои от всички непрекъснат функции в интервала $[-1,1]$ с метрика $\rho(f,g) = \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - g(t))^2 dt \right)^{1/2}$ не е пълно.*

Нека разгледаме непрекъснатите функции:

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -1/n \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

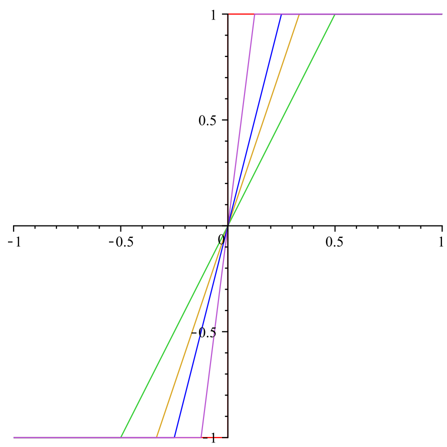
Редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална, понеже $\displaystyle\int_{-1}^{1}(f_n(t)-f_m(t))^2dt \leq \frac{2}{\min\{m,n\}}$. Да допуснем, че редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към някоя функция $f \in C^2_{[-1,1]}$. Нека дефинираме функцията:

$$g(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогава от неравенството на Минковски получаваме:

$$0 < \left(\int_{-1}^{1}(f(t)-g(t))^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_{-1}^{1}(f(t)-f_n(t))^2\right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1}(f_n(t)-g(t))^2\right)^{1/2}.$$

При $n \to \infty$ дясната част на неравенството клони към нула, което е противоречие.



Фигура 33: Редицата f_n, за $n = 2, 3, 4, 8$ и функцията g

Теорема 5.3 *Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство и $(Y\rho)$ е негово подпространство. Тогава (Y, ρ) е пълно, тогава и само тогава, когато Y е затворено.*

Доказателство: $(\Leftarrow)$ Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица в (Y, ρ). Тогава $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица в (X, ρ) и от пълнотата на (X, ρ) следва, че съществува $x \in X$, така че $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. От условието, че $Y \subset X$ е затворено следва, че $x \in Y$ и следователно (Y, ρ) е пълно.

$(\Rightarrow)$ Нека редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица в (Y, ρ), така че $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$. От сходимостта на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална в (X, ρ) и следователно е фундаментална и в (Y, ρ). От пълнотата на (Y, ρ) следва, че съществува $y \in Y$, така че $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Тогава от Твърдение 3.8 следва, че $x = y$. □

Пример 5.8 *Метричните пространства $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ са пълни. Метричното пространство $c_{00} \subset c_0$ не е пълно.*

Теорема 5.4 *Нека (X, ρ) е метрично пространство. Следните условия са еквивалентни:*
а) (X, ρ) е пълно;
б) Всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяваща условието

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_{n+1}, x_n) < \infty, \tag{23}$$

е сходяща;
в) Всяка фундаментална редица има сходяща подредица.

Доказателство: (а)$\Rightarrow$(б) Нека (X, ρ) е пълно и $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е редица със свойството (23). За да докажем (б) е достатъчно да покажем, че $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е фундаментална. За всяко $N \in \mathbb{N}$ полагаме

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \rho(x_{n+1}, x_n).$$

От (23) получаваме $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$ и следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N(\varepsilon)$, така че $R_{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. Редицата $\{R_N\}_{N=1}^\infty$ е намаляваща, следователно за всеки $m > n > N(\varepsilon)$ е изпълнено

$$\rho(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho(x_{k+1}, x_k) = R_n \leq R_{N(\varepsilon)} < \varepsilon,$$

т.е. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е фундаментална.

(б)$\Rightarrow$(в) Нека $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ е фундаментална редица. За всяко $n > 1$ избираме $\nu(n) > 1$, така че

$$\rho(x_i, x_j) < 1/2^n \tag{24}$$

за всеки $i, j \geq \nu(n)$. Ще дефинираме индуктивно редицата от естесвени числа k_n. Нека $k_1 \geq \nu(1)$. Ако сме избрали k_n, то избираме $k_{n+1} = \max\{k_n+1, \nu(n+1)\}$. От дефиницията на редицата $k_1 < k_2 < \dots$ и (24) следва, че $\rho(y_{k_n+1}, y_{k_n}) < 1/2^n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Дефинираме редицата $x_n = y_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно е изпълнено $\sum_{n=1}^\infty \rho(y_{k_n+1}, y_{k_n}) < \sum_{n=1}^\infty 1/2^n = 1$ и тогава от (б), следва че редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е сходяща.

(в)$\Rightarrow$(а) Следва непосредствено от Теорема 5.2. $\square$

В реалния анализ се използва широко теоремата за вложените интервали. В теорията на метричните пространства аналогична роля играе теоремата за вложените кълба.

Теорема 5.5 *Метричното пространство (X, ρ) е пълно тогава и само тогава, когато всяка редица от вложени едно във друго затворени кълба с радиуси, клонящи към нула, има непразно сечение.*

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство и нека $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от вложени едно в друго затворени кълба с радиуси, клонящи към нула, т.е. $B_n = B_{x_n}[r_n]$, $B_n \subseteq B_{n-1}$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. От неравенството $\rho(x_n, x_{n+p}) < r_n$ за всеки $n, p \in \mathbb{N}$ следва, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална. От това, че пространството (X, ρ) е пълно, следва че съществува $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Ще покажем, че $x \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Наистина, $x_m \in B_n$ за всяко $m \geq n$. Следователно x е гранична точка за всяко от затворените кълба B_n и следователно $x \in B_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$)Нека метричното пространство (X, ρ) удовлетворява условието, че всяка редица от вложени едно в друго затворени кълба с радиуси, клонящи към нула има непразно сечение и нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна фундаментална редица. Ще докажем, че тя е сходяща. За целта ще конструираме индуктивно нейна подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$:
1) Съществува $n_1 \in \mathbb{N}$, така че $\rho(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ за всяко $n \geq n_1$. Съществува $n_2 \in \mathbb{N}$, така че $\rho(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$ за всяко $n \geq n_2$.
2) Ако сме избрали n_k, така че $\rho(x_n, x_{n_k}) < 1/2^k$ за всяко $n \geq n_k$, то съществува $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, така че $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < 1/2^{k+1}$ за всяко $n \geq n_{k+1}$.
Нека дефинираме кълбата $B_k = \{x \in X : \rho(x, x_{n_k}) \leq 1/2^{k-1}\}$, които са вложени едно в друго. Наистина ако $x \in B_{k+1}$, тогава

$$\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq 1/2^k + 1/2^k = 1/2^{k-1}, \tag{25}$$

т.е. $x \in B_k$. Следователно съществува $x \in \cap_{k=1}^{\infty} B_k$. От (25) следва че $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ и прилагайки Теорема 5.2 получаваме, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

Лесно може да се докаже, че в Теорема 5.5 множеството $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ се състои от единствена точка.

Задачи

Задача 1: Пространството $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ не е пълно. Покажете, че редицата $x_n = \max\{k/n : k \in \mathbb{N}, (k/n)^2 < 2\}$ е фундаментална, но $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin \mathbb{Q}$.
Задача 2: Докажете, че пространството (R, ρ) не е пълно, където:
а) $\rho(x, y) = |\text{arctg } x - \text{arctg } y|$;
б) $\rho(x, y) = \text{arctg}|x - y|$; в) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$.
Задача 3: Пълно ли е пространството $(\mathbb{N}, \rho)$, където $\rho(n, m) = \dfrac{|n - m|}{n.m}$.
Задача 4: Докажете, че пространството (X, ρ) не е пълно, където, X е множеството от всички затворени отсечки $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ и:
а) $\rho([a, b], [c, d]) = |a - c| + |b - d|$;
б) $\rho([a, b], [c, d]) = |a - b| + |c - d| - 2\text{diam}([a, b] \cap [c, d])$.
Задача 5:Докажете, че сечението на затворените кълба в Теорема 5.5 се състои от единствена точка.
Задача 6: Нека (X, ρ) е пълно метричното пространство и нека $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от затворени множества, такива че $M_{n+1} \subseteq M_n$, за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(M_n) = 0$.

Докажете, че $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$ и множеството $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ се състои от единствена точка.
Задача 7: Дайте пример в $\mathbb{R}$ на редица от затворени множества $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, такива че $F_{i+1} \subset F_i$ за всяко $i \in \mathbb{N}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$.
Задача 8: Покажете че пространството

$$A = \{x \in C_{[a,b]} : x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t), x_1, x_2 \in C_{[a,b]}\},$$

където x_1, x_2 са две произволно избрани, фиксирани функции, е пълно.
Задача 9: Покажете, че пространството (ℓ^0, d) е пълно, където:
а) $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - x_k|}{1 + |x_k - x_k|}$;
б) $d(x,y) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_k - x_k|}{1 + |x_k - x_k|}$.
Задача 10: Покажете, че пространствата $C^1_{[a,b]}$ и $M_{[a,b]}$ са пълни.
Задача 11: Покажете, че пространството $C_{(\infty,\infty)}$, състоящо се от всички ограничени и непрекъснати функции и снабдено с метриката $\rho(f,g) = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t) - g(t)|$ е пълно.
Задача 12: Докажете, че ако $(X\rho)$ е пълно пространство без изолирани точки, то $(X\rho)$ е неизброимо.
Задача 13: Докажете, че ако $(X\rho)$ е пълно пространство, то $B_x[r]$ също е пълно метрично пространство.

6 Сепарабелни метрични пространства, Теорема на Бер за категориите

Верността на много резултати от математическия анализ зависи от пълнотата на пространствата. Това обяснява недостатъчността на рационалните числа или на Римановия интеграл и тяхната замяна с реалните числа и с Лебеговия интеграл. Основен инструмент в тази посока се явява Теоремата на Бер за категориите.

6.1 Гъсти множества и сепарабелни метрични пространства

Определение 6.1 *Нека A и B са две множества в метричното пространство X. Казваме, че A е гъсто в B, ако $B \subseteq \overline{A}$. В частност, множеството A се нарича навсякъде гъсто ако $\overline{A} = X$.*

Пример 6.1 *Всяко от множествата $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}^c$ е навсякъде гъсто в $\mathbb{R}$.*

От Определение 6.1 непосредствено следва:

Твърдение 6.1 *Нека (X, ρ) е метрично пространство и $A \subset X$. Тогава A е навсякъде гъсто тогава и само тогава, когато за всяко отворено множество $B \subset X$ е изпълнено $A \cap B \neq \emptyset$.*

Определение 6.2 *Пространство, което има изброимо навсякъде гъсто множество се нарича сепарабелно.*

Пример 6.2 *Дискретното пространство съдържа изброимо навсякъде гъсто множество тогава и само тогава, когато то самото се състои от изброим брой точки.*

Твърдението следва от лесно проверяемото равенство $\overline{M} = M$.

Пример 6.3 *Множеството $\mathbb{Q}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, \ldots, x_n), x_k \in \mathbb{Q}, k = 1, \ldots n\}$ е навсякъде гъсто в $\mathbb{R}^n_p$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Пример 6.4 *Множеството от всички полиноми с рационални коефициенти е навсякъде гъсто в $C_{[a,b]}$.*

Пример 6.5 *$A = \{\{x_k\}_{k=1}^n : x_k \in \mathbb{Q}, k = 1, \ldots n, n \in \mathbb{N}\}$ е навсякъде гъсто в ℓ_2.*

Примери 6.1, 6.3, 6.4 и 6.5 показват, че пространствата $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n_p$, $C_{[a,b]}$ и ℓ_p $1 \leq p < \infty$ са сепарабелни метрични просранства.

Пример 6.6 *ℓ_∞ не е сепарабелно пространство.*

Наистина, нека да разгледаме множеството A от всички редици, състоящи се от 0 или 1. Те образуват множество с мощност котинуум. От друга страна $\rho_\infty(x,y) = 1$ за всеки две $x, y \in A$. Нека да разгледаме съвкупността от всички кълба с център точка от A и радиус 1/2. Тези кълба не се пресичат. Ако едно множество от точки B е навсякъде гъсто в ℓ_∞, то всяко от построените кълба трябва да съдържа поне една точка от B и следовотелно B не може да бъде изброимо.

Задачи

Задача 1: Докажете, че c_{00} е навсякъде гъсто в ℓ_p, за $1 \leq p < \infty$, но не е навсякъде гъсто в ℓ_∞. Докажете, че затварянето на c_{00} в пространството ℓ_∞ е c_0.
Задача 2: Покажете, че пространствата $C_{(-\infty,+\infty)}$ и $M_{[a,b]}$ са пълни, но не са сепарабелни.
Задача 3: Покажете, че пространствата $C^1_{[a,b]}$, c и c_0 са пълни и сепарабелни.
Задача 4: Покажете, че пространството (ℓ^0, ρ) е сепарабелно, където:
а) $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - x_k|}{1 + |x_k - x_k|}$;
б) $\rho(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_k - x_k|}{1 + |x_k - x_k|}$.
Задача 5: Докажете, че ако в метричното пространство (X, ρ) съществуват неизброимо множество A и константа $a > 0$, такива че $\rho(x,y) \geq a$ за всеки две $x, y \in A$, то X е несепарабелно.
Задача 6: Докажете, че множеството от изолираните точки на всяко сеперабелно метрично пространство е най-много изброимо.
Задача 7: Докажете, че ако метричното пространство (X, ρ) удовлетворява условието: всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ съдържа фундаментална подредица, то е сепарабелно.
Задача 8: Докажете, че всяко пълно метрично пространство без изолираните точки е неизброимо.
Задача 9: Докажете, че ако в метричното пространство (X, ρ) съществуват сепарабелно, навсякъде гъсто множество A, то X е сепарабелно.
Задача 10: Нека (X, ρ) е пространството от всички функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, за които множеството

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in [0,1] : f(x) \neq 0\}$$

е най–много изброимо и

$$\rho(f,g) = \left(\sum_{t_k \in \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g)} |f(t_k) - g(t_k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Докажете, че (X, ρ) не е сепарабелно.
Задача 11: Нека $V_{[0,1]}$ е пространството от всички функции с ограничена вариация с метрика

$$\rho(f,g) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|.$$

Докажете, че $V_{[0,1]}$ не е сепарабелно.

6.2 Никъде не гъсти множества

Определение 6.3 *Нека (X, τ) е топологично пространсто и $A \subset X$. Казваме, че A е никъде не гъсто, ако $\overline{A}$ има празна вътрешност.*

Теорема 6.1 *Нека (X, ρ) е метрично пространсто и $A \subset X$. Множеството A е никъде не гъсто, ако за всяко кълбо $B \subset X$ съществува кълбо $B_1 \subset B$, така че $A \cap B_1 = \emptyset$.*

Ако E е никъде не гъсто, то $V = X \backslash \overline{E}$ е навсякъде гъсто в X.

Пример 6.7 *Всяко крайно множество $\{x_i\}_{i=1}^n$ от точки в $\mathbb{R}$ е никъде не гъсто в $\mathbb{R}$.*

Пример 6.8 *$\mathbb{Z}$ е никъде не гъсто в $\mathbb{R}$. Реалната права е никъде не гъста в $\mathbb{R}_2^2$.*

Определение 6.4 *Нека M е подмножество на топологичното пространство (X, τ). Тогава*
1) Казваме, че M е първа категория в X, ако е обединение на изброим брой никъде не гъсти подмножества M_n на X т.е. $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$;
2) Казваме, че M е втора категория в X, ако M не е първа категория.

Пример 6.9 *Всяко изброимо множество $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ от точки в $\mathbb{R}$ е първа категория в $\mathbb{R}$.*

Пример 6.10 *$\mathbb{Q}$ е първа категория в $\mathbb{R}$.*

Пример 6.11 *Всяко отворено множество е втора категория в $\mathbb{R}$.*

Ако B е множество първа категория в X, то и $A \subset B$ е първа категория в X. Всяко изброимо обединение на множества от първа категория е множество първа категория. Всяко затворено множество с празна вътрешност е първа категория.

6.3 Теорема на Бер за категориите

Теорема 6.2 *(на Бер за категориите) Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство. Тогава сечението на произволна изброима съвкупност от отворени навсякъде гъсти множества в X е навсякъде гъсто в X.*

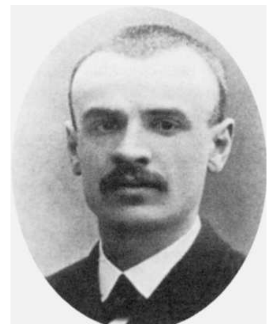
Доказателство: Нека $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ са отворени навсякъде гъсти множества в X. Нека B_0 е произволно не празно отворено множество в X.

Избираме B_1 с радиус $r_1 < 1$, така че $\overline{B_1} \subset V_1 \cap B_0$. Избираме B_2 с радиус $r_1 < 1/2$, така че $\overline{B_1} \subset V_2 \cap B_1$. Ако сме избрали вече отворено кълбо B_{n-1} с радиус r_{n-1}, то поради условието, че V_n е навсякъде гъсто в X можем да изберем B_n с радиус $r_n < 1/n$, така че

$$\overline{B_n} \subset V_n \cap B_{n-1}. \tag{26}$$

Нека да положим $K = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$. От (26) и $r_n < 1/n$ получаваме, че $\overline{B_n}$ е редица от вложени едно в друго затворени кълба с радиуси, клонящи към нула. Следователно $K \neq \emptyset$. По построение $K \subset B_0$ и $K \subset V_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Следователно за всяко отворено множество $B_0 \subset X$ е изпълнено $B_0 \cap (\cap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$. $\square$

Рене–Луис Бер (Reneé–Louis Baire 1874–1932) е френски матемитик, най–известен с Теоремата за категориите, която носи неговото име. Първоначално Теоремата на Бер е публикувана в дисертацията му „Sur les fonctions de variable réelles" (Върху функции с реални променливи) през 1899. Теоремата има множество приложения във Функционалния анализ. Бер произхожда от бедно семейство. Баща му е шивач. Получава стипендия, за да учи в Lycée Lakanal. Той е приет за студент в École Normale Supérieure и в Éole Polytechnique. Той предпочита да учи в École Normale Supérieure. Той се дипломира с отличие след 3 години обучение и продължава за да вземе държавните изпити. На тестовите, Бер се представя най–добре, но на устния изпит се проваля при първото си явяване, понеже не са ясни и пълни обясненията му на дъската. След дипломирането си той става учител. Като учител достига до идеите за граница и прекъснатост, които са основната идея от доктората му. През 1907 става професор в университета в Dijon. Бер работи съвместно с Волтера и Лебег.



Рене-Луис Бер

Следствие 6.1 *Всяко пълно метрично пространство е втора категория, т.е. не може да се представи като обединение на изброимо много никъде не гъсти множества.*

Доказателство: Нека $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица от никъде не гъсти множества. Тогава $V_n = X \backslash \overline{E_n}$ са отворени навсякъде гъсти множества. Следователно $\cap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$ и $X \neq \cup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$, защото

$$X \backslash (\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \backslash \overline{E_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset.$$

$\square$

Следствие 6.2 *Всяко пълно метрично пространтсво без изолирани точки е неизброимо.*

Следствие 6.3 *Всяко отворено множество в пълно метрично пространтсво е втора категория.*

Задачи.

Задача 1. Нека $M \subset X$ е първа категория, където X е пълно метрично пространство. Докажете, че $N = X \backslash \overline{M}$ е навсякъде гъсто в X.

Задача 2. Определете от каква категория на Бер са множествата:

а) $X = \mathbb{R}$, $M = \{x \in X : \sin x = 0\}$;

б) $X = \mathbb{R}$, $M = \{x \in X : 0 \leq \sin x \leq 1\}$;
в) $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, y) \in X : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
г) $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, y) \in X : x^2 + y^2 = 1\}$;
д) $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, y) \in X : x^2 + y^2 = q, q \in \mathbb{Q}\}$;
е) $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, y) \in X : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

Задача 3. Нека $f \in C_{[0,1]}$ е разтяща функция и E е навсякъде гъсто множество в $[0, 1]$. Докажете, че множеството

$$F = \{f(a) : a \in E\}$$

е навсякъде гъсто в $[f(0), f(1)]$.

Задача 4. Нека $f \in C_{[0,1]}$ е разтяща функция и E е никъде не гъсто множество в $[0, 1]$. Докажете, че множеството

$$F = \{f(a) : a \in E\}$$

е никъде не гъсто в $[f(0), f(1)]$.

Задача 5. Нека $\alpha \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$. Докажете, че множеството

$$F = \{n + m.\alpha : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

е навсякъде гъсто в $\mathbb{R}$.

Задача 6. Нека E е никъде не гъсто множество в $[0, 1]$. Докажете, че множеството

$$F = \{f \in C_{[0,1]} : f(x) = a, a \in E\}$$

е никъде не гъсто в $C_{[0,1]}$.

Задача 7. Докажете, че множеството

$$F = \{n.x : n \in \mathbb{N}\}$$

е никъде не гъсто в $C_{[0,1]}$.

Задача 8. Нека A е отворено множество в метричното пространство (X, ρ) и B е множеството от всички външни точки за A. Докажете, че множеството $A \bigcup B$ е навсъкаде гъсто множество.

Задача 9. Нека A е никъде не гъсто множество в метричното пространство (X, ρ). Докажете, че множеството $X \backslash A$ е навсъкаде гъсто множество.

Задача 10. Дайте пример на метрично пространство (X, ρ) и множество A, което е навсякъде гъсто и множеството $X \backslash A$ е навсъкаде гъсто.

6.4 Приложение на теоремата на Бер за категориите за съществуването на непрекъснати никъде недефиренцируеми функции

В началото на 20–ти век повечето математици са вярвали, че непрекъснатите функции имат производна в голяма част от дефиниционната си област. Ампер (Ampère) дори се опитва да даде теоритична обусновка на това предположение през 1806. През 1872 Карл

Вайерщрас (Karl Weierstraß) разтърсва математическата общност като изказва предположението, че това не е вярно. Той конструира функция, която е непрекъсната във всяка точка от $\mathbb{R}$ и в същото време предполага, че не е диференцируема за никоя точка от $\mathbb{R}$. Доказателството на хипотезата на Вайерщрас е направено от Боис и Реймонд (Bois–Reymond) през 1875. Самият Вайерщрас споменава, че подобна идея за конструиране на функция използва Риман (Riemann) в лекциите си още през 1861. Най-раннита известна в момента конструкция на функция с тези свойства е на Бернард Болцано (Bernard Boltzano) публикувана през 1822. Трябва да споменем и примера на Чарлс Селериер (Charles Cellérier), който независимо открива пример на такава функция, но резултата ме е публикуван чак през 1980 посмъртно.

След резултата на Вайерщрас много математици дават своя принос. Учудващо се оказва, че множеството от тези функции е много голяма, то се оказва, че е множество от втора категория за пространството от всички непрекъснати функции. През 1929 Щайнхаус (Steinhaus) поставя въпроса от каква категория е множеството на всички непрекъснати функции, които не са диференцируеми в нито една точка. През 1931 Банах и Мазуеркуевич (Banach, Mazuerkievicz) доказват, че това множество е от втора категория.

Твърдение 6.2 *Ако M е множество първа категория в пълно метрично пространство (X, ρ), то съществува $x \in X \backslash M$ и $X \backslash M$ е втора категория.*

Доказателство: От Теоремата на Бер следва, че X е втора категория. От равенството $X = M \cup (X \backslash M)$ и условието, че множеството M е първа категория, то $X \backslash M$ е втора категория и $X \backslash M \neq \emptyset$, защото обединението на две множества от първа категория е първа категория. $\square$

Твърдение 6.3 *Множеството*

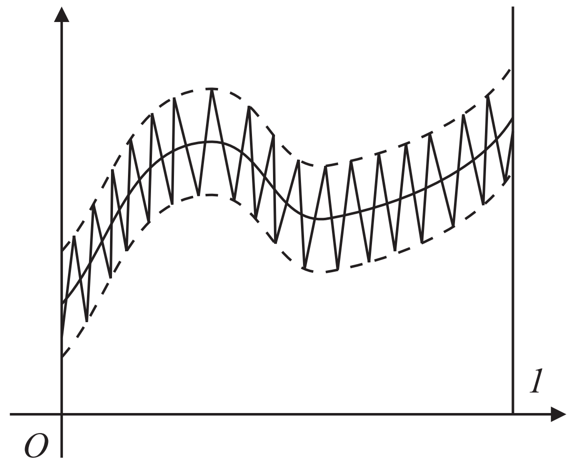
$$M = \left\{ f \in C_{[0,1]} : \begin{array}{c} \textit{съществува точка } \ x^* \in (0,1), \ \textit{така че} \\ \textit{лявата производна } f'_+(x^*) \ \textit{съществува} \end{array} \right\}$$

е първа категория в $C_{[0,1]}$.

