НАУКАТА, ОБРАЗОВАНИЕТО И ВРЕМЕТО КАТО ГРИЖА
Юбилейната научна конференция с международно участие
Смолян, 30 ноември – 1 декември, 2007 г.

ЦЕЛОЧИСЛЕНА ГЕОМЕТРИЯ НА ЕРДЬОШ

Гл.асистент Мария Бръчева, ПУ-Филиал Смолян
Проф. Станчо Димиев, Иститут по математика и информатика при БАН

INTEGRAL GEOMETRY OF ERDOES

Assistant Maria Brancheva, Plovdiv University, Branch of Smolyan
Professor Stancho Dimiev, Inst of Math&Info

Abstract

In this note we explain in detail how the theorem of Erdoes about the integral distances suggests the idea of a discrete planar geometry of integral figures (Diophantine figures) in ZxZ. We give a proof that the structural group of this geometry is composed by rotations to 90^o and symmetries with respect to the axes.

Прочутият унгарски математик Пал Ердьош завеща на поколенията след него огромно количество публикации, актуални и до днес. Разбира се, вникването в смисъла им той оставя на читателя, но това не означава, че формално-логическото третиране на дефинициите и доказателсвата използвани в тях е достатъчно за пълното разбиране на целта им. Нещо повече, понякога ни се струва, че смисълът остава като енигма – съдържа скрита идея. Именно това обяснява жизнеността на творчеството на Ердьош. За нас такъв е случаят с известната негова работа, публикувана през 1945 година съвместно с N.H.Anning (N.H.Anning and P.Erdoes, Integral disdances, Bull.Amer.Math.Soc. 51 (1945), 598-600).

Увод. За да разберем по-ясно какво имаме предвид, налага се да припомним накратко за еволюцията на геометрията от Евклид (3 век преди н.е.) до Декарт (16 век след н.е.). Евклид третира геометрията чисто умозрително, с помоща на разсъждения използващи аксиоми, дефиниции и доказателства, без никакви аргументи от приложен характер. Неговият метод е чисто геометричен, използващ конструкции с помощта на линия и пергел, схващани като абстрактни инструменти. Едва през 16 век след н.е. геометрията претърпява радикално преосмисляне: Декарт създава аналитичната геометрия, основаваща се на идеята за координати и уравнения. По такъв начин числата започват да играят пряко роля за разбирането на геометричните конструкции, а чисто логическите Евклидови доказателства се заместват с аритметични пресмятания и разсъждения свързани с решаването на алгебрични уравнения.

Аналитичната геометрия на Декарт не изменя смисъла на Евклидовата геометрия – тя само обновява основополагащо найната форма. Това обстоятелство се е оказало извънредно плодотворно – то инспирира въпроси които водят до разширяване на смисъла на геометрията. Един въпрос от този вид е следният: каква е ролята на използваните числа в аналичната геометрия за геометричните конструкции осъществявани в нея? По времето на Декарт този въпрос не е бил актуален, макар, че неговият именит съвременник от Тулуза, адвокатът Пиер Ферма, е владел целите числа до съвършенство, обосновавайки ги в отделна теория за разлика от рационалните и ирационалните такива. Ферма заедно с Декарт развива аналитичната геометрия, в която се използва цялото множество на реалните числа (цели, рационални, ирационални). Какво би се получило ако използваме само цели числа?

Тази бележка има за цел да разясни смисъла на целочислената геометрия на Ердьош на популярно ниво. За нас въпросната геометрия е известна само за размерност 2, т.е. в равнината, поради което в заглавието използваме термина планиметрия. Тук засягаме само началните публикации по предмета.

Ще припомним цитираната теорема на Ердьош и Анинг.

Разглеждаме дискретни подмножества на Евклидовата равнина *RxR*, подмножества от точки с реални координати $P(x, y)$. Ще казваме, че точките участващи в такова подмножество удовлетворяват дистанционното свойство на Ердьош (ДСЕ), ако разстоянито между всеки две от тях е цяло положително чило. Теоремата на Ердьош и Анинг гласи следното: всяко подмножество на *RxR*, което удовлетворява свойството (ДСЕ) е крайно, освен ако точките му не лежат на една права.