Доказателство: Нека означим с M_n множеството от тези непрекъснати функции в $[0, 1]$ за който съществува $x^* \in (0, 1)$, така че

$$|f(x^* + h) - f(x^*)| \leq nh$$

за всяко $h \in [0, 1]$, удовлетворяващо $x^* + h \leq 1$. Очевидно, че ако $f \in M$, то съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $f \in M_n$. Следователно $M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Ако покажем, че всяко M_n е никъде не гъсто в $C_{[0,1]}$ то ще следва, че M е първа категория. За да покажем, че M_n е никъде не гъсто в $C_{[0,1]}$ е достатъчно да покажем, че M_n е затворено с празна вътрешност.



Фигура 34:

Първо ще покажем, че всяко M_n е затворено. Наистина, нека $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ е произволна редица от M_n, сходяща към $f \in C_{[0,1]}$. Тогава за всяко $k \in \mathbb{N}$ съществува $x_k \in (0,1)$, така че

$$|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \leq nh$$

за всяко $h \in [0,1]$, удовлетворяващо $x_k + h \leq 1$. Съществува подредица $\{x_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$, сходяща към някое x^*. След граничен преход получаваме

$$|f(x^* + h) - f(x^*)| \leq nh$$

за всяко $h \in [0,1]$, удовлетворяващо $x^* + h \leq 1$, т.е. $f \in M_n$ и следователно M_n е затворено. Граничният преход е възможно да се направи, защото f_n е равномерно сходяща към f и f е равномерно непрекъсната в $[0,1]$.

Остава да покажем, че $\text{int} M_n = \emptyset$. Нека $f \in M_n$ е произволна точка от M_n. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува начупена линейна непрекъсната функция $g \in C_{[0,1]}$, такава че

$$\rho(f,g) = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| < \varepsilon$$

и $|g_+^{'}(x)| > n$ за всяко $x \in [0,1)$. Следователно $g \notin M_n$ и f не може да бъде вътрешна точка за M_n (Фигура 34).

□

Теорема 6.3 *(Банах–Мазуеркуевич) Множеството от всички непрекъснати функции, които не са диференцируеми във нито една точка е втора категория.*

Доказателство: От Твърдение 6.3 следва, че $C_{[0,1]} \setminus M$ е втора категория в $C_{[0,1]}$, т.е. съвкупността от непрекъснати никъде недиференцируеми функции е втора категория. □

От Теорема 6.3 следва, че съществува $x \in C_{[0,1]}$, такова ,че x' не съществува в нито една точка от $[0,1]$.

Грубо казано теоремата на Вайерщрас ни казва, че почти всички непрекъснати функции в интервала $[0,1]$ са недиференцируеми във всяка точка $x \in [0,1]$.

Твърдение 6.4 *Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функция, за която $f'(x)$ съществува за всяко $x \in \mathbb{R}$. Нека*

$$U = \bigcup_{\varepsilon>0} \left\{ x \in \mathbb{R} : \sup_{|y|<\varepsilon} |f'(x+y)| < \infty \right\}.$$

Тогава U е отворено, навсякъде гъсто множество в $\mathbb{R}$.

Доказателство: От дефиницията на U, веднага се съобразява, че U е отворено множество. Нека $W \subset \mathbb{R}$ е произволно отворено множество. За всяко $k \in \mathbb{N}$, дефинираме

$$\begin{aligned} E_k &= \left\{ x \in W : |f(y) - f(x)| \le k|y-x|, \ \text{ако} \ |y-x| \le \tfrac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcap_{|z| \le k^{-1}} \{ x \in W : |f(x+z) - f(x)| \le k|z| \}, \end{aligned}$$

което е затворено множество в $\mathbb{R}$, поради факта, че f е непрекъсната функция. Още повече, ако $x \in W$ и $M = |f'(x)|$, то

$$|f(y) - f(x)| = |f'(x)(y-x) + o(y-x)| \le (M+1)|y-x|$$

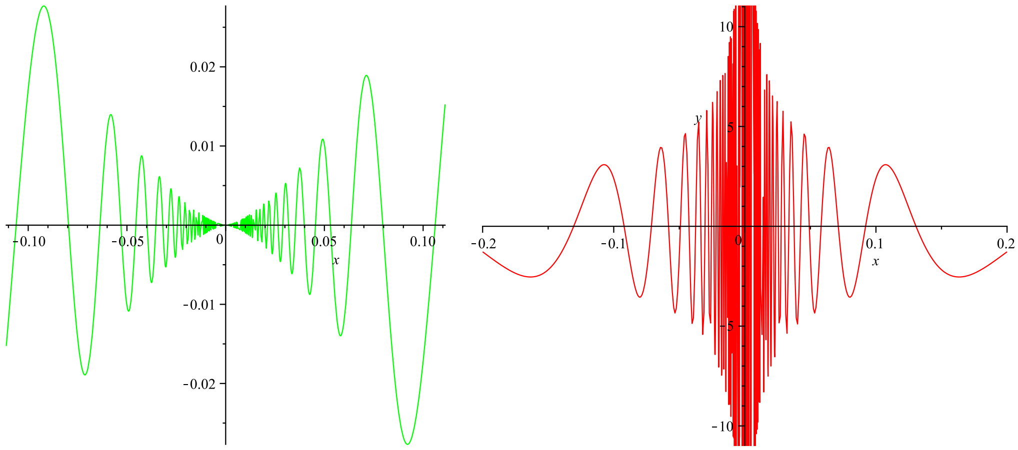
за y достатъчно близко да x. Следователно $x \in E_k$ за достатъчно големи k. Следователно $W = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ и от Следствие 6.3 за някое k, множеството E_k има непразна вътрешност, т.е. съществува $x_0 \in E_k \subset W$ и $\varepsilon > 0$, така че

$$J = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset E_k \subset W.$$

За $x \in J$ и всяко $|z| \le k^{-1}$ е в сила $|f(x+z) - f(x)| \le k|z|$ и следователно $|f'(x)| \le k$ за $x \in J$. От $x \in U \cap W$ следва, че U е навсякъде гъсто в $\mathbb{R}$. □

В общия случай не е вярно, че $U = \mathbb{R}$, както се вижда от следващия пример.

Пример 6.12 *Нека $f(x) = |x|^{3/2} \sin \frac{1}{x}$ и $f(0) = 0$. Тогава f е диференцируема за всяко $x \in \mathbb{R}$, но f' не е ограничена в околност на нулата (Фигура 35).*



Фигура 35: $f = |x|^{3/2} \sin \frac{1}{x}$–зелено, f'–червено

6.5 Функция на Вайерщрас

Теорема 6.4 *Функцията на Вайерщрас*

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

за $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3}{4}\pi$, $b > 1$, b*–нечетно число е непрекъсната и недиференцируема за всяко* $x \in \mathbb{R}$.

Доказателство: Първо ще докажем, че W е непрекъсната. От $0 < a < 1$ следва $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} < \infty$. Това заедно с неравенството $\sup\{|a^n \cos(b^n \pi x)| : n \in \mathbb{R}\} \leq a^n$ ни дава, че редът $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$ е равномерно сходящ към в $\mathbb{R}$. Следователно W е непрекъсната.

Нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е произволно фиксирано число. За всяко $m \in \mathbb{N}$ съществува α_m, така че $b^m x_0 - \alpha_m \in (-1/2, 1/2]$. Полагаме $x_{m+1} = b^m x_0 - \alpha_m$, $y_m = \dfrac{\alpha_m - 1}{b^m}$ и $z_m = \dfrac{\alpha_m + 1}{b^m}$. В сила са неравенствата

$$y_m - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m} < 0 < \frac{1 - x_{m+1}}{b^m} = z_m - x_0$$

и следователно $y_m < x_0 < z_m$. При $m \to \infty$, $y_m \to x_0$ от ляво и $z_m \to x_0$ от дясно.

Нека разгледаме лявото диференчно частно в точката x_0 на функцията W

$$\begin{aligned}
\frac{W(y_m) - W(x_0)}{y_m - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^n \tfrac{\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)}{y_m - x_0} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left(a^n \tfrac{\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)}{y_m - x_0} \right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(a^n \tfrac{\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)}{y_m - x_0} \right) \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Ще оценим сумите S_1 и S_2 поотделно.

$$
\begin{aligned}
|S_1| &= \left|\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n(-\pi)\sin\left(b^n\pi\frac{(y_m+x_0)}{2}\right)\frac{\sin\left(b^n\pi\frac{(y_m-x_0)}{2}\right)}{b^n\pi\frac{(y_m-x_0)}{2}}\right| \\
&\leq \pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n = \pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1} \leq \pi\frac{(ab)^m}{ab-1}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

От $b>1$–нечетно число и $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ е в сила представянето

$$
\cos(b^{n+m}\pi y_m) = \cos\left(b^{m+n}\pi\frac{\alpha_m-1}{b^m}\right) = \cos(b^n\pi(\alpha_m-1)) = \left((-1)^{b^n}\right)^{\alpha_m-1} = -(-1)^{\alpha_m}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\cos(b^{n+m}\pi x_0) &= \cos\left(b^{m+n}\pi\tfrac{\alpha_m+x_{m+1}}{b^m}\right) \\
&= \cos(b^n\pi\alpha_m)\cos(b^n\pi x_{m+1}) - \sin(b^n\pi\alpha_m)\sin(b^n\pi x_{m+1}) \\
&= \left((-1)^{b^n}\right)^{\alpha_m}\cos(b^n\pi x_{m+1}) - 0 = -(-1)^{\alpha_m}\cos(b^n\pi x_{m+1}).
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
S_2 = \sum_{n=0}^{\infty}a^{m+n}\frac{-(-1)^{\alpha_m}-(-1)^{\alpha_m}\cos(b^n\pi x_{m+1})}{-\frac{1+x_{m+1}}{b^m}} = (ab)^m(-1)^{\alpha_m}\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{1+\cos(b^n\pi x_{m+1})}{1+x_{m+1}}.
$$

Всеки член на горната сума е неотрицателен и от $x_{m+1}\in(1/2,1/2]$ получаваме оценката

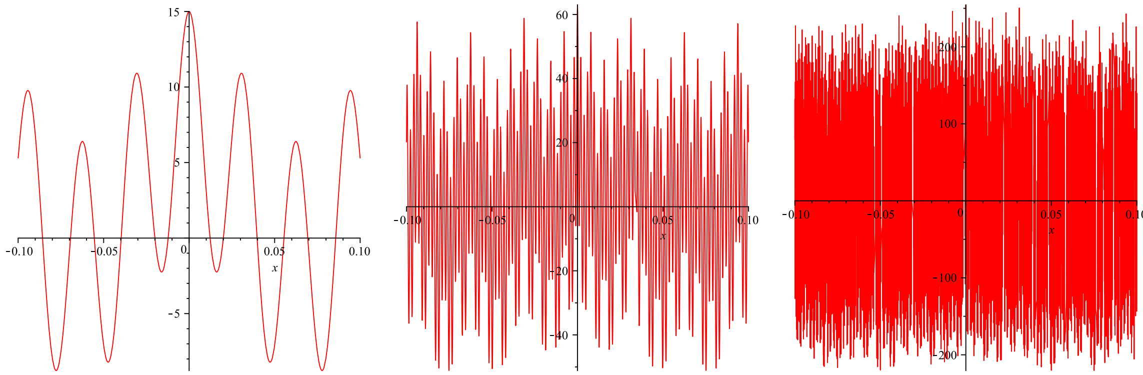
$$
\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{1+\cos(b^n\pi x_{m+1})}{1+x_{m+1}} \geq \frac{1+\cos(\pi x_{m+1})}{1+x_{m+1}} \geq \frac{1}{1+1/2} = 2/3. \tag{28}
$$

От неравенства (27) и (28) следва, че съществуват $\varepsilon_1\in[-1,1]$ и $\eta_1>1$, така че

$$
\frac{W(y_m)-W(x_0)}{y_m-x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\eta_1\left(\frac{2}{3}+\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\right).
$$

Аналогични оценки са в сила и за дясното диференчно частно:

$$
\begin{aligned}
\frac{W(z_m)-W(x_0)}{z_m-x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(a^n\tfrac{\cos(b^n\pi z_m)-\cos(b^n\pi x_0)}{z_m-x_0}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{m-1}\left(a^n\tfrac{\cos(b^n\pi z_m)-\cos(b^n\pi x_0)}{z_m-x_0}\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty}\left(a^n\tfrac{\cos(b^n\pi z_m)-\cos(b^n\pi x_0)}{z_m-x_0}\right) \\
&= S_1' + S_2',
\end{aligned}
$$



Фигура 36: $W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k cos(4^k \pi x)$, $n = 3, 5, 7$

$$
\begin{aligned}
|S_1| &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n (-\pi) \sin\left(b^n \pi \frac{(z_m + x_0)}{2}\right) \frac{\sin\left(b^n \pi \frac{(z_m - x_0)}{2}\right)}{b^n \pi \frac{(z_m - x_0)}{2}} \right| \\
&\leq \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \leq \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1},
\end{aligned} \tag{29}
$$

$$
\cos(b^{n+m} \pi z_m) = \cos\left(b^{m+n} \pi \frac{\alpha_m + 1}{b^m}\right) = \cos(b^n \pi (\alpha_m + 1)) = \left((-1)^{b^n}\right)^{\alpha_m + 1} = -(-1)^{\alpha_m},
$$

$$
S_2' = \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n} \frac{-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m} \cos(b^n \pi x_{m+1})}{\frac{1 - x_{m+1}}{b^m}} = -(ab)^m (-1)^{\alpha_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n \pi x_{m+1})}{1 - x_{m+1}}.
$$

Всеки член на горната сума е неотрицателен и от $x_{m+1} \in (1/2, 1/2]$ намираме оценката

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n \pi x_{m+1})}{1 - x_{m+1}} \geq \frac{1 + \cos(\pi x_{m+1})}{1 - x_{m+1}} \geq \frac{1}{1 - (-1/2)} = 2/3. \tag{30}
$$

От неравенства (29) и (30) следва, че съществуват $\varepsilon_2 \in [-1, 1]$ и $\eta_2 > 1$, така че

$$
\frac{W(z_m) - W(x_0)}{z_m - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_2 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_2 \frac{\pi}{ab - 1}\right).
$$

От $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ следва, че лявото и дясното диференчни частни имат различни знаци. От $\lim_{m\to\infty} (ab)^m = \infty$ следва веднага, че W не е диференцируема в x_0. □

Задачи.

Задача 1. Докажете, че следните функции са непрекъснати и не са диференцируеми за никое $x \in \mathbb{R}$

а) Функция на Херц (Hertz)

$$W_H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos^p(b^k \pi x),$$

$a > 1$, $p \in \mathbb{N}$, b–нечетно, $ab > 1 + \frac{2}{3}p\pi$;
б) Функции на Харди (Hardy)

$$W_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(b^k \pi x), \quad W_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

$0 < a < 1$, $b > 1$, $ab \geq 1$;
в) Функции на Портър (Porter)

$$W_{P_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \cos(k!\pi x), \quad W_{P_2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sin(k!\pi x),$$

$|a| > 1 + \frac{3}{2}\pi$;
и

$$W_{P_3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} \cos(k!a^k \pi x), \quad W_{P_4}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sin(k!a^k \pi x),$$

$|a| \in N, \quad |a| \neq 1.$

7 Топологични пространства

Понятиетята разстояние и метрично пространство са доста общи и абстрактни. Те ни позволяват да изследваме голямо количество проблеми. Съществуват по общи пространства, които в себеси вкълчват и метричните пространство. Това са топологичните пространства.

7.1 Топологични пространства

За дефинирането на основните понятия (отворено и затворено множество, точка на докосване, гранична точка, граница на редица) в метричните пространства използвахме околност на точка. Околността на точка ни позволи да определим отворените множества в едно метрично пространство. Възможно е да разгледаме друг подход за дефинирането на едно пространство, като опишем всички отворени множеста, в това число и всички околности на всяка една точка.

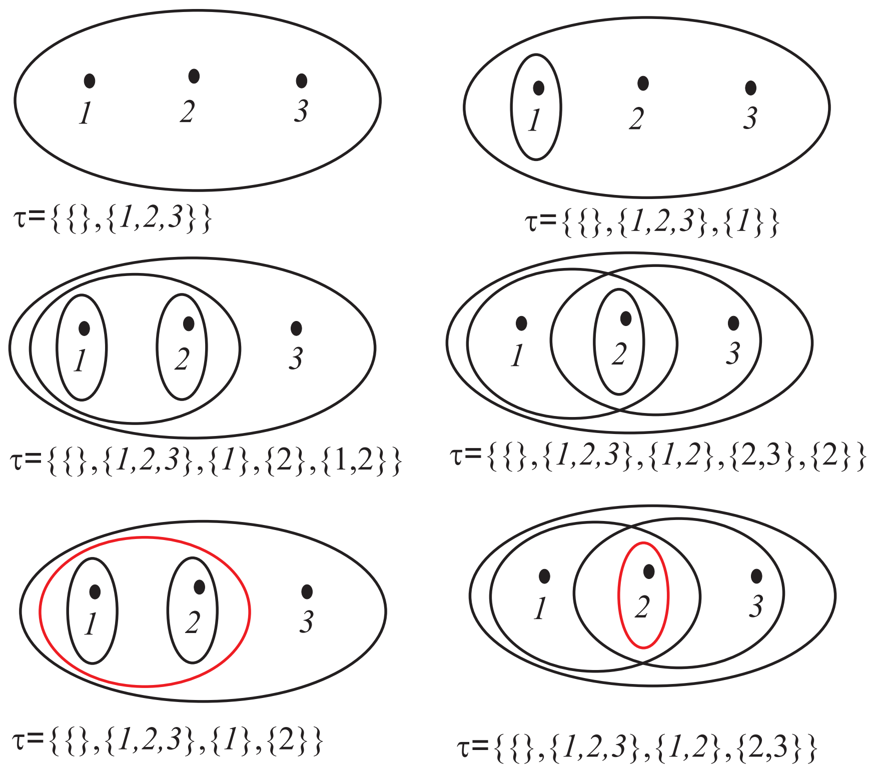
Определение 7.1 *Нека е дадено произволно множество T. Топология в T наричаме произволна съвкупност от подмножества τ, която удовлетворява условията:*
1) $T \in \tau$ и $\emptyset \in \tau$;
2) За всяка фамилия от множества $G_\gamma \in \tau$, $\gamma \in \Gamma$ е изпълнено $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma \in \tau$;
3) За всяка крайна съвкупност $G_k \in \tau$, $k = 1, \ldots, n$ от множества е изпълнено $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k \in \tau$.

Множеството T с дефинираната в него топология τ, т.е. наредената двойка (T, τ) наричаме топологично пространство. Множествата, които принадлежат на τ аричаме отворени множества.

Както видяхме в метричните пространства в едно и също множество X можем да въведем различни метрики ρ, d и да получим различни метрични пространства (X, ρ) и (X, d). Същото е в сила и при топологичните пространства. Можем в едно и също множество T да въведем различни топологии τ_1, τ_2 и да получим различни топологични пространства (T, τ_1) и (T, τ_2).

Определение 7.2 *Нека е дадено произволно топологично пространство (T, τ). Множеството $F \subseteq X$ наричаме затворено, ако $F^c = X \backslash F$ е отворено.*

Твърдение 7.1 *Нека е дадено произволно топологично пространство (T, τ). Тогава:*
1) T и $\emptyset$ са затворени множества;
2) За всяка фамилия от затворени множества F_γ, $\gamma \in \Gamma$ множеството $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ е затворено множество;
3) За всяка крайна съвкупност от затворени множества F_k, $k = 1, \ldots, n$ множеството $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$ е затворено множество.



Фигура 37: Примери на съвкупности от отворени множества, които описват топология или не описват топология

.

Аналогично на метричните пространства и в топологичните пространства се дефинират основните понятия, като околност на точка, точка на докосване, затваряне на множество и т.н.

Определение 7.3 *Околност на точката $x \in (T, \tau)$ наричаме всяко отворено множество $U \in \tau$, което сьдържа точката x.*

Определение 7.4 *Нека A е подмножество на топологичното пространство (T, τ). Казваме, че точката $x \in X$ е точка на докосване за множеството A, ако за всяка околност U_x на точката x е изпълнено $U_x \bigcap A \neq \emptyset$.*

Определение 7.5 *Нека A е подмножество на топологичното пространство (T, τ). Казваме, че точката $x \in X$ е гранична точка за множеството A, ако за всяка околност U_x на точката x съществува $y \neq x$, $y \in U_x \bigcap A$.*

Съвкупността от всички точки на докосване на множеството A се отбелязва с $\overline{A}$ и се нарича затварявне на множеството A.

Твърдение 7.2 *Множеството A е затворените множества (множествата на които допълнението е отворено множество) в едно топологично пространство, тогава и само тогава, когато $\overline{A} = A$.*

Доказателство: ($\Leftarrow$) Нека $A = \overline{A}$. Тогава за всяко $x \in A^c = T \backslash A$ следва, че съществува околност U_x, така че $U_x \bigcap A = \emptyset$. От аксиомите за топологично пространство следва, че $\bigcup\limits_{x \in A^c} U_x = A^c$.

($\Rightarrow$) Нека A е затворено множество. От дефиницията за затворено множество в топологично пространство следва, че A^c е отворено множество и следователно е околност за всяка точка $x \notin A$. От дефиницията на множеството A^c следва, че $A \bigcap AS^c = \emptyset$ и следователно x не може да бъде точка на докосване за A. $\square$

Пример 7.1 *Всяко метрично пространство е топологично пространство*

Пример 7.2 *Нека T е произволно множество. Да разгледаме множеството τ да се състои от всички подмножества на T. В този случай получаваме, че всяко множество е отворено и следователно и всяко множество е затворено. В това пространство всяко множество съвпада със своето затваряне. Това свойство удовлетворява дискретното метрично пространство.*

Пример 7.3 *Нека T е произволно множество. Да разгледаме множеството τ да се състои само от множествата T и $\emptyset$. В този пример затварянето на едно множество съвпада с T. Това пространство се нарича още пространство на „струпаните точки“.*

Пример 7.4 *Нека $T = \{x, y\}$. Нека $\tau = \{T, \emptyset, b\}$. Веднага се вижда, че τ определя топология в T. Това пространство се нарича свързано двоеточие. Затворени множества са $\{T, \emptyset, a\}$. Затварянетона $\{b\}$ съвпада с T.*

Определение 7.6 *Нека върху едно и също множество X са дефинирани две топологии τ_1 и τ_2. Казваме, че топологията τ_1 е по–силна от топологията τ_2, ако $\tau_2 \subset \tau_1$. В този случай още можем да кажем, че топологията τ_2 е по–слаба от топологията τ_1*

В съвкупността от всевъзможните топологи на едно множество X по естествен начин може да се въведе частична наредба, като казваме, че $\tau_1 < \tau_2$, ако τ_1 е по–слаба топология от τ_2. В тази частична наредба максимален елемент е топологията в която всички множества са отворени и минимален елемент топологията в която само пространството и празното множество са отворени.

Теорема 7.1 *Нека върху едно и също множество X е дефинирана фамилия от топологии τ_α, $\alpha \in \Gamma$. Тогава $\tau = \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} \tau_\alpha$ е топология в X. Топологията τ е по–слаба от всяка една от топологиите τ_α, $\alpha \in \Gamma$.*

Доказателство: Множествата X и $\emptyset$ принадлежат на $\tau = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \tau_\gamma$. От факта, че за всяко τ_α удовлетворява условита: обединения на отворени множества и сечения на краен брой отворени множества е отворено множество, то следва, че това се удовлетворява и от τ. $\square$

Следствие 7.1 *Нека $\mathcal{B}$ е произволна съвкупност от подмножества на X. Съществува минимална топология в X, която съдържа $\mathcal{B}$.*

Доказателство: Първо ще отбележим, че съществува топология, която съдържа всички множества от $\mathcal{B}$. Наистина топологията в която всички множества са отворени съдържа $\mathcal{B}$. Нека положим τ да бъде сечението на всички топологии, които съдържат $\mathcal{B}$. Според Теорема 7.1 следва, че $\mathcal{B} \subseteq \tau$ и тя е минималната топология, която съдържа $\mathcal{B}$. $\square$

Тази минимална топология $\tau(\mathcal{B})$ се нарича, топология породена от системата $\mathcal{B}$.

Нека (T, τ) е топологично пространство и $A \subset T$. Ако разгледаме множествата $A \bigcap G$, за всяко $G \in \tau$ ще получим топология в A. Така всяко подмножество на топологично пространство може да се превърне в топологично пространство. Ясно е че може две различни топологии в T да индуцират една и съща топология в A.

Задачи

Задача 1. Опишете всички възможни топологии в пространства състоящи се от:
1) три точки;
2) четери точки;
3) пет точки.
Задача 2. Докажете, че обединението на две топологии може да не бъде топология.
Задача 3. Нека $\mathcal{B}$ е съвкупността от множества:
а) $\mathcal{B} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$;
б) $\mathcal{B} = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$;
в) $\mathcal{B} = \{[a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$;
г) $\mathcal{B} = \{(a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$;
д) $\mathcal{B} = \{(a, +\infty); a \in \mathbb{R}\}$;
е) $\mathcal{B} = \{[a, +\infty); a \in \mathbb{R}\}$;
ж) $\mathcal{B} = \{(-\infty, a); a \in \mathbb{R}\}$;
з) $\mathcal{B} = \{(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0\}$;
и) $\mathcal{B} = \{[n, m]; n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Постройте минималната топология, която съдържа множествата $\mathcal{B}$.
Задача 4. Намерете сечението на топологиите от Задача 3:
в) и г);
д) и ж).
Задача 5. За множествата $A = \{0\}$, $B = (0, 1) \cup \{2\}$ намерете техните вътрешни, външни, гранични, на докосване и изолирани точки спрямо топологичните пространства от Задача 3.

7.2 База в топологично пространство

Както видяхме до момента за да опишем едно топологично пространство ни се наложи да опишем всичк негови отворени множества. Ако се върнем към нормираниет пространства ще си спомним, че не беше необходимо да знаем всички отворен множества, достатъчни ни бяха само отворените кълба. По същия начин би било удобно, ако можем да задаваме не цялото множество τ, а само част от него, която част да ни бъде достатъчна за да получим всяко едно отворено множество.

Определение 7.7 *Съвкупността $\mathcal{G}$ от отворени множества се нарича база в топологичното пространство (T, τ), ако всяко множество $G \in \tau$ може да се представи като обединение, крайно или безкрайно, на елементи от $\mathcal{G}$.*

Пример 7.5 $\mathcal{G} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ *и* $\mathcal{G} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ *са база в* $\mathbb{R}$. *Също така* $\mathcal{G} = \{B_x(a) : x \in X, a \in \mathbb{R}\}$ *е база за метричното пространство* X.

Теорема 7.2 *Съвкупността от множества $\mathcal{G}$ е база за някой топология в T, тогава и само тогава, когато удовлетворява условията:*
1) за всяко $x \in X$ съществува $G \in \mathcal{G}$, така че $x \in G$;
2) ако $x \in G_1 \bigcap G_2$, $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, то съществува $G_3 \in \mathcal{G}$, така че $x \in G_3 \subset G_1 \bigcap G_2$.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека $\mathcal{G}$ е база в (T, τ). Тогава условие 1) означава, че цялото пространство T трябва да може да се представи като обединение на множества от $\mathcal{G}$, а условие 2) означава, че множеството $G_1 \bigcap G_2$, като отворено множество трябва да меже да се представи като обединение на множества от $x \in G_1 \bigcap G_2$.

($\Leftarrow$) Нека T е множество и $\mathcal{G}$ се съвкупност от множества, които удовлетворяват условия 1) и 2). Нека означим с $\tau(\mathcal{G})$ съвкупността от всички множества, които се получават като обединения на множества от $\mathcal{G}$.

Очевидно, че цялото пространство и празното множество ще принадлежат на $\tau(\mathcal{G})$ Ще покажем, че сечението на произволни две множества от $\tau(\mathcal{G})$ също принадлежи на $\tau(\mathcal{G})$. Нека $A = \bigcup_\alpha G_\alpha$ и $B = \bigcup_\beta G_\beta$. Тогава $A \bigcap B = \left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right) \bigcap \left(\bigcup_\beta G_\beta\right) = \bigcup_{\alpha,\beta} \left(G_\alpha \bigcap G_\beta\right)$ и според услоие 2) $G_\alpha \bigcap G_\beta \in \tau(\mathcal{G})$ и следователно $A \bigcap B \in \mathcal{G}$. □

Нека отбележим, че Теорема 7.2 дава условие, каго една съвкупност от множества е база за някоя топология. Интересен е въпроса, ако е дадена топология τ, какви условия трябва да удовлетворява една съвкупност от множества, за да може тя да бъде база, точно за топологията τ.

Теорема 7.3 *Съвкупността от множества $\mathcal{G}$ е база за топологията τ в T, тогава и само тогава, когато за всяко творено множество $G \in \tau$ и всяка точка $x \in G$ съществува $G_x \in \mathcal{G}$ така че $x \in G_x \subset G$.*

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека $\mathcal{G}$ удовлетворява условието от теоремата. Тогава всяко G може да се представи като обединение на G_x по всички $x \in G$.

($\Leftarrow$) Ако $\mathcal{G}$ е база за τ, тогава всяко G може да се представи във вида на обединение на множества от $\mathcal{G}$ и следователно за всяко $x \in G$ съществува $x \in G_x \subset G$. $\square$

Лесно може да се съобрази, че във всяко метрично пространство $(X\rho)$ съвкупността от всички кълба $\{B_x(r) : x \in X, r \in [0, +\infty)$ образуват база. Също така $\{B_x(r) : x \in X, r \in [0, +\infty), r \in \mathbb{Q}$ образуват база.

Определение 7.8 *Топологично пространство (X, τ) в което съществува поне една база, която се състои от изброим брой множества се нарича пространства удовлетворяващо втората аксиома за изброимост или топологично пространство с изброима база.*

Твърдение 7.3 *Ако топологичното пространство (T, τ) удовлетворява втората аксиома за изброимост, тогава в (T, τ) съществува изброимо навсякъде гъсто множество, т.е множество на което затварянето съвпада с T. Такива пространства наричаме сепарабелни.*

Нека $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброима база. нека да изберем по един елемент x_n от вмсяко от множествата. Множеството $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброимо и навсякъде гъсто. Наистина ако допуснем, че не е навсякъде гъсто, тогава $G = T \setminus \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ е отворено и не съдържа нито една точка от $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Последното е противоречие, защото G трябва да може да се представи като обединение на множества от $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Теорема 7.4 *Метричното пространство (X, ρ) е сепарабелно, тогава и само тогава, когато има изброима база.*

Всички сепарабелни метрични пространства могат да служат за примери на пространства с втората аксиома за изброимост. Пространството ℓ_{∞} е несепарабелно и следователно в него не съществува изброима съвкупност от отворени множества които да пораждат топологиата породена от метриката ρ_{∞}.

Определение 7.9 *Казваме, че съвкупноста $\{G_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ е отворено покритие за T, ако всички G_{γ} са отворени моножества и $T = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_{\gamma}$. Ако съществува изброимо подмножесво $\{G_{\gamma_i}\}_{i=1}^{\infty}$ на $\{G_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$, което също е покритие за T, тогава подмножесво $\{G_{\gamma_i}\}_{i=1}^{\infty}$ наричаме подпокритие на $\{G_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$.*

Теорема 7.5 *Нека (T, τ) е топологично пространство с изброима база, то от всяко негово отворено покритие може да се избере крайно или изброимо подпокритие.*

Доказателство: Нека $\{U_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ е отворено покритие за T и $\mathcal{G}$ е изброима база за τ. За всяко $x \in T$ съществува $G_x \in \mathcal{G}$, така че $x \in G_{n(x)} \subset U_{\gamma}$. Тогава $\{G_{n(x)}\}_{x \in T}$ е отворено покритие за T и следователно ако за всяко $G_{n(x)}$ изберем по едно от множествата $G_{n(x)} \subset U_{\gamma}$ ще получим изброимо или крайно подпgокритие. $\square$

Определение 7.10 *Нека (X, τ) е топологично пространство. Съвкупността от множества $\mathcal{U}$ наричаме определяща система от околности за точката $x \in X$, ако за всяко отворено множество A съдържащо x съществува $U \in \mathcal{U}$, такова че $x \in U \subset A$.*

Ако топологичното пространство има изброима определяща система от околности за точката x, то казваме, че в точката x се удовлетворява първата аксиома за изброимост. Ако във всяка точка от пространството се удовлетворява първата аксиома за изброимост, казваме че топологичното пространство е с първата аксиома за изброимост.

Въпреки, че много от оснвните понятия свързани с метричните пространства се пренасят върху топологичните пространства възникват ситуации, които съществено се различават от метричните пространства. Например краен брой точки в топологично пространство може да не бъде затворено множество.

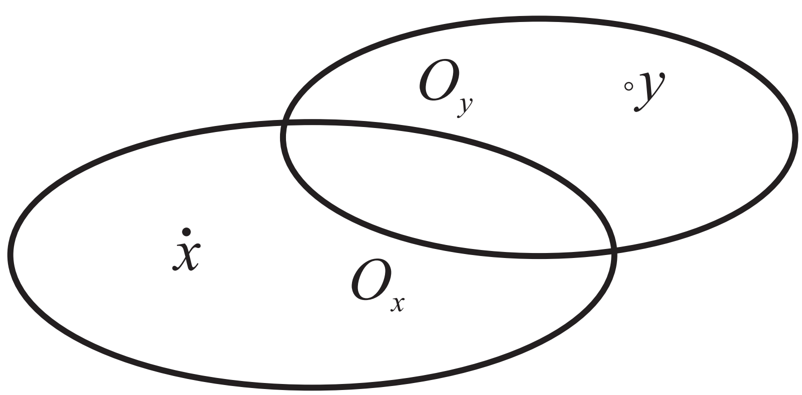
Всяко метрично пространство удовлетворява първата аксиома за изброимост.

7.3 Аксиоми за отделимост в топологични пространства

Сред топологичните пространства може да се отделят, такива, които да са по–близки по свойства с метричните пространства. Такъв тип условия са например първата и втората аксиома за изброимост.

Определение 7.11 *Казваме, че топологичнато пространство (T, τ) удовлетворява първата аксиома за отделимост, ако за всеки две точки $x, y \in T$ съществуват техни околности O_x, O_y, такива че $y \notin O_X$ и $x \notin O_y$ (Фигура 38).*

Топологичните пространства, които удовлетворяват първата аксиома за отделимост се наричат T_1–пространства.



Фигура 38:

Пример за топологично пространство, което не удовлетворява първата аксиома за отделимост е свързаното двоеточие.

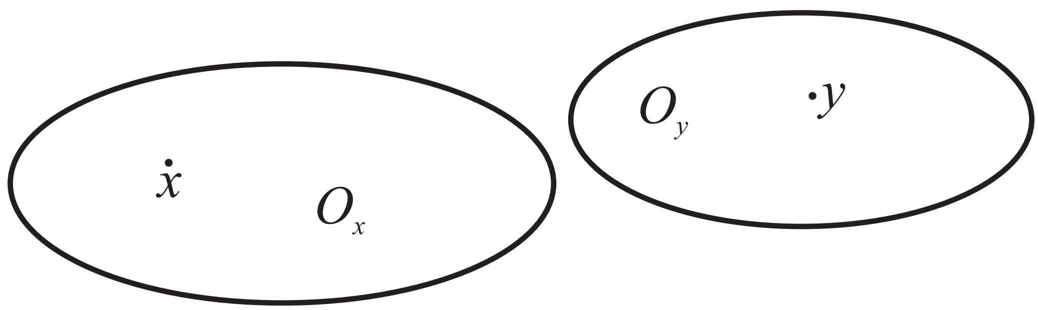
Твърдение 7.4 *Ако (T, τ) е топологично пространство с първата аксиома за отделимост, тогава всяка точка $x \in T$ е затворено множество.*

Доказателство: Нека $x \neq y$. Съществуват околности O_y, която не съдържа x и следователно $y \notin \overline{\{x\}}$. Следователно $x = \overline{\{x\}}$. $\square$

От Твърдение 7.4 получаваме, че в топологичните пространства с първата аксиома за отделимост всяко крайно множество е затворено.

Твърдение 7.5 *Точката $x \in M$ е гранична точка за множеството M в топологичното пространство T с първата аксиома за отделимост, тогава и само тогава, когато произволна околност O_x съдържа безброй много точки от M.*

Определение 7.12 *(втора или хаусдорфова аксиома за отделимост) Казваме, че топологичното пространство (T, τ) удовлетворява втората аксиома за отделимост, ако за всеки две точки $x, y \in T$ съществуват техни околности O_x, O_y, такива че $O_x \bigcap O_y = \emptyset$ (Фигура 39).*



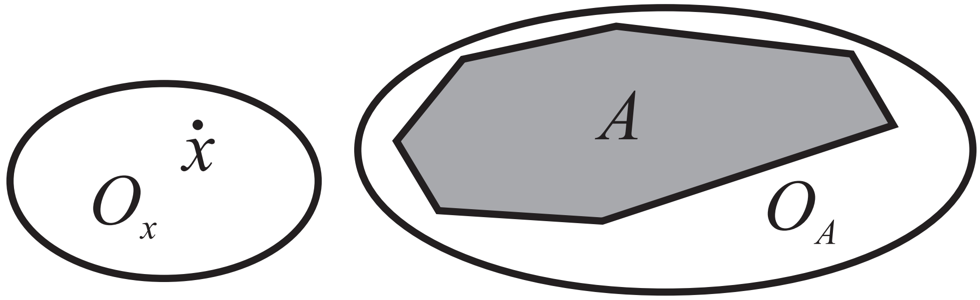
Фигура 39:

Топологичните пространства, които удовлетворяват втората аксиома за отделимост се наричат T_2–пространства или хаусдорфови пространства.

Всички хаусдорфови пространства са T_1–пространства. Обратното не е вярно. Нека разгледаме $[0, 1]$, където отворени множества да бъдат: празното множество, цялото пространство и множествата които се получават чрез премахването на неповече от краен брой точки от $[0, 1]$.

Определение 7.13 *Околност на множество A наричаме всяко отворено множество U, което съдържа A.*

Определение 7.14 *(трета аксиома за отделимост) Казваме, че топологичното пространство (T, τ) удовлетворява третата аксиома за отделимост, ако за всяка точка $x \in T$ и всяко затворено множество A, което не съдържа x съществуват техни околности O_x, O_A, такива че $O_x \bigcap O_A = \emptyset$ (Фигура 40).*



Фигура 40:

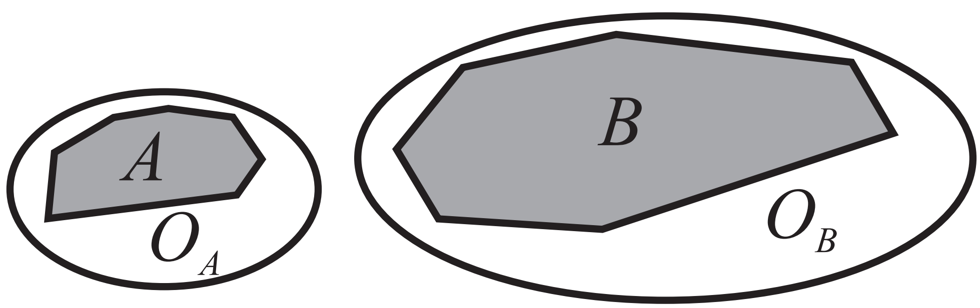
Третата аксиома за отделимост може да се изкаже еквивалентно: Всяка околност O_x на произволана точка x съдържа околност U_x, така, че $\overline{U_x} \subset O_x$.

Както отбелязохме, в произволно топологично пространство, може да се окаже, че точката не е затворено множество. Затова интерес продставляват пространствата, които удовлетворяват едновремено аксиоми T_1 и T_3.

Определение 7.15 *(регулярно пространство) Казваме, че топологичнато пространство (X, τ) е регулярно пространство, ако удовлетворява едновремено аксиоми T_1 и T_3.*

Всяко регулярно пространство е хаусдорфово. Обратното не е вярно.

Определение 7.16 *(аксиома за нормалност) Казваме, че топологичнато пространство (X, τ) е нормално, ако то е T_1–пространство и всеки две, непресичащи се затворени множества A, B имат непресичащи се околност (Фигура 41).*



Фигура 41:

Феликс Хаусдорф (Felix Hausdorff 1868–1942) е германски математик, който се счита за един от създателите на модерната топология. Той има съществени приноси теория на множествата, теория на мярката, теория на функциите и функционалния анализ. Хаусдорф завършва университета в Лайпциг и през 1891 защитава докторска дисертация. Той преподава в университета в Лайпциг до 1913 година, когато става професор в университета в Гресявалд. Когата Нацистите идват на власт и започват преследване на евреите, Хаусдорф си мисли, че ще бъде пощаден, като известен математик, но неговата абстрактна математика не е била нужна на нацистите и той е уволнен през 1935. Хаусдорф продължава да се занимава с наука и да публикува в полското списание „Fundamenta Mathematicae". След "Кристалната нощ" Хаусдорф разбира, че живота му е в опасност и прави опит да замине за САЩ, но не успява. Когато през 1942 година, Хаусдорф разбира, че ще бъде изпратен в концентрационен лагер се самоубива заедно със съпругата си.

Хаусдорф е първият, който изказва обобщението на континуум хипотезата на Кантор. Хаусдорф пръв разглежда топологични пространства, които да удовлетворяват втората аксиома за отделимос, които носят неговото име. Хаусдорф използва Хаусдорфовия принцип за максимума и е първият, който използва принцип за максимума в алгебрата. Чрез аксиомата за избора прави парадоксабно разбиване на двумерната сфера на множества A, B, C, Q. Той пръв дефинира понятието Хаусдорфова мярка, което се оказва много полезно в теорията на фракталите. Също така Хаусдорф пъбликува и няколко философски книги под псевдонима Paul Mongre.

Пример 7.6 *Всяко метрично пространство $(X\rho)$ е нормолно пространство.*

Наистина, нека A, B са затворени и непресичащи се множества в метричното пространство (X, ρ). За всяко $x \in A$ съществува околност на O_x на x, която няма общи точки с B. Следователно съществува $r_x > 0$, такова, че $\mathrm{dist}(x, B) = r_x$. Аналогично за всяко $y \in B$ съществува r_y. Очевидно, че множествата

$$U = \bigcup_{x \in A} B_x\left(\frac{r_x}{2}\right), \quad V = \bigcup_{y \in B} B_y\left(\frac{r_y}{2}\right)$$

са околности за A и B съответно. Ако допуснем, че съществува $z \in U \bigcap V$, тогава съществуват $x_0 \in A$ и $y_0 \in B$, така че $z \in B_{x_0}(r_{x_0})$ и $z \in B_{y_0}(r_{y_0})$. Тогава

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) \leq \frac{r_{x_0}}{2} + \frac{r_{y_0}}{2} \leq \max\{r_{x_0}, r_{y_0}\},$$

което е противоречие. $\square$

8 Непрекъснатост

Повечето функции не е лесно да бъдат начертани. Тези които най-лесно могат да бъдат изобразени са функциите дефинирани върху реалната права със стойности реални числа. Някои от графиките се отличават със своята непрекъсната природа, т.е. да бъдат начертани без да се вдига молива, докато се изчертава. Тези графики се отличават с това, че се състоят от една част. Математиците са успяли да отразят тази непрекъсната структура чрез понятието непрекъснатост. Идеята за непрекъснатост се базира на усещането, че стойностите на функцията в точки, които са близо до дадена точка не трябва да се различават много.

8.1 Непрекъснати изображения в метрични пространства.

Определение 8.1 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са две метрични пространства и $f : X \to Y$. Казваме, че f е непрекъсната в точката $x_0 \in X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in X$, за което $\rho_X(x, x_0) < \delta$ е в сила*

$$\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Ако $X \equiv Y \equiv \mathbb{R}$ се получава класическата дефиниция за непрекъснатост в $\mathbb{R}$.

Следващото твърдение изказва Определение 8.1 в термините на отворени кълба.

Твърдение 8.1 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са две метрични пространства и $f : X \to Y$ и $x_0 \in X$. Тогава f е непрекъснато изображение в точката $x_0 \in X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че*

$$f(B_{x_0}(\delta)) \subset B_{f(x_0)}(\varepsilon).$$

Теорема 8.1 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са две метрични пространства и $f : X \to Y$. Функцията f е непрекъсната в точката $x_0 \in X$, тогава и само тогава, когато за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ е в сила $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Доказателство: Нека f е непрекъсната в точката $x_0 \in X$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ще покажем, че $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От Определение 8.1, следва че съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in X$

$$\text{от } \ \rho_X(x, x_0) < \delta \ \text{ следва } \ \rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{31}$$

От $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, следва че съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq n_0$ е в сила неравенството

$$\rho_X(x_n, x_0) < \delta. \tag{32}$$

От (31) и (32) получаваме $\rho_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ за всяко $n \geq k$ т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Обратно, да допуснем, че за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ следва $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, но f не е непрекъсната в $x_0 \in X$. От допускането, че f не е непрекъсната в точката x_0 следва, че съществува такова $\varepsilon > 0$, така че за всяко $\delta > 0$ съществува, $x \in X$ удвлетворяващо $\rho_X(x, x_0) < \delta$ и $\rho_Y(f(x), f(x_0)) > \varepsilon$. Нека $\delta = 1/n$ и да изберем редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, така че $\rho_X(x_n, x_0) < 1/n$ и $\rho_Y(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$. Следователно $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, но $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща към $f(x_0)$, което е противоречие. □

Определение 8.2 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са две метрични пространства и $f : X \to Y$. Казваме, че f е непрекъснато изображение, ако f е непрекъснато изображение във всяка точка $x \in X$.*

Теорема 8.2 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са две метрични пространства и $f : X \to Y$. Тогава*
а) f е непрекъснато тогава и само тогава, когато за всяко отворено множество $U \subset Y$ множеството $f^{-1}(U) \subset X$ е отворено,
б) f е непрекъснато тогава и само тогава, когато за всяко затворено множество $U \subset Y$ множеството $f^{-1}(U) \subset X$ е затворено.

Доказателство:

Да припомним определенията на множествата $f(U)$, $f^{-1}(U)$:

$$f(U) = \{y \in Y : \text{ съществува } x \in U \subset X, \text{ така че } y = f(x)\};$$

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}.$$

а) Нека f е непрекъсната и U е отворено в Y. Ако $x \in f^{-1}(U)$, то $f(x) \in U$. Тъй като U е отворено в Y и $f(x) \in U$, то съществува $\varepsilon > 0$, така че $B_{f(x)}(\varepsilon) \subset U$. Следователно съществува $\delta > 0$, така че $f(B_x(\delta)) \subset B_{f(x)}(\varepsilon)$. Така получаваме веригата от включвания

$$B_x(\delta) \subset f^{-1}(f(B_x(\delta))) \subset f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon)) \subset f^{-1}(U),$$

което показва, че $f^{-1}(U)$ е отворено в X.

Обратно, нека $f^{-1}(U)$ е отворено за всяко отворено множество $U \subset Y$. Нека $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Кълбото $B_{f(x)}(\varepsilon)$ е отворено множество в Y, следовотелно $f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon))$ е отворено множество в X. От $x \in f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon))$ следва, че съществува $\delta > 0$, така че $B_x(\delta) \subset f^{-1}(B_{f(x)}(\varepsilon))$, т.е. $f(B_x(\delta)) \subset B_{f(x)}(\varepsilon)$ и f е непрекъсната в $x \in X$.

б) От $f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$ следва, че ако U е отворено, то $V = Y \backslash U$ е затворено и следователно $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \backslash U) = X \backslash f^{-1}(U)$ е затворено и следователно $f^{-1}(U)$ е отворено.

Аналогично се доказва и в обатната посока, че ако праобраза на всяко отворено множество е отворено множество, то и праобраза на всяко затворено множество е затворено множество. □

Пример 8.1 *Нека е дадено изображението $F : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, дефинирано чрез $F(y) = y(1)$. Докажете, че F е непрекъснато изображение.*

Доказателство: Нека $y \in C_{[0,1]}$ е произволно избрано и нека редицата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към y. Тогава $F(y_n) = y_n(1)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{C_{[0,1]}}(y_n, y) = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} |y_n(x) - y(x)| = 0.$$

Да разгледаме редицата от образи $\{F(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$. От неравенството

$$\rho_{\mathbb{R}}(F(y_n), F(y)) = |F(y_n) - F(y)| = |y_n(1) - y(1)| \le \max_{0\le x\le 1} |y_n(x) - y(x)| = \rho_{C_{[0,1]}}(y_n, y)$$

следва, че $\lim_{n\to\infty} \rho_{\mathbb{R}}(y_n, y) = 0$ винаги, когато $\lim_{n\to\infty} \rho_{C_{[0,1]}}(y_n, y) = 0$ и следователно изображението F е непракъснато. $\square$

Пример 8.2 *Нека X е метричното пространство $C_{[0,1]}$ с метрика*

$$\rho_X(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$

и нека изображението $F : X \to \mathbb{R}$ е дефинирано чрез $F(y) = y(1)$. Докажете, че F не е непрекъснато изображение.

Доказателство: Да разгледаме функцията $y_0(t) \equiv 0$ и редицата от функции $y_n(t) = t^n$. От

$$\lim_{n\to\infty} \rho_X(y_n, y_0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 t^n dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

следва, че $y_n \to y$. От друга страна

$$\rho_{\mathbb{R}}(F(y_n), F(y_0)) = |y_n(1)| = 1,$$

което означава, че редицата $\{F(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща към $F(y_0)$ и следователно F не е непрекъснато изображение. $\square$

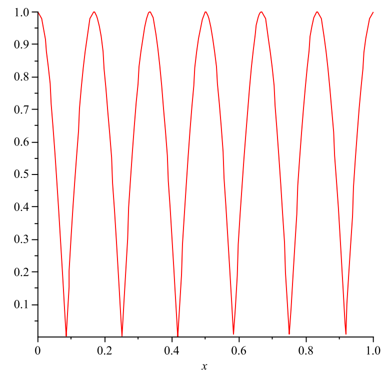
Пример 8.3 *Нека изображението $F : C_{[0,1]}^{(1)} \to C_{[0,1]}$ е дефинирано чрез*

$$F(y) = \int_0^t |y'(t) dt,$$

където пространството $C_{[0,1]}^{(1)}$ се разглежда, като подпространство на $C_{[0,1]}$ Докажете, че F не е непрекъснато изображение.

Доказателство: Да разгледаме функцията $y_0(t) \equiv 0$ и редицата от функции $y_n(t) = \dfrac{\sin(2\pi nx)}{n}$. От

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{C_{[0,1]}^{(1)}}(y_n, y_0) = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$



Фигура 42: $F(y_n) = |\cos(4\pi nx)|$

следва, че $y_n \to y$. От друга страна (Фигура 42)

$$\rho(F(y_n), F(y_0)) = 2\pi \max_{0 \le t \le 1} \int_0^t |\cos(2\pi nx)|dx = 8\pi n \int_0^{\frac{1}{4n}} \cos(2\pi nx)dx = 2,$$

което означава, че редицата $\{F(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща към $F(y_0)$ и следователно F не е непрекъснато изображение. $\square$

Теорема 8.3 *Нека (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) и (Z, ρ_Z) са три метрични пространства и $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ са непрекъснати изображения. Тогава $h = g(f) : X \to Z$ е непрекъснато изображение.*

Доказателство: Нека $x_n \to x_0$. От непрекъснатостта на f в точката $x_0 \in X$ следва, че $f(x_n) \to f(x_0)$. Аналогично от $y_n = f(x_n) \to f(x_0) = y_0$ и непрекъснатстта на g в точката $y_0 \in Y$ следва $g(y_n) \to g(y_0)$. Следователно $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. $\square$

Твърдение 8.2 *Нека (X, ρ) е метрично пространство. Тогава*
а) За всяко $y_0 \in X$ функцията $\rho(x, y_0) : X \to \mathbb{R}$ задава непрекъснато изображение.
б) Функцията $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ е непрекъснато изображение, където $X \times X$ е снабдено с метриката $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)$.

Доказателство: а) Наистина от неревенствата

$$|\rho(x, y_0) - \rho(x_0, y_0)| \le \rho(x_0, x)$$

и

$$|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \le \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y) = d((x_0, y_0), (x, y))$$

веднага седват доказтелствата съответно на а) и б). $\square$

Определение 8.3 *Ако изображението $f : X \to Y$ довлетворява условието*

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \le M\rho_X(x, y)$$

за някое $M > 0$ и за всеки две $x, y \in X$, то казваме, че f е Липшицово изображение.

Веднага се вижда, че всяко Липшицово изображение е непрекъснато.

Ако изображението $f : X \to Y$ е взаимно еднозначно, т.е за всяко $x \in X$ съществува единствено $y \in Y$, така че $f(x) = y$ и за всяко $y \in Y$ съществува $x \in X$, така че $y = f(x)$, то съществува обратното изображение f^{-1}. Ако f и f^{-1} са непрекъснати едноверменно, то f се нарича хомеоморфизъм, а пространствата X и Y се наричат хомеоморфни.

Пример 8.4 *Реалната права $(-\infty, +\infty)$ и интервала $(-1, 1)$ са хомеоморфни.*

В този случай е достатъчно да разгледаме изображението

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}(x) : (-\infty, +\infty) \to (-1, 1).$$

Важен частен случай на хомеоморфни изображения са изометричните изображения.

Определение 8.4 *Казваме, че метричните пространтсва (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са изометрични, ако съществува взаимно еднозначно избражение $f : X \to Y$ така че*

$$\rho_X(x, y) = \rho_Y(f(x), f(y)).$$

Изометрията между две пространства показва, че разстоянията между съответните елементи в двете пространства са равни, различна може да бъде само тяхната дефиниция. Ето защо от гледна точка на теорията на метричните пространства изометричните пространства се считат еднакви.

Задачи

Задача 1. Изследвайте за непрекъснатост изображенията:

1.1) $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$;

1.2) $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_n + 2x_{n+1}$;

1.3) $f : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\sin t dt$;

1.4) $f : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-1/3}x(t^5)\sin t dt$;

1.5) $f : C_{[-1,1]} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}(x(-1) + x(1))$;

1.6) $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^2 + k} - x\right) x_k$.

1.7) $f : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\limits_{0 \le t \le 1} x(t)$;
1.8) $f : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\limits_{0 \le t \le 1} x(t)$;
1.9) $f : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)dt$;

1.10) $f : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако съществува } t_0 \in [0,1], \text{ така че } x(t_0) < 0; \\ 1, & \text{ако съществува } t_0 \in [0,1], \text{ така че } x(t_0) > 0 \text{ и } x(t) \ge 0; \\ 1/2, & \text{ако } x(t) \equiv 0; \end{cases}$

Задача 2. Нека X е едно от пространствата $C_{[0,1]}$, $C_1([0,1]$, $D^1_{[0,1]}$, където метриката в D^1 е $\rho(x,y) = \max\left\{\max\limits_{0\le t\le 1}\{|x(t)-y(t)|\}, \max\limits_{0\le t\le 1}\{|x'(t)-y'(t)|\}\right\}$. Изследвайте за непрекъснатост изображенията:
2.1) $F(y) = y(0)$;
2.2) $F(y) = y'(0)$.
Задача 3. Докажете, че F е непрекъснато, където $F : D^1_{[0,1]} \to \mathbb{R}$:
2.1) $F(y) = \int_0^1 (2h(t)y(t) + ty'(t)dt$ и $h \in D^1_{[0,1]}$;
2.2) $F(y) = \int_0^1 |y'(t)|dt$.
Задача 4.Докажете, че числовата функция $F(y) = \int_0^{1/2} y(x) - \int_0^{1/2} y(x)dx$ изобразяваща $C_{[0,1]}$ в $\mathbb{R}$ е непрекъсната. достига ли най–голямата си стойност функцията F върху единичното кълбо?
Задача 5. Изследвайте дали изображението f е Липшицово:
1.1) $f : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, $f(x)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 t^2 s x(t) ds - t$;
1.2) $f : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, $f(x)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 t^m s^n x(s) ds - 3t$;
1.3) $f : C_{[-1,1]} \to C_{[0,1]}$, $f(x)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + 1$;
1.4) $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$, $f(x)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 \cos(\pi(t-s))x(s) ds + 1$.
Задача 6. Докажете, че функцията $\mathrm{dist(x, A)}$ е непрекъсната за всяко непразно подмножество $A \subset X$.
Задача 7. Покажете, че изображението $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинирано чрез

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ако } \ y \ \text{ е ирационално} \\ 2x, & \text{ако } \ y \ \text{ е рационално,} \end{cases}$$

изобразява отворените множества в отворени, но не е непрекъснато.
Задача 8. Изследвайте за непрекъснатост изображенията:
3.1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, за $x^2 + y^0 \ne 0$ и $f(0,0) = 0$;

3.2) $T : C_{[a,b]} \to \mathbb{R}$, $Tf = \int_a^b f(s)ds$;
3.2) $T : C_{[a,b]} \to C_[a,b]$, $Tf(t) = \int_a^t f(s)ds$;
3.3) $T : C^1_{[a,b]} \to C_[a,b]$, $Tf(t) = f^{'}$;
3.4) $T : C_{[0,\pi]} \to \ell_2$, $Tf(t) = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, където редицата $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ са коефициентите на Фурие.

Задача 9. Нека $f : X \to Y$ е изображение върху, т.е $f(X) = Y$ и е непрекъснато. Докажете, че ако A е навсякъде гъсто в X, то и $f(A)$ е навсякъде гъсто в Y.

Задача 10. Нека $A_1, A_2 \subset X$ са затворени множества и $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$. Нека дефинираме $f : X \to \mathbb{R}$ чрез:

$$f(x) = \frac{\mathrm{dist(x, A_1)}}{\mathrm{dist(x, A_1) + dist(x, A_2)}}.$$

Докажете, че f е непрекъснато изображение, $0 \leq f(x) \leq 1$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A_1$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A_2$. Нека да положим $B_1 = f^{-1}([0, 1/2))$ и $B_2 = f^{-1}((1/2, 1])$. Докажете, че B_1, B_2 са отворени множества и $A_i \subset B_i$.

8.2 Равномерна непрекъснатост и равномерна сходимост.

Определение 8.5 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са две метрични пространства и $f : X \to Y$. Казваме, че f е равномерно непрекъсната, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че $\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ за всеки две $x, y \in X$, удовлетворяващи $\rho_X(x, y) < \delta$.*

Пример 8.5 *Функцията $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ от $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната.*

За всеки две $x < y$ от теоремата за средните стойности следва, че съществува $t \in (0, 1)$, така че

$$|f(x) - f(y)| = |f^{'}(t)||x - y| = \left| \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} \right| |x - y| \leq |x - y|,$$

защото $|f^{'}(t)| \leq 1$. Следователно ако за $\varepsilon > 0$ изберем $\delta = \varepsilon$, тогава за всеки $x, y \in \mathbb{R}$, такива че $|x - y| < \delta$ е изпълнено

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| < \delta = \varepsilon,$$

т.е. f е равномерно непрекъсната.

Пример 8.6 *Функцията $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е равномерно непрекъсната.*

Наистина нека $\delta > 0$ и да положим $x = 1/\delta + \delta/2$, $y = 1/\delta$. Тогава $|x - y| = \delta/2 < \delta$, но $|x^2 - y^2| > 1$.

Ако обаче разгледаме същата функция дефинирана в затворения интервал $[-a, a]$, тогава тя е равномерно непрекъсната. Наистина, ако $\delta < \varepsilon/2a$ и $x, y \in [-a, a]$ с $|x - y| < \delta$, тогава

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| < 2a|x - y| < \varepsilon.$$

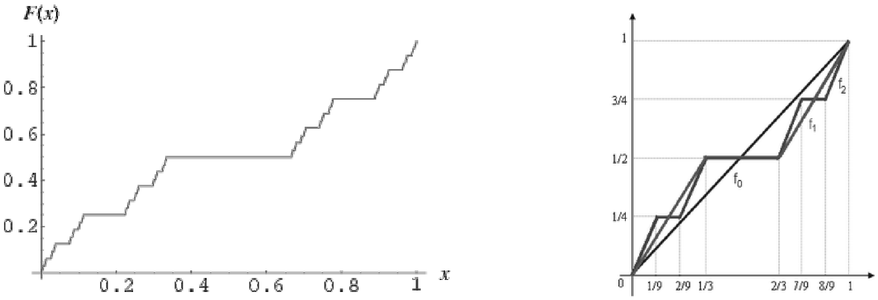
Ще дефинираме функцията на Кантор $C : [0,1] \to \mathbb{R}$ индуктивно. Нека F е канторовото множество. Дефинираме $C(x) = 1/2$ за всяко $x \in [0,1]\backslash F_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. На следващата стъпка ще дефинираме C върху интервалите $[0,1]\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{2} F_i\right) = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \bigcup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$. Нека $C(x) = 1/4$ за всяко $x \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ и $C(x) = 3/4$ за всяко $x \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$. После ще дефинираме C върху интервалите $[0,1]\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{3} F_i\right) = \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right] \bigcup \left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right] \bigcup \left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right] \bigcup \left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right]$. Нека $C(x) = 1/8$ за всяко $x \left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right]$, $C(x) = 3/8$ за всяко $x \left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right]$, $C(x) = 5/8$ за всяко $x \left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right]$ и $C(x) = 7/8$ за всяко $x \left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right]$. Ако сме дефинирали функцията C върху интервалите $[0,1]\backslash \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, то разглеждаме интервалите $[0,1]\backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$, които са 2^n на брой и с дължина $\frac{1}{3^{n+1}}$. Нека $C(x) = \frac{i}{2^{n+1}}$ във интервал i от $[0,1]\backslash \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$, броен от ляво на дясно. Така дефинираме индуктивно функцията C върху множеството $[0,1]\backslash F$.

По конструкция за всеки $x, y \in ([0,1]\backslash F)$, такива че $|x-y| < \frac{1}{3^n}$ следва неравенството $|C(x)-C(y)| < \frac{1}{2^n}$. Според определението за равномерна непрекъснатост следва, че функцията C е равномерно непрекъсната върху множеството $[0,1]\backslash F$. Съществува единствено непрекъснато продължение на C върху $[0,1]$, защото множеството $[0,1]\backslash F$ е навсякъде гъсто в $[0,1]$.

Лесно се съобразява, че функцията C е монотоно разтяща. Наистина за всяко $0 \leq x < y \leq 1$ съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq n_0$ да съществуват два съседни интервала $\Delta_i, \Delta_{i+1} \in [0,1]\backslash \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ удовлутворяващи $x < inf\{\Delta_i\} < \sup\{\Delta_{i+1}\} < y$ и следователно $f(x) < f(\Delta_i) < f(\Delta_{i+1}) < f(y)$. От монотоността на C следва, че тя множеството от точки, където тя не е диференцируема има мярка нула.

Интересен факт е че въпреки, че функцията на Кантор е монотоно разтяща от 0 до 1, тя е строго разтяща върху множество с мярка нула.

Възможно е функцията на Кантор да се дефинира като граница на редица от фун-



Фигура 43: Функцията на Кантор

кции. Нека $f_0(x) = x$. Ако сме дефинирали f_n, то дефинираме

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} f_n(3x), & x \in [0, 1/3] \\ \dfrac{1}{2}, & x \in [1/3, 2/3] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} f_n(3x-2), & x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Определение 8.6 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са метрични пространства. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от функции $f_n : X \to Y$ и нека $f : X \to Y$. Редицата от функции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича поточково сходяща към f, ако за всяко $x \in X$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, така че неравенството*

$$\rho_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

е изпълнено за всяко $n \geq \nu$.

Определение 8.7 *Редицата от функции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича равномерно сходяща към f, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, така че неравенството*

$$\rho_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

е изпълнено за всяко $n \geq \nu$ и всяко $x \in X$.

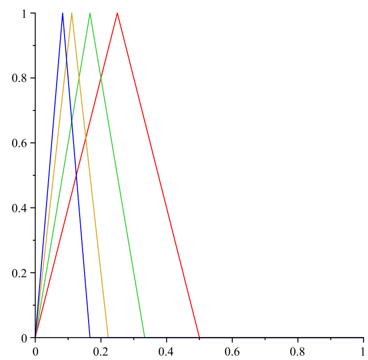
Понятието равномерна сходимост на редица от функции е по-полезно от поточковата сходимост.

Пример 8.7 *Нека $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са дефинирани с формулата:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ nx & 0 \leq x \leq 1/n, \\ -nx + 2 & 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & x \geq 2/n. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че редицата f_n е поточково сходяща към функцията $f(x) \equiv 0$ (Фигура 44). Наистина за всяко $x \neq 0$ съществува n_0, такова че $\dfrac{2}{n_0} < x$ и следователно $f_n(x) = 0$ за всяко $n \geq n_0$.

От друга страна редицата f_n не е равномерно сходяща, защото колкото и голямо $n_0 \in \mathbb{N}$ да изберем, то за всяко n имаме $f_n(1/n) = 1$ и следователно $|f_n(1/n) - f(1/n)| = 1$.



Фигура 44:

Пример 8.8 *Нека* $f_n : [0,1] \to [0,1]$ *са дефинирани с формулата:* $f_n(x) = x^n$*.*

Лесно се вижда, че редицата f_n е поточково сходяща към функцията (Фигура 45)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

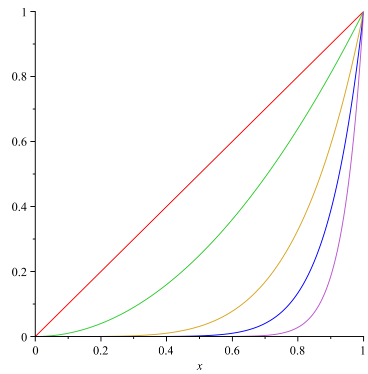
Наистина за всяко $x \neq 0$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n_0, такова че $x^n < \varepsilon$ за всяко $n \geq n_0$ и следователно $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ако $x = 1$, тогава $f_n(1) = 1^n = 1$.

От друга страна редицата f_n не е равномерно сходяща. Ако допуснем, че редицата е равномерно сходяща, тогава ще съществува n_0, такова че за всяко $x \in [0,1]$ да бъде изпълнено неравенството $|f_n(x) - f(x)| < 1/2$ за всяко $n \geq n_0$. Нека изберем $x_n = (3/2)^{1/n}$. Тогава $f_n(x_n) = 3/2 > 1/2$, което е противоречие.

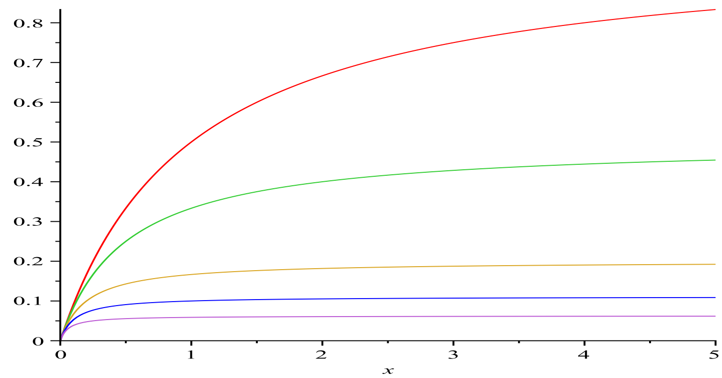
Пример 8.9 *Нека* $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *са дефинирани с формулата:* $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$*.*

Лесно се вижда, че редицата f_n е поточково сходяща към функцията $f(x) \equiv 0$ (Фигура 46).

От неравенството $|f_n(x) - 0| \leq \dfrac{1}{n}$ получаваме, че за всяко $\varepsilon > 0$ ако изберем n_0, така че $1/n_0 < \varepsilon$, тогава за всяко $n \geq n_0$ и всяко $x \in [0,+\infty)$ ще бъде в сила неравенството $|f_n(x) - 0| \leq \varepsilon$. Следователно редицата f_n е равномерно сходяща към $f(x) \equiv 0$.



Фигура 45:



Фигура 46: $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$

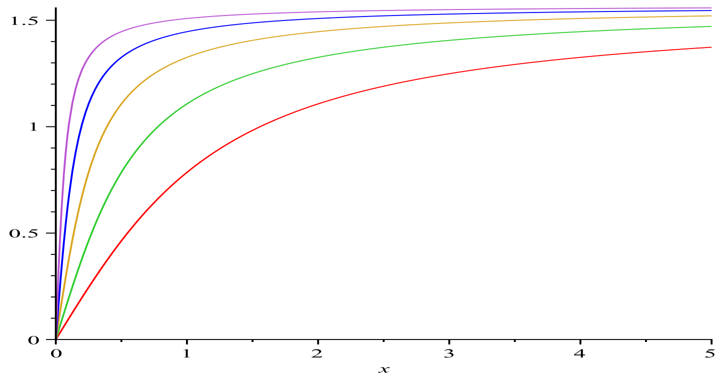
Пример 8.10 *Нека $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са дефинирани с формулата: $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$.*

Лесно се вижда, че редицата f_n е поточково сходяща към функцията (Фигура 47)

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

но не е равномерно сходяща. Ако обаче разгледаме $X = [\alpha, +\infty)$ за някое $\alpha > 0$, тогава редицата $f_n(x)$ е равномерно сходяща към f.

Теорема 8.4 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са метрични пространства. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от непрекъснати функции $f_n : X \to Y$ и нека $f : X \to Y$. Ако $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща към f, то f е непрекъсната.*



Фигура 47:

Доказателство: Нека $x_0 \in X$ е произволно избрано. Нека $\varepsilon > 0$. От равномерната сходимост на редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ към f следва че съществува $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такова че за всяко $x \in X$ е в сила неравенството $\rho_Y(f_n(x), f(x) < \varepsilon/3$ е изпълнено за всяко $n \geq n_0$. От непрекъснатостта на функцията f_{n_0} в точката x_0 следва, че съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in B_{x_0}(\delta)$ е изпълнено неравенството $\rho_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \varepsilon/3$. От неравенството

$$\rho_Y(f(x), f(x_0)) \leq \rho_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \rho_Y(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

получаваме, че f е непрекъсната в точката $x_0 \in X$. $\square$

Задачи

Задача 1. Нека (X, ρ), (Y, d) са две метрични пространства и A е навсякъде гъсто множество в X:
а) Докажете, че ако $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ са непрекъснати изображения, такива че $f = g$ върху A, то $f = g$ върху X;
б) Ако $f : A \to Y$ е равномерно непрекъсната функция, покажете, че съществува единствена непрекъсната функция $F : X \to Y$, така че $F = f$ върху A;
в) Нека $X = \mathbb{R} = Y$ и $A = \mathbb{Q} \subset X$, намерете функция $f : Q \to R$, която е непрекъсната върху Q но не се продължава до непрекъсната функция върху R.
Задача 2. Нека (X, τ_1), (Y, τ_2) са две топологични пространства, A е навсякъде гъсто множество в X и Y е хаусдорфово. Докажете, че ако $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ са непрекъснати изображения, такива че $f = g$ върху A, то $f = g$ върху X.
Задача 3. Нека (X, ρ), (Y, d) са две метрични пространства и $A, B \subset X$, са такива че $\mathrm{dist}_X(A, B) = 0$. Съществува ли $f : X \to Y$, такова че $\mathrm{dist}_Y(f(A), f(B)) \neq 0$:
а) Ако f е непрекъснато изображение;
б) Ако f е равномерно непрекъснато изображение.
Задача 4. Нека X е метрично пространство и $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ е редица от функции. Тогава:

а) Ако $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$–ограничени и равномерно сходящи към f, то $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ са равномерно ограничени и f е ограничена.
б) Ако f_n–ограничени и сходящи към f, то f е ограничена.
г) f_n равномерно сходящи към f и g_n равномерно сходящи към g, то $f_n + g_n$ равномерно сходящи към $f + g$. Ако допълнително Ако f_n, g_n са ограничени, то $f_n g_n$ равномерно сходящи към fg.
Задача 5. Покажете, че f_n и g_n са равномерно сходащи, но $f_n g_n$ не е равномерно сходящи към fg, където $f_n = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ и

$$g_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x = 0, x - \text{ирационално} \\ q + 1/n, & x \in \mathbb{Q}, x = p/q \end{cases}$$

Задача 6. Нека (X, ρ) и (Y, d) са метрични пространства. Нека $f, g : X \to Y$ са непрекъснати изображение. Докажете, че множеството

$$E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

е отворено множество.
Задача 7. а) Покажете, че редичата от полиноми $P_0(x) = 1$ и $P_{n+1}(x) = P_n + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$ са равномерно сходащи към $\sqrt{x}$ интервала $[0, 1]$.
б) Покажете, че съществува редица от полиноми равномерно сходяща към $|x|$ в $[-1, 1]$.

9 Попълване на метрични пространства

9.1 Попълване на метрични пространства

Определение 9.1 *Нека (X,ρ) е метрично пространство. Казваме, че пълното метрично пространство (X^*,ρ) е попълнение на (X,ρ), ако*
1) (X,ρ) е подпространство на (X^*,ρ);
2) (X,ρ) е навсякъде гъсто в (X^*,ρ).

Пример 9.1 *Пространството $\mathbb{R}$ е попълнение на $\mathbb{Q}$.*

Теорема 9.1 *Всяко метрично пространство (X,ρ) има попълнение (X^*,ρ) и това попълнение е единствено с точност до изометрия.*

Доказателство: Първо ще докажем единствеността. Нека (X^*,ρ^*), (X^{**},ρ^{**}) са две попълнения на (X,ρ). Ще покажем, че съществува взаимно еднозначно съответствие φ на (X^*,ρ) и (X^{**},ρ) със свойствата:
1) $\varphi(x)=x$ за всяко $x\in X$;
2) ако $\varphi(x^*)=x^{**}$ и $\varphi(y^*)=y^{**}$, то $\rho^*(x^*,y^*)=\rho^{**}(x^{**},y^{**})$.

Дефинираме φ по следния начин. Нека x^* е произволна точка от X^*. От определението за попълване на просранство следва, че съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, която е сходаща към x^*. Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ се съдържа и в X^{**}. От пълнотота на (X^{**},ρ^{**}) следва, че $\lim_{n\to\infty}x_n=x^{**}$ за някое $x^{**}\in X^{**}$. Ясно е че x^{**} не зависи от избора на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходяща към x^*. Полагаме $\varphi(x^*)=x^{**}$. Ще покажем, че φ е търсената изометрия.

Наистина по построение $\varphi(x)=x$ за всяко $x\in X$. Нека

$$\{x_n\}\to x^*\in X^* \quad \text{и} \quad \{x_n\}\to x^{**}\in X^{**},$$

$$\{y_n\}\to y^*\in X^* \quad \text{и} \quad \{y_n\}\to y^{**}\in X^{**},$$

тогава от непрекъснатостта на функцията разстояние следва

$$\rho^*(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho^*(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$$

и

$$\rho^{**}(x^{**},y^{**})=\lim_{n\to\infty}\rho^{**}(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$$

Следователно $\rho^*(x^*,y^*)=\rho^{**}(x^{**},y^{**})$.

Остава да докажем съществуването на попълнение. Идеята е същата, както в теорията на Кантор за реалните числа.

Нека (X,ρ) е произволно метрично пространство. Казваме, че две фундаментални редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ са еквивалентни и означаваме с $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\sim\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$. Термина "еквивалентни" е оправдан от факта, че така дифинираната релация е рефликсивна, симетрична и транзитивна. Така получаваме, че всички фундамуентални редици съставени от точки на X се разпадат на класове от еквивалентни помежду си редици. Пространството X^* се състои от всички класове еквивалентни помежду си фундаментални редици. Нека $x^*, y^* \in X^*$ и са два такива класа. Избираме по една редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ от всеки от тези класове и полагаме

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{33}$$

Първо трябва да докажем коректността на така дефиниранито разстояние, т.е. че границата (33) съществува и не зависи от избора на редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

От неравенството

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$$

получаваме, че за достатъчно големи $n, m \in \mathbb{N}$ е в сила

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

понеже редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ са фундаментални. Следователно редицата от реални числа $s_n = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ удовлетворява условието на Коши от където следва, че има граница.

Ще покажем, че границата не зависи от избора на фундаменталните редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Наистина нека

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \in x^* \quad \text{и} \quad \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n'\}_{n=1}^{\infty} \in y^*.$$

От неравенството

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n')| \leq \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n')$$

и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n'\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n').$$

Сега ще покажем, че (X^*, ρ^*) е метрично пространство.

Аксиома 1) Следва непосредствено от опредилението за еквивалентни фундаментални редици.

Аксиома 2) Очевидно е изпълнена.

Аксиома 3) От неравенството на триъгълника в (X, ρ) получаваме неравенството

$$\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

След граничен преход при $n \to \infty$ получаваме

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n).$$

т.е.

$$\rho^*(x^*, z^*) \le \rho^*(x^*, y^*) + \rho^*(y^*, z^*).$$

Остава да покажем, че можем да разглеждаме (X, ρ), като подпространство на (X^*, ρ^*).

На всяка точка $x \in X$ отговаря един клас от еквивалентни фундаментални редици, а именно всички редици сходящи към x. Този клас не е празен, понеже съдържа константната редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = x$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ако $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, то $\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Следователно изображението при което на всяка точка съпоставяме класа от сходяще към нея фундаментални редици изометрично изобразява (X, ρ) в (X^*, ρ^*).

От казаното по-горе седва, че можем да не различаваме (X, ρ) и неговота влагане в (X^*, ρ^*), понеже те са изометрични.

Ще докажем, че (X, ρ) е пълно в (X^*, ρ^*). Нека $x^* \in X^*$ и $\varepsilon > 0$. Избираме произволен представител $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ на класа x^*. Съществува $N \in \mathbb{N}$ така че за всеки $n, m \ge N$ е изпълнено неравенството $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Тогава е в сила

$$\rho^*(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \le \varepsilon$$

за всяко $n \ge N$ т.е. произволна околност на точката x^* съдържа точка от X и следователно затварянето на X е X^*.

Остава да докажем, че (X^*, ρ^*) е пълно метрично пространство.

По построение всяка фундаментална редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от X е сходяща към някоя точка от X^*, а именно x^*, която представлява класа от еквивалентни на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментални редици. Нека $\{x_n =^*\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална редица в X^*. От факта, че (X, ρ) е гъсто в (X^*, ρ^*) следва, че съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, която е еквивалентна на $\{x_n =^*\}_{n=1}^{\infty}$. Достатъчно е да изберем x_n, така че $\rho^*(x_n, x_n^*) < 1/n$. Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална в X и следователно е сходаща към x^*. Следователно $\lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n^*, x^*) = 0$.
$\square$

Задачи

Задача 1. Нека (X, ρ) е метричното пространство. Изследвайте, дали (X, ρ) е пълно и ако не е пълно опишете попълнението му:
а) $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;
б) $X = (-\pi, \pi)$, $\rho(x, y) = \left|\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$;
в) $X = \mathbb{Z}$, $\rho(m, n) = \dfrac{|m-n|}{\sqrt{(m^2+1)(n^2+1)}}$;
г) $X = \mathbb{Z}$, $\rho(m, n) = 10^{-k}$, където k е броя на нулите с които завършва десетичния запис на $|n - m|$.
Задача 2. Нека (X, ρ) е метричното пространство, където X е множеството от всички полиноми с реални коефициенти. Изследвайте, дали (X, ρ) е пълно и ако не е пълно опишете попълнението му:

а) $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |f''(x) - g''(x)|$;

б) $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)| + |f'(0) - g'(0)|$;

в) $\rho(f,g) = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \left|\dfrac{f^{(k)}(0) - g^{(k)}(0)}{k!}\right|$;

г) $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |f'(x) - g'(x)|$;

д) $\rho(f,g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\dfrac{f^{(k)}(0) - g^{(k)}(0)}{k!}\right| + \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)|$;

е) $\rho(f,g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\dfrac{f^{(k)}(0) - g^{(k)}(0)}{k!}\right| + \max\limits_{x\in[0,2]} |f(x) - g(x)|$.

Задача 3. Нека $C(-\infty,+\infty)$ е пространството от всички ограничени и непрекъснати функции с разстояние $\rho(f,g) = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |f(x) - g(x)$. Нека

$$C_0(-\infty,+\infty) = \{f \in C(-\infty,+\infty) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$$

и

$$C_{00}(-\infty,+\infty) = \{f \in C(-\infty,+\infty) : \mathrm{diam}(\mathrm{supp} f(x)) < \infty\}.$$

Докажете, че $C(-\infty,+\infty)$ и $C_0(-\infty,+\infty)$ са пълни метрични пространства . Докажете, че $C_{00}(-\infty,+\infty)$ не е пълно метрични пространство и намерете попълнението му.

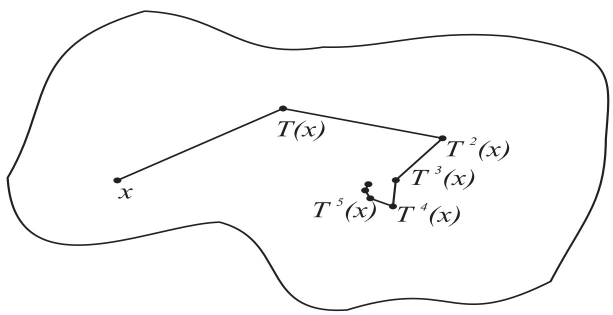
10 Принцип на свиващите изображения.

10.1 Теорема за свиващите изображения.

Редица въпроси свързани със съществуване и единственост на решения на уравнения (алгебрични, диференцални или интегрални), могат да се фурмолират във вид на задача за съществуване на неподвижна точка на някое изображение.

Определение 10.1 *Нека (X,ρ) е метрично пространстов. Казваме че изображението $T : X \to X$ е свиващо (Фигура 48), ако съществува $0 < \alpha < 1$, така че*

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y). \tag{34}$$



Фигура 48: Свиващо изображение

Твърдение 10.1 *Нека (X,ρ) е метрично пространстов. Ако $T : X \to X$ е свиващо изображение, тогава T е непрекъснато.*

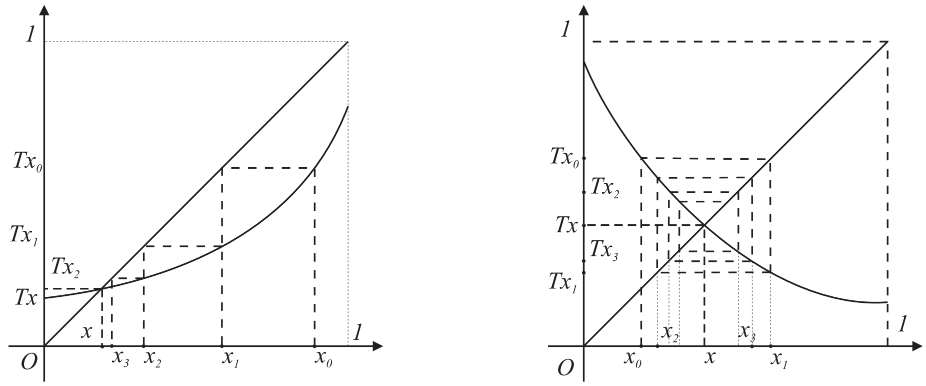
Доказателство: Наистина за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходяща към x от $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$ и (34), следва че $\lim_{n\to\infty} \rho(Tx_n, Tx) = 0$. □

Определение 10.2 *Нека (X,ρ) е метрично пространстов. Точката x се нарича неподвижна точка за изображението $T : X \to X$, ако $Tx = x$.*

Теорема 10.1 *Нека M е затворено непразно множество в пълното метрично пространство (X,ρ). Нека изображението $f : M \to M$ е свиващо, т.е.*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq k\rho(x, y)$$

за всеки $x, y \in M$ и някое $0 \leq k < 1$. Тогава
a) Съществува единствено решение на уравнението $f(x) = x$. За всяко $x_0 \in M$ редицата



Фигура 49:

$x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ има за граница решението на уравнението $f(x) = x$ (Фигура 49).
б) За всяко $n = 0, 1, 2\ldots$ имаме оценки на грешката

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k}\rho(x_1, x_0) \quad и \quad \rho(x_{n+1}, x) \leq \frac{k}{1-k}\rho(x_{n+1}, x_n).$$

в) За скоростта на сходимост имаме оценка $\rho(x_{n+1}, x) \leq k\rho(x_n, x)$.

Доказателство: а) Първо ще покажем, че редицата $x_n = Tx_{n-1}$ е фундаментална редица. Наистина

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq k\rho(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k\rho(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq k^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \cdots \leq k^{n-1}\rho(Tx_1, Tx_0) \leq k^n\rho(x_1, x_0).\end{aligned}$$

Използвайки неравенството на триъгълника получаваме за $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+m}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+m-1})\rho(x_1, x_0) \\ &\leq k^n(1 + k + k^2 + \cdots)\rho(x_1, x_0) = \frac{k^n}{1-k}\rho(x_1, x_0)\end{aligned} \tag{35}$$

неравенството и следователно редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална, защото $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$. От факта, че X е пълно метрично пространство следва че $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ще покажем, че x е решение на уравнението $Tx = x$. Наистина от непрекъснатостта на изображението T следва, че

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Остана да докажем, че решението на уравнението $Tx = x$ е единствено. Нека съществуват две решения $Tx = x$ и $Ty = y$. Тогава

$$\rho(x,y) \leq \ k\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y),$$

т.е. $x = y$.

б) Използвайки непрекъснатостта на метриката и (35) получаваме

$$\rho(x_n, x) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{k^n}{1-k}\rho(x_1, x_0).$$

Нека сега $n, m \in \mathbb{N}$. Тогава са в сила неравенствата:

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_{n+m+1}) &\leq \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + \rho(x_{n+m}, x_{n+m+1}) \\ &\leq (k + k^2 + \cdots + k^m)\rho(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

и след граничен преход при $m \to \infty$ получаваме

$$\rho(x_{n+1}, x) \leq \frac{k}{1-k}\rho(x_n, x_{n+1}).$$

в) За да завършим доказателството, нека отбележим, че

$$\rho(x_{n+1}, x) = \rho(Tx_n, Tx) \leq k\rho(x_n, x).$$

□

Теорема 10.2 *Нека M е непразно множество в пълното метрично пространство (X, ρ), съдържащо затворена околност $B_{y_0}[r]$ на точката y_0. Нека оператора $T : M \to M$ удовлетворява за всеки две $x, y \in B_{y_0}(r)$ неравенствата:*

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y), \quad \rho(Ty_0, y_0) \leq (1-k)r,$$

където $0 < k < 1$. Тогава в $B_{y_0}[r]$ съществува единствено решение на уравнението $Tx = x$.

Доказателство: Теоремата следва непосредствено от принципа на свиващите изображение и от неравенството

$$\rho(Tx, y_0) \leq \rho(Tx, Ty_0) + \rho(Ty_0, y_0) \leq k\rho(x, y_0) + (1-k)r \leq r$$

т.е. $Tx \in B_{y_0}[r]$. □

Теорема 10.3 *Нека M е затворено непразно множество в пълното метрично пространство (X, ρ). Нека за изображението $T : M \to M$ съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $F = T^n$ е свиващо. Тогава уравнението $Tx = x$ ма единствено решение.*

Доказателство: Нека фиксираме $k \in \mathbb{N}$, така че $F = T^k$ е свиващо. Според Теорема 10.1 съществува единствена неподвижна точка x за F и $\lim_{n\to\infty} F^n x_0 = x$ за всяко $x_0 \in M$. От непрекъснатостта на T следва редицата от равенства

$$Tx = \lim_{n\to\infty} TF^n x_0 = \lim_{n\to\infty} TT^{kn} x_0 = \lim_{n\to\infty} T^{kn} T x_0 = \lim_{n\to\infty} F^n T x_0 = x.$$

Следователно редицата $\{F^n(Tx_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към неподвижната точка x на изображението F и следователно $Tx = x$. $\square$

Задачи

Задача 1. Докажете, че изображението $T : [0,1] \to [0,1]$, дефинирано чрез:

$$Tx = \frac{3}{10} + \frac{2}{10}x + \frac{5}{10}x^2$$

притежава точно две неподвижни точки. Намерете ги и покажете, че за всяко $x_0 \neq 0$ редицата от последователни приближения клони към по-малката от неподвижните точки.

Задача 2. Нека изображението $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дефинирано с

$$\varphi(x) = x - \operatorname{arctg}(x) + \pi/2$$

Покажете, че $|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$ за всеки $x, y \in \mathbb{R}$ и покажете, че φ няма неподвижна точка.

Задача 3. Конструирайте пример на непълно метрично пространство и свиващо изображение, което няма неподвижна точка.

Задача 4. Нека $\varphi : \ell_2 \to \ell_2$ е дефинирано с

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = (\tfrac{1-\rho(x,0)}{2}, x_1, x_2, \dots).$$

Покажете, че φ е непрекъснато изображение без неподвижна точка.

Задача 5. Разгледайте изображенията $T_n : C_{[0,\alpha]} \to C_{[0,\alpha]}$, $n \in \mathbb{N}$, дефинирани с формулата $T_n(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ уравнението $T_n(f) = f$ има единствено решение.

Задача 6. Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство. Нека T и F а две свиващи изображение с коефициенти на свиване k_T и k_F. Казваме, че изображенията T и F са ε–близки, ако $\rho(Tx, Fx) < \varepsilon$ за всяко $x \in X$. Докажете, че неподвижните точки x_T и x_F се намират на разстояние не по-голямо от $\dfrac{\varepsilon}{1 - \max\{k_T, k_F\}}$.

Задача 7. Нека $\varphi : B_{c_0} \to S_{c_0}$ е дефинирано с

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots).$$

Покажете, че φ е изометрия без неподвижна точка.

Задача 8. Нека $A = \{x(t) \in C_{[0,1]} : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$ и изображението $\varphi : A \to A$ е дефинирано с $\varphi(x)(t) = tx(t)$. Покажете, че $\rho_{C_{[0,1]}}(\varphi(x), \varphi(y)) < \rho_{C_{[0,1]}}(x, y)$ и че φ няма неподвижна точка.
Задача 9. Нека $g \in C_{[0,1]}$ и $\int_0^1 |g(s)|ds \leq r < 1$. Покажете ,че за всяко $f \in C_{[0,1]}$ съществува единствено $u \in C_{[0,1]}$, което е решение на уравнението

$$u(t) = \int_0^t g(t-s)u(s)ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Задача 10. Разгледайте функцията $f(x) = e^{x/4}$ дефинирана в интервала $[0, 1]$. Покажете, че f има неподвижна точка в $[0, 1]$. Намерете оценка на грешката.
Задача 11. Разгледайте функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана чрез

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ e^{x/2}, & x \leq 0. \end{cases}$$

а) Покажете, че $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ за $x \neq y$.
б) Покажете, че f няма неподвижна точка.
Задача 12. Разгледайте функцията $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2x}$ дефинирана в интервала $[1, 2]$. Покажете, че f е свиващо.
Задача 13. Разгледайте функцията $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ дефинирана в интервала $(1, +\infty)$. Свиващо ли е f и има ли неподвижна точка.
Задача 14. Разгледайте изображението $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирано чрез $T(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$. За кои начално стойности $x_0 \in \mathbb{R}$, редицата от последователни изображения $x_n = T(x_{n-1})$ е сходяща и към кои точки?
Задача 15. Докажете, че редицата от дроби

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}, \ldots$$

е сходяща и намерете границата ѝ.
Задача 16. а) Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство и $f : X \to X$ е непрекъснато изображение, такова че за всеки $x, y \in X$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(f^n(x), f^n(y))$ е сходящ. Покажете, че f притежава единствена неподвижна точка.
б) Разгледайте функцията $x \to \max\{x - 1, 0\}$ дефинирана в интервала $[0, \infty)$. Покажете, че тази функция удовлетворява условието а), но не е свиващо изображение.
в) Нека $\Phi : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$, която удовлетворява липшицовото условие

$$|\Phi(x, t) - \Phi(y, t)| \leq M|x - y| \text{ за всички } x, y \in \mathbb{R},\ t \in [a; b]$$

и нека $g \in C_{[a;b]}$. Дефинираме $F : C_{[a;b]} \to C_{[a;b]}$ чрез $F(h)(t) = g(t) + \int_a^t \Phi(h(s), s)ds$. Покажете, че е в сила неравенството

$$|F^n(h)(t) - F^n(k)(t)| \leq \frac{1}{n!} M^n (t-a)^n \rho_\infty(k, h),$$

за всеки $h, k \in C_{[a;b]}$ и $t \in [a, b]$. Покажете, че F има единствена неподвижна точка.

г) Дайте контра пример на условие а), ако не се иска функцията f да е непрекъсната.

Задача 17. При верижна реакция всяка частица поражда случаен брой нови частици. Всяка от тези новопородени частици действа независимо и поражда случаен брой нови частици. този процес продължава до безкрайност. Нека p_k е вероятността, че частичцата поражда k а брой частици: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \cdots \in [0, 1]$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Стартираме от една частица процеса и нека разгледаме вероятноста процеса да спре, т.е. популацията да изчизне. Нека x_n е вераятността, че $n^{\text{тата}}$ генерация е вече изчезнала. Нека отбележим, че $(n+1)^{\text{вата}}$ генерация се състои от частици, които са $n^{\text{та}}$ генерация наследници на елементи от първата генерация. За да изчезне популацията преди или по време на $(n+1)^{\text{вата}}$ генерация породена от първата частица трябва да изчезне. Следователно:

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x_n)^k.$$

С други думи $x_{n+1} = Tx_n$, където $T : [0, 1] \to [0, 1]$ е дефинирано с

$$Tx = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad x \in [0, 1].$$

така, че вероятността x^* популацията да изчезне е границата $\lim_{n\to\infty} x_n$, която е неподвижната точка та изображението $x^* = Tx^*$.

Задача 18. Нека $T : [0, 1] \to [0, 1]$ дефинирано с

$$Tx = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1, & \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Единственато неподвижна точка за T е $x^* = 0$. Нека $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ е двоичния запис на числото $x \in (0, 1]$. Покажете, че $Tx = 0, \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots$, $T^2x = 0, \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \ldots$, $T^n x = 0, \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3} \ldots$. обърнете внимание на хаотичния харектер на редицата $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$.

Задача 19. Нека $T : [0, 1] \to [0, 1]$ дефинирано с $Tx = 4x(1-x)$. Покажете, че T има две неподвижни точки. Намерете ги и дайте примери на редици клонящи към тях.

10.2 Приложения на Теоремата на Банах за неподвижната точка.

10.2.1 Решаване на уравнения $f(x) = 0$.

Теорема 10.4 *Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нека $f(a) = 0$ и в интервала $[a - r, a + r]$ функцията f е Липшицова с константа $0 < K < 1$, т.е.*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \text{за всеки} \ \ x, y \in [a - r, a + r].$$

За всяко $x_0 \in [a - r, a + r]$ редицата от последователни приближения $x_n = f(x_{n-1})$ е сходяща към решението a и е в сила оценката $|x_n - a| \leq K^n|x_0 - a|$.

Доказателство: Интервала $[a - r, a + r]$ е пълно метрично пространство. Нека $x \in [a - r, a + r]$ и нека положим $y = f(x)$. В сила е $|y - a| = |f(x) - f(a)| \leq K|x - a| < r$. Следователно $y = f(x) \in [a - r, a + r]$, т.е. $f : [a - r, a + r] \to [a - r, a + r]$. Изображението f е свиващо и следователно от Теорема 10.1 следва доказателството. □

Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нека $f(a) = 0$ и ψ е непрекъсната функция в околност на точката a и $\psi(a) \neq 0$. Полагаме $\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$. Тогава уравнението $x = \varphi(x)$ има корен $x = a$. Функцията ψ може да се избере така, че метода на последователните приближения да е сходящ към a.

Теорема 10.5 *(Метод на хордите) Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нека $f(a) = 0$ нека в някой околност на точката $[a - r, a + r]$ функцията f заедно с f' и f'' са непрекъснати. Нека в тази околност f' и f'' не си сменят знака. Нека $z \in [a - r, a + r]$ е такава, че $f(z)f''(z) > 0$. Тогава, ако $\psi(x) = \dfrac{x - z}{f(x) - f(z)}$ и положим $\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$, то уравнението*

$$x = \varphi(x)$$

има корен $x = a$, който се получава по метода на последователните приближения:

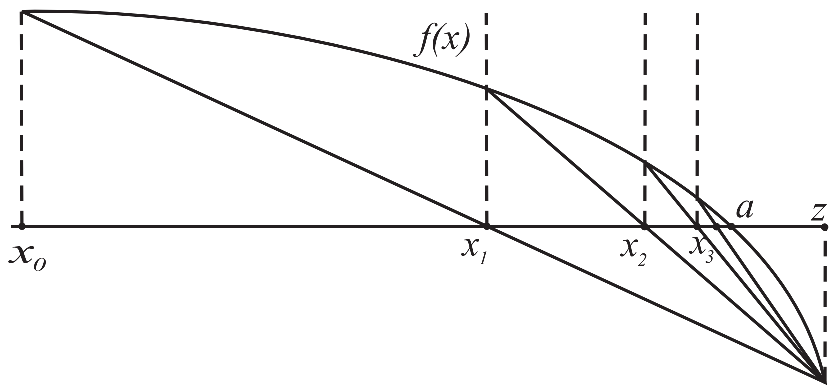
$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - z}{f(x_{n-1}) - f(z)} f(x_{n-1}) = \frac{zf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(z)}{f(x_{n-1}) - f(z)}$$

Доказателство: Прилагайки формулата на Тейлор

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(\xi) \ \ \text{за някое} \ \ \xi \ \ \text{между} \ \ a \ \ \text{и} \ \ x.$$

Ако изберем $x = z$ в горното равенство, то получаваме равенството

$$f(z) + (a - z)f'(a) = \frac{(z - a)^2}{2!} f''(\xi). \tag{36}$$



Фигура 50: Метод на секущите

След деференциране $\varphi'(x)|_{x=a} = \left(x - \dfrac{x-z}{f(x)-f(z)}f(x)\right)'\Big|_{x=a}$ получаваме равенството

$$\varphi^{'}(a) = \frac{f(z) + (a-z)f^{'}(a)}{f(z)}. \tag{37}$$

От равенствата (36) и (37) получаваме

$$\varphi^{'}(a) = \frac{(z-a)^2}{2}\frac{f^{''}(\xi)}{f(x_0)}.$$

От непрекъснатостта на f'' в интервала $[a-r, a+r]$ следва, че съществува

$$M = \max_{x\in[a-r,a+r]}\{|f''(x)|\} < \infty.$$

Следователно, ако изберем z достатъчно близко до a, (например $|z-a| < k\dfrac{2.f(z)}{M}$ за някое $k \in (0,1)$) ще бъде изпълнено $|\varphi^{'}(a)| < 1$ и следователно от непрекъснатостта на φ съществува околност на точката a така, че в нея $|\varphi^{'}(x)| \leq K < 1$. От Теорема 10.1 следва, че за всяко начално приближение x_0 от тази околност, редицата от последователните приближения

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) = \frac{zf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(z)}{f(x_{n-1}) - f(z)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

клони към a.

За оценка на грешката използваме равенството $f(x_n) = f(x_n) - f(a) = f^{'}(\xi)(x_n - a)$ и получаваме

$$|x_n - a| \leq \left|\frac{f(x_n)}{f^{'}(\xi)}\right| \leq \frac{f(x_n)}{m},$$

където $m = \min\{|f'(\xi)| : \xi$ принадлежи на интервал с краища точките x_0 и $z\}$. $\square$

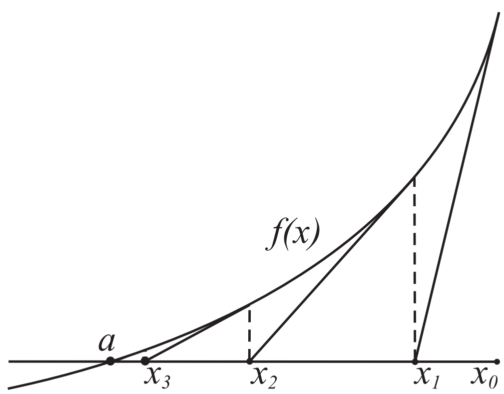
Теорема 10.5 известна още като метод на секущите, което се илюстрира на (Фигура 50).

Теорема 10.6 *(Метод на Нютон) Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нека $f(a) = 0$ нека в някой околност на точката $[a-r, a+r]$ функцията f заедно с f' и f'' са непрекъснати. Нека в тази околност f' и f'' не си сменят знака. Нека $z \in [a-r, a+r]$ е такава, че $f(z)f''(z) > 0$. Тогава, ако $\psi(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$ и положим $\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$, то уравнението*

$$x = \varphi(x)$$

има корен $x = a$ който се получава по метода на последователните приближения:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$



Фигура 51: Метод на Нютон

Доказателство: Пресмятайки φ', получаваме

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

и следователно $\varphi'(a) = 0$. Следователно съществува околност на точката a така, че в нея $|\varphi'(x)| \le K < 1$. Прилагайки Теорема 10.1 получаваме, че за всяко начално приближение x_0 от тази околност редицата от последователните приближения $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ клони към решението $x = a$ на уравнението $f(x) = 0$.

За оценка на грешката ще използваме формулата на Тейлор

$$0 = f(a) = f(x_n) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)(a - x_n)^2 \text{ за някое } \xi \text{ между } a \text{ и } x.$$

Следователно

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - a - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(a - x_n)^2$$

т.е.

$$|x_{n+1} - a| = |x_n - a - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}| = \left|\frac{1}{2}\frac{f^{''}(\xi)}{f'(x_n)}(a - x_n)^2\right| \leq \frac{1}{2}\frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}|f^{''}(\xi)|}{\min\limits_{s\in[a,b]}|f^{'}(s)|}(a - x_n)^2,$$

където интервала $[a, b]$ съдържа, точките a и z. □

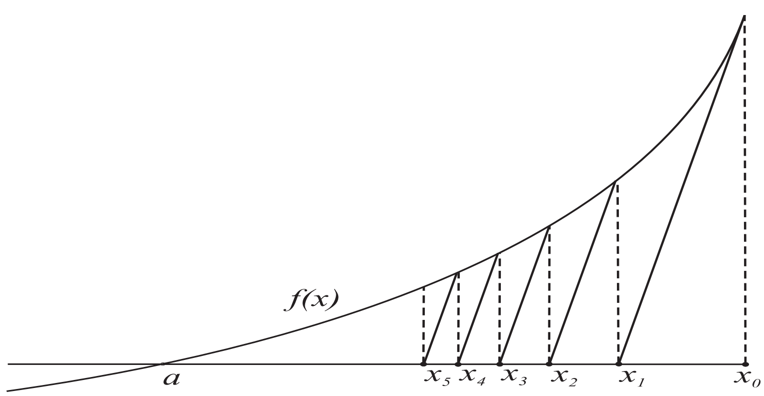
Теорема 10.6 известна още като метод на Нютон или метод на допирателните, което се илюстрира на (Фигура 51).

Теорема 10.7 *(Модифициран метод на Нютон) Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(a) = 0$. Нека в някоя околност на точката $[a - r, a + r]$ функцията f заедно с $f^{'}$ и $f^{''}$ са непрекъснати. Нека в тази околност $f^{'}$ и $f^{''}$ не си сменят знака. Нека $z \in [a - r, a + r]$ е такава, че $f(z)f^{''}(z) > 0$. Тогава, ако $\psi(x) = \dfrac{1}{f^{'}(z)}$ и положим $\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$ (Фигура 52), то уравнението*

$$x = \varphi(x)$$

има корен $x = a$ който се получава по метода на последователните приближения:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f^{'}(z)}$$



Фигура 52: Модифициран метод на Нютон

Доказателство: Пресмятайки $\varphi^{'}(x) = 1 - \dfrac{f^{'}(x)}{f^{'}(z)}$ получаваме, че $|\varphi^{'}(a)| < 1$. Следователно съществува околност на точката a така, че в нея $|\varphi^{'}(x)| \leq K < 1$. Прилагайки Теорема 10.1 получаваме, че за всяко начално приближение x_0 от тази околност редицата от последователните приближения $x_n = \varphi(x_{n-1}) = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(z)}$, $n \in \mathbb{N}$ клони към a. $\square$

Пример 10.1 *Намерете по трите метода, корена на уравнението:*

$$x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0,$$

разположен между $x = 2,4$ *и* $2,5$.

1) По метода на секущите:

$$x_n = \frac{zf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(z)}{f(x_{n-1}) - f(z)}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

$z = 2,5,\ f(x_0) = 2,375$. Начално приближение вземаме $x_0 = 2,4,\ f(x_1) = -0,376$.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_{n+1} = \frac{zf(x_{n-1})-x_{n-1}f(z)}{f(x_{n-1})-f(z)}$
0	2.4	-0.376	2.413667757
1	2.413667757	-0.01452975	2.414192708
2	2.414192708	-0.00055529	2.414212766
3	2.414212766	-0.00002120	2.414213532
4	2.414213532	-0.00000080	2.414213561
5	2.414213561	-0.00000003	

Минимумът на $|f'|$ в интервала $[2,4,2,5]$ е $28,28$. Така получаваме оценка на грешката, за x_4 равна на

$$|x_5 - a| \leq \frac{|f(x_5)|}{26,28} < 0.1178030166.10^{-8}.$$

2) По метода на Нютон:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

$x_0 = 2,5$.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$
0	2.5	2.375	2.417391304
1	2.417391304	0.08473871	2.414218194
2	2.414218194	0.00012333	2.414213562
3	2.414213562	0.000000009	

2) По Модифицирания метод на допирателните:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

$x_0 = 2,5.$

n	x_n	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}$
0	2.5	2.375	2.417391304
1	2.417391304	0.08473871	2.414443871
2	2.414443871	0.00613318	2.414230543
3	2.414230543	0.00045216	2.414214816
4	2.414214816	0.00003338	2.414213655
2	2.414213655	0.00000247	2.414213569
3	2.414213569	0.00000017	

Друг избор на функцията ψ, може да бъде $\psi(x) \equiv \lambda$. Тогава търсим неподвижната точка за функцията $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. Нека в интервала $[a, b]$ уравнението $f(x) = 0$ има единствано решение и съществуват константи m, M, такива че неравенството

$$0 \leq m \leq f'(x) \leq M$$

е изпълнено за всяко $x \in [a, b]$. Тогава съществува λ_0, така че за всяко $\lambda \in (0, \lambda_0)$ изображението φ да е свиващи. Наистина, достатъчно е да изберем λ_0 да удовлетворява

$$-1 \leq 1 - \lambda_0 M \leq \varphi'(x) \leq 1 - \lambda_0 m \leq 1.$$

Задачи

Задача 1. Намерете корените на уравнението $f(x) = 0$, намиращи се в интервала $[a, b]$ по Метода на Нютон, модифицирания метод на Нютон и метода на секущите с точност $0,01$ и с точност $0,00001$, където:
1.1) $f(x) = x^5 - 10x - 0,2$, $a = 1$, $b = 3$;
1.2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000$, $a = 8$, $b = 12$;
1.3) $f(x) = \sin x - x \cos x$, $a = -\pi$, $b = \pi$.
Задача 2. Използвайте методите на Нютон и на секущите за да намерите $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$. Намерете с точност $0,001$ числата:
2.1) $\sqrt{2}$; 2.2) $\sqrt[2]{2}$; 2.3) $\sqrt{3}$; 2.4) $\sqrt[3]{3}$.
Задача 3. Намерете приближено решение с точност $0,01$ на урувненията:
3.1) $x^3 - x + 1 = 0$; 3.2) $e^x + x = 0$; 3.3) $x \operatorname{arctg} x - e^x = 0$; 3.4) $e^x = \ln x$.

10.2.2 Системи линейни уравнения.

Нека разгледаме системата от линейни уравнения:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

или записано по-просто $x = Ax + b$. Разглеждаме оператора $Tx = Ax + b$ и търсим кога той има неподвижна точка в $\mathbb{R}_n$.

1) (R_∞^n)

$$\begin{aligned}\rho_\infty(Tx, Ty) &= \max_{i=1,\ldots,n}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j)\right| \le \max_{i=1,\ldots,n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_k - y_k| \\ &\le \max_{i=1,\ldots,n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{k=1,\ldots,n}|(x_k - y_k| = \left(\max_{i=1,\ldots,n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)\rho_\infty(x, y).\end{aligned}$$

Следователно T е свиващо тогава и само тогава, когато $\alpha = \max\limits_{i=1,\ldots,n}\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$.

2) (R_1)

$$\rho_1(Tx, Ty) = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j)\right| \le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|.|x_j - y_j| \le \max_{j=1,\ldots,n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\rho_1(x, y).$$

Следователно T е свиващо тогава и само тогава, когато $\alpha = \max_{j=1,\ldots,n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}| < 1$.

3) (R_p)

$$\begin{aligned}\rho_\infty(Tx, Ty)^2 &= \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j)\right)^p \le \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\rho_2(x, y)^2.\end{aligned}$$

Следователно T е свиващо тогава и само тогава, когато $\alpha = \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2 < 1$.

Всяко от получените условия е дастатъчна, за да бъде сходяща редицата от последователни приближения.

Ако $|a_{ij}| < 1/n$, то и трите условия са изпълнени, ако $|a_{ij}| \ge 1/n$, то и трите условия не са изпълнени.

Задачи

Задача 1. Ако $\sum_{n=1}^\infty |a_{nm}| \le \alpha < 1$ за всяко $m \in \mathbb{N}$ и $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_1$ докажете, че безкрайната система от линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{lcl} x_1 &=& \sum_{m=1}^\infty a_{1m}x_m + a_1 \\ x_2 &=& \sum_{m=1}^\infty a_{2m}x_m + a_2 \\ .. & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &=& \sum_{m=1}^\infty a_{nm}x_m + a_n \\ .. & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

има единствено решение $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$.
Задача 2. Ако $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq \alpha < 1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ докажете, че безкрайната система от линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lcl} x_1 & = & \sum_{m=1}^{\infty} a_{1m} x_m + a_1 \\ x_2 & = & \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m} x_m + a_2 \\ .. & & .... \\ x_n & = & \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m + a_n \\ .. & & .... \end{array} \right.$$

има единствено решение $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$
Задача 3. По метода на последователните приближения решете линейните уравнения:
а) $\left| \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \\ y & = & \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y \end{array} \right.$ б) $\left| \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 1 \\ y & = & \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + 1 \end{array} \right.$ г) $\left| \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \\ y & = & \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}y \end{array} \right.$ д) $\left| \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 1 \\ y & = & \frac{1}{6}x + \frac{1}{8}y \end{array} \right.$
Задача 4. По метода на последователните приближения решете линейните уравнения:
а) $\left| \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z \\ y & = & \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{9}z \\ y & = & \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{12}z \end{array} \right.$ б) $\left| \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + 1z \\ y & = & \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{9}z \\ y & = & \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{12}z \end{array} \right.$ г) $\left| \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z \\ y & = & \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{9}z + 1 \\ y & = & \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{12}z \end{array} \right.$

10.2.3 Интегрални уравнения.

Едни от най-интересните приложения се получават, когато метричното пространство се състои от функции.

Метода на свиващите изображения може да се приложи за решаване на интегрални уравнение на Фредхолм т.е.

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x). \tag{38}$$

Теорема 10.8 *Нека $K(x,y) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\varphi(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати, тогава съществува константа $\lambda_0 > 0$, така че уравнение на Фредхолм (38) има единствено решение $f \in C_{[a,b]}$ за всяко $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$.*

Доказателство: От непрекъснатостта на $K(x,y) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ следва че съществува $M > 0$, така че $|K(x,y)| \leq M$ за всяко $x, y \in [a,b]$.

Нека разгледаме оператора $T : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ зададен чрез

$$Tf = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x).$$

По условие имаме

$$\rho(Tf_1, Tf_2) = \max_{x \in [a,b]} \left| \lambda \int_a^b K(x,y)(f_1 - f_2) dy \right| \leq |\lambda| M (b-a) \max_{x \in [a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Следователно, ако положим $\lambda_0 = \dfrac{1}{M(b-a)}$, тогава за всяко $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$ изображението T е свиващо и от Теорема 10.1 уравнението (38) има единствено решение. Метода на последователните приближения дава редицата $f_n = \alpha \int_a^b K(x,y) f_{n-1}(y)dy + \varphi(x)$, където f_0 е произволна непрекъсната финкция. $\square$

Уравнението на Фредхолм може да се разглежда, като непрекъснатата версия на система от линейни уравнения. Наистина нека заменим интервала $[a,b]$ с $n+1$ различни точки $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Тогава, ако положим $y_i = f(x_i)$, $b_i = \varphi(x_i)$ и $a_{ij} = \lambda \dfrac{K(x_i, x_j)}{n}$ то (38) се записва във вида

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Нека отбележим, че коректноста на този запис е нещо съвсем различно.

Пример 10.2 *Нека* $K(x,y) = xy : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *и* $\varphi(x) \in C_{[0,1]}$. *Разглеждаме уравнението* $f(x) = \lambda \int_0^1 xyf(y)dy + \varphi(x)$ *за* $|\lambda| < 1$.

Нека изберем за първо приближение $f_0 = \varphi$ и да положим $a = \int_0^1 y\varphi(y)dy$. Тогава

$$\begin{array}{rcl}
f_0(x) & = & \varphi(x) \\
f_1(x) & = & Af_0(x) = \varphi(x) + \lambda x \int_0^1 y\varphi(y)dy = \varphi(x) + \lambda x a \\
f_2(x) & = & Af_1(x) = \varphi(x) + \lambda x \int_0^1 y(\varphi(y) + a\lambda y d)y = \varphi(x) + \lambda x a + a\dfrac{\lambda^2}{3}x \\
f_3(x) & = & Af_2(x) = \varphi(x) + \lambda x \int_0^1 y(\varphi(y) + a\lambda y + a\dfrac{\lambda^2}{3}yd)y = \varphi(x) + \lambda x a + a\dfrac{\lambda^2}{3}x + a\dfrac{\lambda^3}{9}x \\
\ldots\ldots & . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n(x) & = & Af_{n-1}(x) = \varphi(x) + a\lambda x\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{9}\right)^{n-1}\right).
\end{array}$$

След граничен преход получаваме $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x) + \frac{3a\lambda}{3-\lambda}x$.

Пример 10.3 *Нека* $K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x)q_j(x) : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *и* $\varphi(x), p_j, q_j \in C_{[0,1]}$. *Разглеждаме уравнението* $f(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j p_j(x) + \varphi(x)$, *където* $z_j = \int_a^b q_j(y)f(y)dy$.

Нека да положим $c_j = \int_a^b q_j(x)f(x)dx$ и $a_{ij} = \int_a^b q_j(x)p_j(x)dx$. Тогава използвайки равенството:

$$z_j = \int_a^b q_j(y)f(y)dy = \int_a^b q_j(x)\varphi(x)dx + \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b q_j(x)p_j(x)dx$$

получаваме системата от линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lcl} z_1 & = & c_1 + \lambda \sum_{i=1}^n a_{1i} z_i \\ z_2 & = & c_2 + \lambda \sum_{i=1}^n a_{2i} z_i \\ .. & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_j & = & c_j + \lambda \sum_{i=1}^n a_{ji} z_i \\ .. & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n & = & c_n + \lambda \sum_{i=1}^n a_{ni} z_i. \end{array} \right.$$

Метода на свиващите изображения може да се приложи за решаване на нелинеини интегрални уравнение т.е.

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))dy + \varphi(x). \tag{39}$$

Теорема 10.9 *Нека $K(x, y, z) : [a, b] \times [a, b] \times (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ и $\varphi(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати и функцията K е Липшицова по третата си променлива. Тогава съществува константа $\lambda_0 > 0$, така че уравнение на Фредхолм (39) има единствено решение $f \in C_{[a,b]}$ за всяко $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$.*

Доказателство: Нека разгледаме оператора $T : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ зададен чрез

$$Tf = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))dy + \varphi(x).$$

По условие имаме

$$\rho(Tf_1, Tf_2) \leq \max_{x\in[a,b]} \lambda \int_a^b |K(x, y; f_1) - K(x, y; f_1)|dy \leq |\lambda| M(b - a) \max_{x\in[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Следователно при $|\lambda| < \lambda_0 = \dfrac{1}{M(b-a)}$ изображението T е свиващо и от Теорема 10.1 уравнението (39) има единствено решение. Метода на последователните приближения дава редицата $f_n = \alpha \displaystyle\int_a^b K(x, y; f_{n-1}(y))dy + \varphi(x)$, където f_0 е произволна непрекъсната финкция. □

Метода на свиващите изображения може да се приложи за решаване на интегрални уравнение на Волтера т.е.

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy + \varphi(x). \tag{40}$$

Теорема 10.10 *Нека $K(x, y) : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\varphi(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати, тогава уравнението на Волтера (40) има единствено решение $f \in C_{[a,b]}$.*

Ако $K(x, y)$ и $\varphi(x)$ са непрекъснати за $a \le x \le b$ и $a \le y \le b$, то $|K(x, y)| \le M$. Нека разгледаме оператора $T : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ зададен чрез

$$Tf = \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy + \varphi(x).$$

По условие имаме

$$|Tf_1(x) - Tf_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, y)(f_1(y) - f_2(y))dy \right| \le |\lambda| M(x - a) \max_{x \in [a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Аналогично се получава неравенството:

$$|T^2 f_1(x) - T^2 f_2(x)| \le |\lambda|^2 M^2 \frac{(x - a)^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|$$

и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството:

$$|T^n f_1(x) - T^n f_2(x)| \le |\lambda|^n M^n \frac{(x - a)^n}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

За всяко фиксирано λ, M, b, a съществува $n \in \mathbb{N}$ така че $\dfrac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1$, т.е. T^n е свиващо изображение. От Теорема 10.3 следва, че уравнението (40) има единствено решение. Метода на последователните приближения дава редицата $f_n = \alpha \int_a^x K(x, y) f_{n-1}(y)dy + \varphi(x)$, която е сходяща към решението на уравнението (40), където f_0 е произволна непрекъсната финкция. □

Задачи

Задача 1. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$ и $|\alpha(b-a)| < 1$. Докажете, че за всяко $u_0 \in C_{[a,b]}$ редицата $u_{n+1}(x) = \alpha \int_a^b \sin(u_n(x))dx + 1$ е сходяща, към еденственото решение $u \in C_{[a,b]}$ на интегралното уравнение $u(x) = \alpha \int_a^b \sin(u(x))dx + 1$.
Задача 2. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$ и $|\alpha| < 1$. Докажете, че за всяко $u_0 \in \mathbb{R}$ редицата $u_{n+1} = \alpha \sin u_n + 1$ е сходяща, към еденственото решение $u \in \mathbb{R}$ на уравнението $u = \alpha \sin u + 1$.
Задача 3. По метода на последователните приближения решете нтегралните уравнения:
а) $\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi(s)ds$, изберете началното приближение $\varphi_0(t) = 0$ и $\varphi_0(t) = t$;
б) $\varphi(t) = t - \int_0^t (t-s)\varphi(s)ds$, изберете началното приближение $\varphi_0(t) = 0$ и $\varphi_0(t) = \sin t$;
Задача 4. Покажете, че интегралното уравнение

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \int_0^t sx(s)ds, \quad t \in [0, a],$$

има точни едно решение. Намерете това решени по метода на последователните приближения, като започнете от $x_0 \equiv 0$.
Задача 5. По метода на последователните приближения решете нтегралните уравнения:
а) $\varphi(s) = \varphi(s) + \int_0^{2\pi} \sin(s+t)y(t)ds$, изберете началното приближение $\varphi_0(t) = 0$;
б) $\varphi(s) = \varphi(s) + \int_0^1 (s-t)^2 y(t)ds$, изберете началното приближение $\varphi_0(t) = 0$.

10.2.4 Методи за решаване на обикновени диференциални уравнения.

Теорема 10.11 *Нека разгледаме задачата на Коши:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{41}$$

Нека f е непрекъсната в някоя област G съдържаща точката (x_0, y_0) и е Липшицова по втората си променлива в тази околност, т.е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|.$$

Тогава съществува $d > 0$, така че в интервала $[x_0 - d, x_0 + d]$ задачата на Коши (41) има единствено решение $y(x)$.

Доказателство: Задачата на Коши е еквивалентна на интегралното уравнение

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t))dt.$$

От непрекъснатостта на функцията f следва че $|f(x,y)| \leq K$ за някоя околност G_1 на точката (x_0,y_0). Можем да изберем $d > 0$ така че да бъдат изпълнени следните две условия:
1) ако $|x - x_0| < d$ и $|y - y_0| < d$, то $(x,y) \in G_1$
2) $Md < 1$.

Нека означим с C пространството от всички непрекъснати в интервала $[x_0 - d, x_0 + d]$ и удовлетворяващи неравенството $|\varphi(x) - y_0| \leq Kd$ функции φ, с разстояние $\rho(\varphi_1,\varphi_2) = \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$. Пространството C е пълно понеже е затворено подпространство на $C_{[x_0-d,x_0+d]}$. Нека разгледаме изображението $T\varphi = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt$, където $|x - x_0| < d$. Лесно се вижда, че $T : C \to C$. Наистина

$$|T\varphi - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right| \leq Kd.$$

От неравенствата

$$\begin{aligned}
|T\varphi_1 - T\varphi_2| &= \left|\int_{x_0}^{x} (f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t)))dt\right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))|dt \leq Md \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.
\end{aligned}$$

От условието $Md < 1$ следва, че изображението T е свиващо и следователно уравнението $T\varphi = \varphi$ има единствено решение в пространството C, което може да се получи по метода на посредователните приближения.

Теорема 10.12 *Нека (X,ρ) е пълно метрично пространство и $A, B : X \to X$ са свиващи изображение, удовлетворяващи условията:*

$$\rho(Ax, Ay) \leq k_A \rho(x,y) \quad \rho(Bx, By) \leq k_B \rho(x,y).$$

Ако съществува $\varepsilon > 0$, така че за всяко $x \in X$ е изпълнено неравенството $\rho(Ax, Bx) < \varepsilon$, то неподвижните точки x_A, x_B, за изображенията A, B удовлетворяват неравенството $\rho(x_A, x_B) \leq \dfrac{\varepsilon}{1 - \max\{k_A, k_B\}}$.

Доказателство: Нека x_A е неподвижната точка за изображението A. Редицата $y_n = B^n(x_A)$ е сходяща към неподвижната точка x_B на изображението B. След граничен преход при $n \to \infty$ в неравенствата:

$$\begin{aligned}
\rho(x_A, y_n) &\leq \rho(x_A, y_1) + \rho(y_1, y_2) + \cdots + \rho(y_{n-1}, y_n) \\
&\leq \rho(x_A, Bx_A)(1 + k_B + (k_B)^2 + \cdots + (k_B)^{n-1}) \leq \frac{\rho(x_A, Bx_A)}{1 - k_B}
\end{aligned}$$

получаваме неравенството

$$\rho(x_A, x_B) \leq \frac{\rho(x_A, Bx_A)}{1 - k_B} = \frac{\rho(Ax_A, Bx_A)}{1 - k_B} < \frac{\varepsilon}{1 - \max\{k_A, k_B\}}.$$

$\square$

Теорема 10.13 *Нека разгледаме задачите на Коши:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{42}$$

и

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_1. \tag{43}$$

Нека f е непрекъсната в някоя област G съдържаща точката (x_0, y_0) и (x_1, y_1) и е Липшицова по втората си променлива в тази околност, т.е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ от неравенството $|y_0 - y_1|$ следва неравенството

$$\max_{x \in [a,b]} |y_0(x) - y_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 - K(b - a)}.$$

Доказателството следва непосредствено от Теорема 10.13, където операторите A, B са дефинирани чрез

$$A\varphi = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt, \quad B\varphi = y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

Задачи

Задача 1. По метода на последователните приближения решете обикновените диференциални уравнения:

а) $y'(x) = e^x$, $y(0) = 1$; б) $y'(x) = e^{x^2}\ln y$, $y(0) = 0$; в) $y'(x) = \dfrac{2xy^2}{1 - x^2}$, $y(0) = 1$;
г) $y'(x) = \dfrac{1}{x + 2y}$, $y(0) = -1$; д) $y'(x) = \dfrac{y}{x} + x^2$, $y(1) = 1$;
е) $y'(x) = y\mathrm{cotg}x + 2x\sin x$, $y(0) = 0$; ж) $y'(x) = \dfrac{2xy^2}{1 - x^2}$, $y(0) = 1$; 3.8) $y'(x) = -y^2$, $y(0) = 0$;
з) $y'(x) = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$; и) $y'(x) = y + e^{y-1}$, $y(0) = 1$;
й) $y'(x) = +x\sin y$, $y(\pi) = 2\pi$;

Задача 2. Намерете интервл в който обикновените диференциялни уравнения имат решение:

а) $y^{'}(x) = x + y - 3$, $y(0) = 0$; б) $y^{'}(x) = 2y - 2 - x$, $y(1) = 1$;
в) $y^{'}(x) = x + e^y$, $y(1) = 0$;
Задача 3. За кои $a \leq 0 \leq b$ изображението $T : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ дефинирано чрез:

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x 2tf(t)dt$$

е свиващо.Докажете, че диференциялното уравнение:

$$y^{'} = 2xy, \quad y(0) = 1$$

има единствено решение в някой интервал съдържащ 0.

11 Компактност

Често срещана цел в анализа е да се обобщават свойства на някой функции, които са в сила за всяка точка от малко подмножество на дефиниционното множество, така че свойството да се удовлетворява в цялото множество. Можем да кажем, че се опитваме да направим глобални изводи от локална информация. Естествено съществени са както свойствата на функцията, които искаме да обобщим, така и свойствата на подмножеството, което използваме за обобщаване. Ще дадем следния пример за да илюстрираме горните думи

11.1 Локални и глобални свойства на функции

Определение 11.1 *Казваме, че функцията $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е локално ограничена, ако за всяко $x \in \mathbb{R}$ съществуват δ_x, M_x, такива че $|f(y)| \leq M_x$ за всяко $y \in [x - \delta_x, x + \delta_x] \cap A$.*

Определение 11.2 *Казваме, че функцията $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е ограничена, ако съществува M, такива че $|f(y)| \leq M$ за всяко $y \in A$.*

Можем да се запитаме при какви условия от локалната ограниченост на функцията f ще следва ограничеността на функцията в по–голямо множество.

Пример 11.1 *Нека $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Тогава f е локално ограничена в интервала $(0, 1)$, но не е ограничена в него.*

Наистина полагаме за всяко $x \in (0, 1)$: $\delta_x = x/2$ и $M_x = 2/x$. Проблемът с липсата на ограниченост идва от факта, че в граничната точка 0 на монжеството $(0, 1)$ функцията не е дефинирана и е неограничена. Това може да се избегне, ако вземем затворен интервал.

Пример 11.2 *Нека $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Тогава f е локално ограничена в интервала $[\varepsilon, 1]$ и е ограничена в целия интревал $[\varepsilon, 1]$.*

Наистина избираме $M = 1/\varepsilon$.

Пример 11.3 *Нека $f(x) = x$. Тогава f е локално ограничена в интервала $[0, \infty)$, но не е ограничена в целия интревал $[0, \infty)$.*

Наистина полагаме за всяко $x \in [0, +\infty)$: $\delta_x = 1$ и $M_x = x + 1$. Интервалът $[0, \infty)$ за разлика от Пример 11.1 е затворен и съдържа всичките си гранични точки, но е „твърде голям”.

Пример 11.4 *Нека $f(x) = x$. Тогава f е локално ограничена в интервала $[0, N]$ и е ограничена в целия интревал $[0, N]$.*

Наистина избираме $M = N$.

11.2 Компактност и равномерна ограниченост в $\mathbb{R}$

Теорема 11.1 *Нека $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е локално ограничена функция в множеството $A \subset \mathbb{R}$. Ако A е ограничено и затворено, тогава f е равномерно ограничена в A.*

Определение 11.3 *Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}$ притежава свойството на Болцано–Вайерщрас, ако всяка редица от точки от A има сходяща подредица с граница точка от A.*

Пример 11.5 *Ако $A \subset \mathbb{R}$ е крайно множество, то A притежава свойството на Болцано–Вайерщрас.*

Пример 11.6 *Множеството $\mathbb{N}$ не притежава свойството на Болцано–Вайерщрас.*

Пример 11.7 *Множеството $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не притежава свойството на Болцано–Вайерщрас.*

Теорема 11.2 *Множеството $A \subset \mathbb{R}$ притежава свойството на Болцано–Вайерщрас, тогава и само тогава, когато е затворено и ограничено.*

Доказателство на Теорема 11.1 с използване на Теорема 11.2: Да допуснем противното, т.е. f не е ограничена в цялото множество $A \subset \mathbb{R}$. Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува $x_n \in A$, така че $|f(x_n)| > n$. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица, удовлетворяваща условието $|f(x_n)| > n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. От Теорема 11.2 следва, че съществува подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такава че $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y \in A$. От локалната ограниченост на функцията f следва, че съществуват δ_y и M_y, така че $|f(x_n)| < M_y$ за всяко $x_n \in [y - \delta_y, y + \delta_y]$. От сходимостта на редицата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ следва че съществува $k_0 \in \mathbb{N}$, така че $k_0 > M_y$ и за всяко $n_k > k_0$ изпълнено $x_{n_k} \in [y - \delta_y, y + \delta_y]$. Така стигаме до противоречие $k_0 < n_k < |f(n_k)| < M_y$. $\square$

Определение 11.4 *Казваме, че множеството $A \subset \mathbb{R}$ притежава свойството на Хайне–Борел, ако от всяко отворено покритие на A може да се избере крайно подпокритие.*

Пример 11.8 *Ако $A \subset \mathbb{R}$ е крайно множество, то A притежава свойството на Хайне–Борел.*

Пример 11.9 *Множеството $\mathbb{N}$ не притежава свойството на Хайне–Борел.*

Нека разгледаме покритието $(n - 1/3, n + 1/3)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 11.10 *Множеството $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не притежава свойството на Хайне–Борел.*

Можем да разгледаме редицата от интервали $\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{4n}, \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{4n}\right)$. Очевидно, че

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{4n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{4n}\right)$$

и не съществува крайно множгество A, така че $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \bigcup\limits_{n\in A} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{4n}, \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{4n}\right)$.

Теорема 11.3 *Множеството A притежава свойството на Хайне–Борел, тогава и само тогава, когато е затворено и ограничено.*

Доказателство на Теорема 11.1 с използване на Теорема 11.3: От условието, че f е локално ограничена следва че за всяко $x \in A$ съществува отворен интервал I_x и число M_X, такива че $|f(y)| < M_x$ за всяко $y \in I_x$. Съвкупността $\{I_x\}_{x \in A}$ е отворено покритие на A, следователно от Теорема 11.3 получаваме, че съществува крайно подпокритие $\{I_{x_i}\}_{i=1}^n$. Нека положим $M = \max\{M_{x_1}, \ldots, M_{x_n}\}$. Тогава за всяко $x \in A$ съществува $i \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, така че $x \in I_{x_i}$. Следователно $|f(x)| \leq M_{x_i} < M$. □

Определение 11.5 *Казваме, че редицата от множеството $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ е редица от вложени един в друг интервали, ако*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$$

Определение 11.6 *Казваме, че редицата $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ от вложени един в друг интервали притежава свойството на Кантор, ако $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.*

Пример 11.11 *Ако $A_n = (4 - 1/n, 5 + 1/n)$ за $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [4, 5]$.*

Пример 11.12 *Ако $A_n = [-1/n, 1/n]$ за $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$.*

Пример 11.13 *Ако $A_n = (0, 1/n)$ за $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.*

Пример 11.14 *Ако $A_n = [n, \infty)$ за $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.*

Теорема 11.4 *Всяка редица $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ от вложени един в друг, затворени и ограничени интервали притежава свойството на Кантор.*

Доказателство на Теорема 11.1 с използване на Теорема 11.4: Да допуснем, че f не е ограничена в множеството A. От условието, че A е ограничено множество следва че съществуват $a, b \in \mathbb{R}$, така че $A \subset [a, b]$. Нека разделим $[a, b]$ на два интервала с дължина $\frac{b-a}{2}$. От допускането, че f не е ограничена в множеството A следва, че f не е ограничена в единия от получените интервалите. Нека означим този интервал с $[a_1, b_1]$. Можем да извършим същата процедура с новополучения интервал $[a_1, b_1]$ и да получим интервала

$[a_2, b_2]$ в който f не е ограничена. Той има дължина $\frac{b-a}{2^2}$. Индуктивно получаваме редица $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ от вложени един в друг затворени интервали с $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ и f не е ограничена в $[a_n, b_n] \cap A$. От Теорема 11.4 следва че съществува $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. От локалната ограниченост на f следва, че съществуват δ_x и M_x, такива че $|f(y)| \leq M_x$ за всяко $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap A$. Съществува достатъчно голямо $n \in \mathbb{N}$, така че $[a_n, b_n] \subset (x-\delta_x, x+\delta_x)$, което противоречие. $\square$

11.3 Компактност в топологични пространства

Както видяхме в предишния параграф, фундаментална роля в анализа играе лемата на Хайне–Борел, че от произволно покритие на затворения интервал $[a, b]$ с отворени интервали може да се избере крайно подпокритие. За произволно метрично пространство лемата на Хайне–Борел не е вярна, но мажем да е приемем за дефиниция за компактно множество.

Ще предпочетем да разгледаме обобщение на лемата на Хайне–Борел първо произволни топологични пространства.

Определение 11.7 *Нека (T, τ) е топологично пространство и $A \subset T$. Отворено покритие на A наричаме съвкупност $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ от отворени подмножества на T, такива че $A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$. Подпокритие на $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е всяко подмножество $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma^*\subset\Gamma}$, което е също покритие на A. Ако индексното множество Γ^* е крайно, казваме, че $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma^*}$ е крайно подпокритие на A.*

Определение 11.8 *Казваме, че топологичното пространство (T, τ) е компактно, ако от произволно негово отворено покритие може да се избере крайно подпокритие.*

Определение 11.9 *Всяко компактно топологично пространство (T, τ), което удовлетворява аксиомата за отделимост на Хаусдорф наричаме компакт.*

Определение 11.10 *Казваме ,че системата от подмножества $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ на топологичното пространство (T, τ) е центрирана, ако всяко крайно сечение $\bigcap_{i=1}^{n} A_{\gamma_i}$ е непразно множество.*

Теорема 11.5 *Топологичното пространство (T, τ) е компактно, тогава и само тогава, когато всяка центрирана система от затворени множества има непразно сечение.*

Доказателство: $(\Rightarrow)$Нека $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е центрирана система от затворени множества в T и нека T е компактно. Множествата $G_\gamma = X \setminus F_\gamma$ са отворени. От условието, че $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е центрирана, т.е. всяко крайно сечение $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\gamma_i}$ е непразно множество следва, че никоя крайна система $G_{\gamma_i} = X \backslash F_{\gamma_i}$ не покрива цялото T. От условието, че T е компактно следва, че и $\{G_\gamma\}_\gamma$ не покрива T, което означава, че $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Нека всяка центрирана система от затворени множества има непразно сечение и $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е отворено покритие на T. Полагаме $F_\gamma = X\backslash G_\gamma$, тогава $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma = \emptyset$ и следователно $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ не може да бъде центрирана система от множества, т.е. съществуват $F_{\gamma_1}, \ldots, F_{\gamma_n}$, така че $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\gamma_i} = \emptyset$. Следователно множествата $G_{\gamma_i} = X\backslash F_{\gamma_i}$, $i = 1, \ldots, n$ образуват крайно подпокритие на T. $\square$

Пример 11.15 *Нека да разгледаме множествата* $[n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, че това е центрирана система от множества, защото $\bigcap_{k=1}^{n} [m_k, +\infty) = [m, +\infty)$, където $m = \max\{m_k : k = 1, \ldots n\}$. От друга страна веднага се вижда, че $\bigcap_{k=1}^{\infty} [k, +\infty) = \emptyset$.

Теорема 11.6 *Ако (T, τ) е компактно пространство, то всяко негово безкрайно подмножество има поне една гранична точка.*

Доказателство: Нека допуснем противното, че T съдържа безкрайно множество A без гранична точка. Тогава от него можем да изберем изброимо подмножество $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, което също няма да има гранична точка. Тогава множествата $A_n = \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$ образуват центрирана система от затворени множества в T, които имат празно сечение. Така стигаме до противоречие с условието, че T е компактно. $\square$

Теорема 11.7 *Всяко затворено подмножество на компактно топологично пространство е компактно.*

Доказателство: Нека F е затворено подмножество в компактното пространство (T, τ) и $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е произволна центрирана система от затворени подмножества в F. Тогава $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ са затворени и в T, т.е. $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е центрирана система от затворени подмножества в T. Следователно $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\alpha \neq \emptyset$ и от тук получаваме, че F е компактно. $\square$

Твърдение 11.1 *Всяко затворено подмножество на компакт е компакт.*

Доказателството следва от Теорема 11.7 и факта, че всяко подпространство на хаусдорфово пространство е хаусдорфово пространство.

Твърдение 11.2 *Всеки компакт е затворен във всяко съдържащо го хаусдорфово топологично пространство.*

Твърдения 11.1 и 11.2 показват, че в класа на хаусдорфовите пространства компактността е вътрешно свойство за пространството, т.е. всеки компакт остава компакт независимо в колко голямо хаусдорфово пространство го разглеждаме.

Доказателство: Нека K е компактно множество в хаусдорфовото топологично пространство (T, τ) и нека $z \notin K$. За всяко $x \in K$ съществуват околност U_x на точката x и околност V_x на точката y, такива че $U_x \bigcap V_x = \emptyset$. Съвкупността $\{U_x\}_{x\in K}$ образуват отворено покритие за K и следователно съществува крайно подпокритие $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$. Нека да положим $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Тогава V е околност на точката y и $V \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}\right) = \emptyset$. Следователно $y \notin \overline{K}$ и следователно K е затворено множество. □

Теорема 11.8 *Всеки компакт е регулярно топологично пространство.*

Доказателство: Нека $y \notin X$ е произволна точка. Според Твърдение 11.1 следва че X е компакт. Тогава за всяко $x \in X$ съществуват околности U_y на точката y и V_x на точката x, такива че $U_y \bigcap V_x = \emptyset$. Съвкупността $\{V_x\}_{x\in X}$ е отворено покритие на X и следователно съществува крайно отворено подпокритие $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. тогава $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ е отворено множество съдържащо X и $V \bigcap U_y = \emptyset$. □

Теорема 11.9 *Всеки компакт е нормално топологично пространство.*

Доказателство: Повтаряме разсъжденията от Теорема 11.8 за всяко $y \in Y$, защото ако $y \in Y$, то $y \notin X$. Според Твърдение 11.1 следва че X е компакт. Тогава за всяко $x \in X$ съществуват околности U_y на точката y и $V_x^{(y)}$ на точката x, такива че $U_y \bigcap V_x^{(y)} = \emptyset$. Съвкупността $\{V_x^{(y)}\}_{x\in X}$ е отворено покритие на X и следователно съществува крайно отворено подпокритие $\{V_{x_i}^{(y)}\}_{i=1}^n$. Тогава $V^{(y)} = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}^{(y)}$ е отворено множество съдържащо X и $V^{(y)} \bigcap U_y = \emptyset$.

Съвкупността $\{U_y\}_{y\in Y}$ е отворено покритие на Y и следователно съществува крайно отворено подпокритие $\{U_{y_i}\}_{i=1}^m$. Тогава $V = \bigcap_{i=1}^m V^{(y_i)}$ е отворено множество съдържащо Y, $U = \bigcup_{i=1}^m U_{(x_i)}$ е отворено множество съдържащо X и $V \bigcap U = \emptyset$. □

Определение 11.11 *Казваме, че топологичното пространство (T, τ) е изброимо–компактно, ако всяко негово безкрайно подмножество има поне една гранична точка.*

Теорема 11.10 *Топологичното пространство (T, τ) е изброимо компактно тогава и само тогава когато е изпълнено едно от условията:*
а) всяко изброимо отворено покритие на T съдържа крайно подпокритие;
б) всяка изброима цетрирана сиестема от затворени множества в T има непразно сечение.

Доказателство: От законите на Де Морган следва, че условия а) и б) са еквивалентни.

($\Rightarrow$) Нека допуснем противното, че T не е изброимо–компактно. Тогава T съдържа безкрайно множество A без гранична точка. Тогава от него можем да изберем изброимо подмножество $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, което също няма да има гранична точка. Тогава множествата $A_n = \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$ е изброимо центрирана система от затворени множества в T, които имат празно сечение. Така стигаме до противоречие с условието, че T е изброимо–компактно.

($\Leftarrow$) Нека T е изброимо–компактно топологично пространство и $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброима центрирана система от затворени множества. Ще докажежем, че $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$.

Нека да положим $\Phi_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$. Множествата Φ_n са затворени непразни множества, защото системата $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ центрирана, $\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \Phi_3 \supseteq \cdots \supseteq \Phi_n \supseteq \Phi_{n+1} \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Съществуват две възможности: 1) от някое $n_0 \in \mathbb{N}$ е в сила включването $\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots$; 2) Не съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, така че да е в сила включването $\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots$.

1) От факта, че Φ_n са непразни множества следва, че $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

2) Съществуват безброй много множества Φ_{n_k}, които не съвпадат. Нека да изберем редицата $x_k \in \Phi_{n_k} \setminus \Phi_{n_{k+1}}$, която е безкрайно подмножество на T. От изброимата компактност на T следва, че редицата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ има гранична точка. От факта, че множествата Φ_{n_k} са затворени множества и $\{x_{n_k}\}_{k=s}^{\infty} \subset \Phi_{n_s}$ следва, че граничната точка x_0 пренадлежи на всяко от множествата Φ_{n_k} и следователно и на всяко от множествата Φ_n. Така получихме, че $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. $\square$

Теорема 11.11 *Ако топологичното пространство (T, τ) е с изброима база, тогава изброимата компактност и компактността съвпадат.*

Доказателство: Очевидно, че всяко компактно топологична пространство е изброимо кампактно. Ако T е изброимо компактно и $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е отворено покритие на T, тогава от наличието на изброима база следва, че можем да изберем изброимо подпокритие $\{G_{\gamma_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (Теорема 7.5). $\square$

11.4 Компактност в метрични пространства

Поради факта, че метричните пространства са частен случай на топологични пространства, то теоремите за компактност в топологични пространства са в сила и за метрични пространства Ще дадем още един критерии за компактност в метрични пространства, който не може да бъде използван в произволно топологично пространство, поради факта, че използва понятието разстояние.

Определение 11.12 *Нека M е множество в метричното пространство (X, ρ) и $\varepsilon > 0$ произволно. Казваме, че множеството $A \subset X$ е ε–мрежа за M, ако за произволна точка $x \in M$ съществува $a \in A$, така че $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.*

Пример 11.16 *Точките с целочислени координати в $\mathbb{R}^2_2$ образуват $1/\sqrt{2}$–мрежа.*

Определение 11.13 *Казваме, че множеството M в метричното пространство (X, ρ) е напълно ограничено, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува крайна ε–мрежа за M.*

От Определение 11.13 веднага следва, че напълно ограничените множества са ограничени. Обратното не е вярно.

От Определение 11.13 веднага следва, че ако едно метрично пространство е напълно ограничено, то то е сепарабелно. Наистина, нека построим в него крайна $1/n$–мрежа. Обединението по n на всичките $1/n$–мрежи е навсякъде гъсто множество.

Твърдение 11.3 *Ако множеството M е напълно ограничено, то неговото затваряне $\overline{M}$ е също напълно ограничено.*

Доказателство: Нека изберем произволно $\varepsilon > 0$. Съществува крайна $\dfrac{\varepsilon}{2}$ – мрежа $\{x_k\}_{k=1}^n$. Нека $a \in \overline{M}$ и $a \notin M$. Тогава съществува $b \in M$, такова че $\rho(a, b) < \varepsilon/2$. От това, че $\{x_k\}_{k=1}^n$ е $\dfrac{\varepsilon}{2}$ – мрежа следва че съществува $x_i \in \{x_k\}_{k=1}^n$, такова че $\rho(b, x_i) < \varepsilon/2$. Тогава от

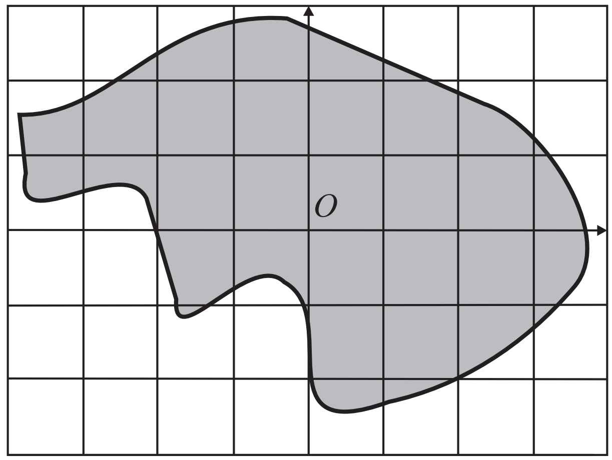
$$\rho(a, x_i) \leq \rho(a, b) + \rho(b, x_i) < \varepsilon$$

получаваме, че $\{x_k\}_{k=1}^n$ е ε – мрежа за $\overline{M}$. □

Пример 11.17 *В пространството $\mathbb{R}^n_2$ пълната ограниченост съвпада с обикновената ограниченост.*

Наистина всяко ограничено множество се съдържа в някой куб с център координатното начало 0. Нека разбием куба на малки кубчета с ребра ε. Върховете на тези кубчета образуват крайна $\varepsilon\frac{\sqrt{n}}{2}$–мрежа.

Пример 11.18 *Единичната сфера S в пространството ℓ_2 е пример на ограничено множество, което не е напълно ограничено.*



Фигура 53:

Нека разгледаме точките от вида

$$\begin{array}{c} e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, \dots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n = (0, 0, 0, \dots, 1, \dots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

От $\rho_2(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ следва, че единичното кълбо B_{ℓ_2} не може да се покрие с крайна ε–мрежа за $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

От Пример 11.18 следва че единичното кълбо B_{ℓ_2} не е напълно ограничено множество. Лесно може да се покаже, че и за произволно $p \in [1, +\infty)$ единичното кълбо B_{ℓ_p} не е напълно ограничено множество.

Пример 11.19 *Нека в пространството ℓ_2 разгледаме множеството Π дефинирано чрез*

$$\Pi = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1/2, \dots, |x_n| \leq 1/2^{n-1}, \dots\}$$

Това множество е известно още, като Хилбертова тухла. Ще покажем, че Π е напълно ограничено.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволна избрано. Избираме n, така че $1/2^{n-1} \leq \varepsilon/2$. На всяка $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Pi$ съпоставяме точката

$$x^* = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots). \tag{44}$$

Тогава

$$\rho(x,x^*) = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon/2.$$

Множеството Π^*, съставено от точки от вида (44) е напълно ограничено, защото е ограничено множество в $\mathbb{R}_2^n$. Избираме в Π^* крайна $\varepsilon/2$–мрежа. Ясно е че тя е крайна ε– мрежа в Π.

Пример 11.20 *Множеството* $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *е напълно ограничено, но не е компактно.*

Наистина редицата от точки

$$0, 0, 4, 0, 41, 0, 414, 0, 4142, \ldots,$$

която е десетичните приближения на $\sqrt{2} - 1$. Тя не има гранична точка в множеството A и според Теорема 11.6 не е компактно.

Теорема 11.12 *Метричното пространство* (X, ρ) *е компактно, тогава и само тогава, когато то е едновременно:*
а) напълно ограничено;
б) пълно.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека (X, ρ) е компактно метрично пространство. Да допуснем, че не е напълно ограничено. Тогава съществува $\varepsilon > 0$, такова, че да няма крайна ε – мрежа в X. Да изберем произволна точка $x_1 \in X$ тогава съществува $x_2 \in X$, такава че $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$. В противен случай x_1 би била крайна ε – мрежа в X. По същите съображения съществува $x_3 \in X$, такава че $\rho(x_i, x_3) > \varepsilon$ за $i = 1, 2$. Нека сме избрали $\{x_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяващи условията $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon$ за $i, j = 1, 2, \ldots n$, $i \neq j$. Съществува $x_{n+1} \in X$, така че $\rho(x_i, x_{n+1}) > \varepsilon$, за всяко $i = 1, 2, \ldots n$. По този начин можем да конструираме редица $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, така че $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon$ за $i, j = 1, 2, \ldots \infty$, $i \neq j$. Така построената редица не може да има сходяща подредица, което противоречи на компактността на X.

($\Leftarrow$) Нека X е напълно ограничено и пълно. Ще покажем, че е компактно. Достатъчно е да установим, че всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в него има поне една гранична точка.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е произволна редица от точки на X. Нека първо построим крайна 1 – мрежа и около всяка точка от тази мрежа да построим затворено кълбо с радиус 1. Това са краен брой кълба, които покриват X и следователно в поне едно от тях, например B_1, ще се съдържа някоя безкрайна подредица $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ на $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Кълбото B_1 е компактно, защото е затворено множество на компактно множество X. Нека изберем крайна 1/2 – мрежа в B_1 и около всяка точка от тази мрежа да построим затворено кълбо с радиус 1/2. Това са краен брой кълба, които покриват B_1 и следователно в поне едно от тях, например B_2, ще се съдържа някоя безкрайна подредица $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty$ на $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$. Нека изберем крайна 1/3 – мрежа в B_2 и около всяка точка от тази мрежа да построим затворено кълбо с радиус $1/4$. Това са краен брой кълба, които покриват B_2 и следователно в поне едно от тях, например B_3, ще се съдържа някоя безкрайна подредица $\{x_n^{(3)}\}_{n=1}^{\infty}$ на $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ и т.н.

Нека заедно с всяко от кълбата B_n разгледаме и кълбата A_n, които са със същия център, но с два пъти по-голям радиус. Лесно се съобразява, че редицата от затворени кълба $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от затворени вложени едно в друго кълба, с радиуси клонящи към нула. От пълнотата на метричното пространство X следва че $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ се състои от единствена точка x_0. Тази точка е гранична точка на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, понеже всяка нейна околност съдържа някое от кълбата B_k, а от там и подредицата $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$. □

Теорема 11.13 *Нека (X, ρ) е метрично пространство и $K \subset Y \subset X$. Множеството K е компактно подмножество на X, тогава и само тогава, когато е компактно подмножество на Y.*

Определение 11.14 *Казваме, че подмножеството A на метричното пространство (X, ρ) е предкомпактно или относително компактно, ако неговото затваряне $\overline{A}$ е компактно.*

Твърдение 11.4 *Подмножеството A на пълното метричното пространство (X, ρ) е предкомпактно, тогава и само тогава, когато е напълно ограничено.*

11.5 Секвинцялна компактност

Определение 11.15 *Нека е метрично пространство (X, ρ). Казваме, че множеството $K \subset X$ е секвинцялно компактно, ако всяка негова редица съдържа сходяща подредица.*

Пример 11.21 *Всеки затворен ограничен интервал в е секвинцялно компактен*

Пример 11.22 *Множеството от рационалните числа в интервала $[0, 1]$ не е секвинцялно компактно*

Например редицата $0,7$, $0,70$, $0,707$, $0,7071$, $0,70710$, $0,707106$, която е десетичното приближение на чеслото $1/\sqrt{2}$ няма сходяща към рационално число подредица.

Теорема 11.14 *Ако метричното пространство (X, ρ) е секвинцялно компактно, то е напълно ограничено.*

Нека предположим, че (X, ρ) не е напълно ограничено. Следователно съществува $\varepsilon_0 > 0$, така че в X не съществува крайна ε_0–мрежа. Избираме произволна точка $x_1 \in X$. Съществува поне една точка $x_2 \in X$, такава че $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$, в противен случай x_1 би била ε_0–мрежа. Съществува поне една точка $x_3 \in X$, такава че $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon_0$ и $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0$, в противен случай x_1, x_2 би била ε_0–мрежа. Ако сме избрали вече точките $x_1, \ldots, x_k$, то избираме x_{k+1}, така че $\rho(x_i, x_{k+1}) > \varepsilon_0$, $k = 1, \dots k$. Тази конструкция ни дава безкрайна редица $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, която няма не съдържа нито една фундаментална подредица, защото $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon_0$, $i \neq j$ и следователно не съдържа сходяща подредицанито. Тогава X не е секвинцялно кампактно. $\square$

Следствие 11.1 *Всяко секвинцялно компактно множество K в метрично пространство (X, ρ) е ограничено и затворено.*

Следствие 11.2 *Всяко секвинцялно компактно метрично пространство е компактно.*

Твърдение 11.5 *Ако (K, ρ) е секвинцялно компактно метричното пространство, то K е сепарабелно.*

От Теорема 11.14 следва, че K е напълно ограничено. Следователно за всяко $m \in \mathbb{N}$ съществува крайна $1/m$–мрежа $(x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n_m})$, т.е

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_m} B(1/m, x_{m,i}).$$

Множеството от точки

$$A = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n_1}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n_2}, \dots, x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n_m}, \dots)$$

е изброимо и навсякъде гъсто в K. $\square$

Теорема 11.15 *Нека (X, τ_X) и (Y, τ_Y) са топологични пространства, като X е компакт, а Y е хаусдорфово пространство. Ако $f : X \to Y$ е биективно и непрекъснато, то следва, че и f^{-1} е непрекъснато.*

Доказателство: Нека $F \subset K$ е затворено множества. Следователно F е компактно и следователно $V = f(F)$ е компактно. Тогава праобраза $(f^{-1})^{-1}$ на обратното изображение изобразява затворените множества в затворени и следователно f^{-1} е непрекъснато. $\square$

Задачи

Задача 1. Кои множества в $\mathbb{R}$ са компактни:
$[0, 1)$, $[0, +\infty)$, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $\{\sqrt{2}\}$, $\{0\} \cup \{1, /2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$

11.6 Свойства на компактните множества

Теорема 11.16 *Нека (X, ρ) е метрично пространство.*

а) Ако $\{K_1, \dots, K_n\}$ са компактни подмножества в X, то $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ е компактно.

б) Нека $\{K_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е фамилия от компактни подмножества в X, тогава $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$ е компактно.

Доказателство: а) Нека $\{K_1, \ldots, K_n\}$ са компактни подмножества в X и нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Тогава съществуват ε–крайни мрежи $\{x_i^{\varepsilon,j}\}_{i=1}^{n(\varepsilon,j)}$ в K_j за всяко $j = 1, 2, \ldots n$. Следователно множеството

$$\bigcup_{j=1}^{n}\left(\{x_i^{\varepsilon,j}\}_{i=1}^{n(\varepsilon,j)}\right)$$

е ε–крайна мрежа за $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$. Следователно $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ е напълно ограничено и от факта, че обединението на краен брой пълни пространства е пълно пространство.

б) Нека $\{K_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е фамилия от компактни подмножества в X следователно сечението им е затворено множество. От факта, че затворено подмножества на компактно множество е компактно следва, че и сечението е компактно множество. $\square$

Пример 11.23 *Нека разгледаме $\mathbb{R}$. Тогава:*

а) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ *е компактно множество;*

б) $\bigcup\limits_{1=1}^{n}[n, n+1]$ *не е компактно множество;*

Теорема 11.17 *Нека (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) са компактни метрични пространства. Тогава пространството $X \times Y$ снабдено с метриката $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2)$ е компактно метрично пространство.*

Доказателство: Нека $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица в $A \times B$. От компактността на A следва, че съществува сходяща подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ с граница в A. От компактността на B следва, че съществува сходяща подредица $\{b_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ с граница в B. Следователно подредицата $\{(a_{n_{k_j}}, b_{n_{k_j}})\}_{j=1}^{\infty}$ е сходяща в $A \times B$. $\square$

Теорема 11.18 *Нека (X, ρ), (Y, d) са метрични пространста и $f : X \to Y$ е непрекъснато изображение. Ако X е компактно, то и $f(X)$ е компактно.*

Доказателство: Нека (X, ρ) и (Y, d) са метрични пространства, като X е компактно. Нека $f : X \to Y$ е непрекъснато изображение. Нека $\{V_\alpha\}_\alpha$ е произволно покритие на $f(X)$ с отворени множества. Множествата $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ са отворени и образуват покритие на X. Тогава от компактността на X съществува крайно подпокритие $U_1, \ldots, U_n$. Следователно множествата $V_1, \ldots, V_n$, където $V_i = f(U_i)$ образуват крайно подпокритие на $f(X)$. $\square$

Следствие 11.3 *Нека (X, ρ) е компактно метрично пространство и $f : X \to \mathbb{R}$ е непрекъснато изображение, то f достига точната си долна и горна граница, т.е. съществуват y и z, така че*

$$f(y) = \inf_{x\in X} f(x) \quad \text{и} \quad f(z) = \sup_{x\in X} f(x).$$

Доказателство: Според Теорема 11.18 следва, че $f(X) \subset \mathbb{R}$ е компактно множества, следователно множеството $f(X)$ е ограничено и затворено и следователно съдържа най-голямата y_{max} и най-малката y_{min} си точки. Следователно съществуват $x_{max}, x_{min} \in X$, така че $f(x_{min}) = y_{min} \leq f(x) \leq y_{max} = f(x_{max})$. $\square$

Теорема 11.19 *Нека (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) са метрични пространства и $A \subset X$ е компактно множества. Ако $f : A \to Y$ е непрекъсната функция, то f е равномерно непрекъсната.*

Доказателство: От непрекъснатостта на f следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ и всяко $x \in A$ саществува $\delta_x > 0$, така че $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. Фамилията $\{B(x, \delta_x/2)\}_{x \in X}$ е отворено покритие за A. От компактността на A следва, че съществува крайно подпокритие $\{B(x_k, \delta_{x_k}/2)\}_{k=1}^n$. Нека положим $\delta = \min_{1 \geq k \geq n} \delta_{x_k}/2$. Нека $x, y \in A$ са произволни и удовлетворяващи $\rho(x, y) < \delta$. Съществува $k_0 \in 1, \ldots, n$, така че $x \in B(x_{k_0}, \delta_{k_0}/2)$. От неравенствата

$$\rho(y, x_{k_0}) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_{k_0}) \leq \delta + \delta_{k_0}/2 \leq \delta_{k_0}$$

и следователно $y \in B(x_{k_0}, \delta_{k_0})$. От неравенствата

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_{k_0})) + \rho(f(x_{k_0}), f(y)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

и следователно f е равномерно непрекъсната в A. $\square$

Казваме, че функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е линейна функция, ако може да се запише във вида $f(t) = at + b$ за някои $a, b \in \mathbb{R}$. Лесно се съобразява, че всяка линейна функция се определя еднозначно от стойностите си в две произволни точки.

Обобщение на ленеините функции са частично линейните функции. Казваме, че $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ е частично линейна, ако съществува деление $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ на интервала $[0, 1]$, така че f да бъде линейна функция във всеки от интервалите $[x_i, x_{i+1}]$.

Теорема 11.20 *За всяка функция $f \in C_{[0,1]}$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува частично линейна функция g, така че $\rho_\infty(f, g) < \varepsilon$.*

Доказателство: От Теорема 11.19 следва, че f е равномерно непрекъсната върху $[0, 1]$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано следователно съществува $\delta > 0$, така че за всеки $x, y \in [0, 1]$, които удовлетворяват $|x - y| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Нека да изберем $N \in \mathbb{N}$, тако че $N > \dfrac{1}{\delta}$ и да разделим интервала $[0, 1]$ на N на брой интревала с равни дължини $0 < 1/N < 2/N < \cdots < (N-1)/N < 1$ и да положим $x_i = i/N$. Нека g частично линейна функция, която удовлетворява $g(x_i) = f(x_i)$, за всяко $i = 0, 1, \ldots, N$.

За всяко $x \in [0, 1]$ съществува i, така че $x \in [x_i, x_{i+1}]$. От неравенството

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

следва, че $\rho(f, g) < \varepsilon$. $\square$

Следствие 11.4 *Множеството от частично линейните функции в интервала $[0, 1]$ е навсякъде гъсто в $C_{[0,1]}$.*

Теорема 11.21 *Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство и $f : X \to X$ е неразтягащо изображение. Ако X е компактно, то f има единствена неподвижна точка.*

Доказателство: Нека разгледаме нека разгледаме функцията $\rho(x, f(x))$. От непрекъснатоста на функциите $\rho(\cdot, \cdot)$ и f следва, че и функцията $\rho(x, f(x))$ е непрекъсната. Тогава тя достига своята точна долна граница, върху компактното множества X.

$$\rho(x_0, f(x_0)) = \inf_{x \in X} \rho(x, f(x)) \tag{45}$$

Да допуснем, че $f(x_0) \neq x_0$. Тогава неравенството

$$\rho(f(x_0), f^2(x_0)) < \rho(x_0, f(x_0))$$

противоречи с условието за минималност (45). Следователно $f(x_0) = x_0$ с което съществуването е доказана.

Доказателството на единствеността става, както в Теорема 10.1. □

Задачи

Задача 1. Нека $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ е локално липшицово изображение, т.е. за всяко $x \in X$ съществуват $\delta_x > 0$ и $L_x > 0$, така че неравенството

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \leq L_x \rho_X(x, y)$$

е изпълнено за всяко $y \in B_x(\delta_x)$. Докажете, че ако X е компактно, то f е липшицова функция.

11.7 Теорема на Арцела–Асколи

Определение 11.16 *Фамилията от функции Φ дефинирани в някой затворен интервал $[a, b]$, се нарича равномерно ограничена, ако съществува константа $K > 0$, така че е изпълнено $|\varphi(x)| \leq K$ за вяко $x \in [a, b]$ и всяка функция $\varphi \in \Phi$.*

Определение 11.17 *Фамилията от функции Φ дефинирани в някой затворен интервал $[a, b]$, се нарича равностепенно непрекъсната, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че е $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq K$ за веки $x_1, x_2 \in [a, b]$, удовлетворяващи неравенството $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon$.*

Теорема 11.22 *(Арцела–Асколи) Семейството Φ от непрекъснати функции, определено в затворения интервал $[a, b]$ е предкомпактно, тогава и само тогава, когато е равномерно ограничено и равностепенно непрекъснато.*

Доказателство: Необходимост: Нека семейството Φ е предкомпактно в $C_{[a,b]}$. Тогава от Теорема 11.4 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува крайна $\varepsilon/3$–мрежа $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в Phi. Всяка от функциите φ_i, $i = 1, \dots, n$ е непрекъсната и ограничена $|\varphi_i(x)| \leq K_i$. Нека положим $K = \max\{K_i\} + \varepsilon/3$. По определението за $\varepsilon/3$–мрежа, следва че за всяко $\varphi \in \Phi$ съществува поне едно φ_i, така че

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следователно

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K,$$

т.е. Φ е равномерно ограничено.

От факта, че функциите $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ образуващи $\varepsilon/3$–мержа са непрекъснати следва че са равномерно нопрекъснати в интервала $[a, b]$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ_i, така че

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

винаги когато $|x_1 - x_2| < \delta_i/3$. Нека положим $\delta = \min_{i=1,\dots n} \delta_i$. За произволна функция $\varphi \in \Phi$ избираме φ_i, което удовлетворява неравенството $\rho(\varphi, \varphi_i) < \varepsilon/3$. Тогава за всеки две $x_1, x_2 \in [a, b]$, свързани с неравенството $|x_1 - x_2| < \delta/3$ е изпълнено:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon,$$

т.е. фамилията Φ е равностепенно непрекъсната.

Достатъчност: Нека Φ е равномерно ограничена и равностепенно непрекъсната фамилия от функции. Съгласно Теорема 11.4 е достатъчно да покажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува крайна ε–мрежа. По условие съществуват $K, \delta > 0$, такива че всяка функция $\varphi \in \Phi$ е изпълнено $|\varphi(x)| \leq K$ и за всеки две $|x_1 - x_2| < \delta$ е в сила $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon/5$.

Нека разбием интервала $[a, b]$ на интервали $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ с дължина по–малка от δ и прекараме перпендикулярни на оста O_x прави през точките x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. Нека разбием интервала $[-K, K]$ по оста O_y на интервали $-K = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = K$ с дължина по–малка от $\varepsilon/5$ и да прекараме перпендикулярни на оста O_y прави през точките y_i, $i = 0, 1, \dots, m$. По този начин правоъгълника $a \leq x \leq b$, $-K \leq y \leq K$ го разбиваме на $n \times m$ правоъгълнитси с размери на страните по-малки от $\varepsilon/5$ и δ съответно. На всяка функция $\varphi \in \Phi$ съпоставяме начупена линия ψ с върхове в точките (x_k, y_i), като точката (x_k, y_i) е избрана така че $|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \varepsilon/5$. по построение са в сила неравенствата:

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \varepsilon/5, \quad |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \varepsilon/5, \quad |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \varepsilon/5,$$

от където следва, че $|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \dfrac{3\varepsilon}{5}$. От линейността на функцията ψ в интервала $[x_k, x_{k+1}]$ получаваме, че

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

за всяко $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Нека $x \in [a, b]$ е произволна точка. Избираме x_k, най–близката от ляво на x. Тогава

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Следователно всички начупени линии с върхове (x_k, y_i) образуват крайна ε–мрежа. □