Първоначалното доказателство на разглежданата тук теорема изглежда е било по-сложно, но понастоящем разполагаме с просто доказателсто опиращо се на свойствата на хиперболите. Читателя може да консултира доказателството дадено от A.Kohnert и S.Kurz (2006) (виж Литературата). Тук излагаме доказателството дадено от Добромир Кралчев (непубликувано до сега). Нека Φ е диофантова фигура, чиито точки не лежат на една права. Нека P_k, $k = 1, 2, 3$ са три неколинеарни върха (точки) от Φ, а P е друга четвърта точка от Φ. С d_k означаваме разстоянията от P съответно до точките P_k, $k = 1, 2, 3$. Със d означаваме разстоянието от P_1 до P_2 . От неравенството на триъгълника приложено за триъгълника P_1P_2P следва, че $|d_1 - d_2| \leq d$. Тогава ако положим $d_1 - d_2 = c$ излиза, че числото c може да взима само краен брой стойности, по-точно $2d + 1$ на брой. Но за всяка от тези стойности на c, равенството $d_1 - d_2 = c$ определя хипербола с фокуси P_1 и P_2. Така извличаме, че точката P трябва да попадне върху едно крайно семейство от хиперболи, всички с фокуси P_1 и P_2. Аналогично, ако вместо точките P_1 и P_2 вземем точките P_2 и P_3, и повторим горе изложените разсъждения получаваме, че точката P трябва да лежи и върху друго семейство от хиперболи, всички с фокуси P_2 и P_3. Понеже точките P_k, $k = 1, 2, 3$ са неколинеарни, правите P_1P_2 и P_2P_3 са различни, което влече, че получените две семейства от хиперболи могат да притежават само краен брой общи точки. Това означава, че за произволно избраната в Φ точка P можем да имаме само краен брой позиции в *RxR*, т.е. фигурата Φ има краен брой върха. □

Нека отбележим, че изложеното по-горе доказателство принадлежи на математическия фолклор.

Нататък вместо теорема на Ердьош и Анинг ще казваме теорема на Ердьош.

Постановка на въпроса за целочислена геометрия.

За да осигурим използването само на цели числа трябва най-напред да отстраним това на другите видове реални числа. За тази цел вместо точки с реални координати ще разглеждаме такива с целочислени координати. Това означава, че заменяме реалната Евклидова равнина *RxR* с декартовото произведение *ZxZ*, т.е. с множеството на всевъзможните двойки цели числа. Това е едно дискретно подмножество на *RxR*. Така теоремата на Ердьош се преформулира за подмножества на ZxZ. С оглед да опростим постановката предполагаме, че въпросните подмножества винаги съдържат началото, което съвпада с целочислената точка *(0,0)*. Условието (ДСЕ) остава същото, както и твърдението на теоремата, с допълнителното уточнение, че когато имаме случая на безкрайно подмножество то непременно се състои от точки с целочислени координати лежащи върху права през началото на координатната система.

Изложеното до тук показва как можем да изменим формулировката на теоремата на Ердьош и Анинг за да я приспособим към възможността за отговор на въпроса за ролята на използваните числа (координати на точки и коефициенти на уравнения). Какво произтича от предложеното изменение ще покажем в следващия пункт. Оказва се, че обичайната аналитична геометрия се окастря значително при посочната замяна, но пак получаваме едно специфично третиране на равнинните фигури с целочислени координати на върховете и целочислени дължини на страните което има характера на дискретна геометрия с определена структурана група от трансформации.

Целочислена аналитична геометрия.

Първата статия в която беше реализирана посочната по-горе замяна е тази на Станчо Димиев и Иван Тонов (1986). В нея подмножествата удовлеторяващи свойството на Ердьош (ДСЕ) са наречени диофантови фигури. През 2000 и 2001 година се появиха две статии на Мария Брънчева написани под ръководството на Станчо Димиев. През 2006 излезе статия на немските математици Axel Kohnert и Sacsha Kurz (2006). Редица статии се появиха по-късно.

Ясно е, че ако една диофантова фигура не лежи на права линия през началото, тя не може да има безбройно много върхове, т.е. тя се определя от крайно множество от точки. Това следва направо от теоремата на Ердьош.

В статиите е въведено и понятието Гаус-Питагорова точка. По дефиниция това е такава точка, чието разстояние до началото е цяло число. Очевидно всяка Гаус-Питагорова точка е връх на Питагоров триъгълник. От друга страна тя определя комплексно число с цели реална и имагинерна части, т.е. Гаусово число. Сега се вижда защо използваме термина "Гаус-Питагорова точка". Друго непосредствено следствие от свойството (ДСЕ), и включването на началото на координатната системе във всяка диофантова фигура, е това, че всеки връх на една диофантова фигура е Гаус-Питагорова точка.

Множеството на Гаус-Питагоровите точки е истинско подмножество на множеството на всички целочислени точки (точки с целочислени координати).

Това множество притежава следото свойство за инвариантност: при ротация на 90^o то се преобразува в себе си, като при това съхранява разстоянията. Нека обсъдим по-подробно това твърдение. Наистина, всяко Гаусово число $n + im$ се записва в полярни координати (r, φ) така, $n + im = re^{i\varphi}$, където $r^2 = n^2 + m^2$,

$\varphi = tg(m/n)$. Изобщо числото r не е задължено да бъде цяло, например за точката $(1, 1)$, или $1 + i$, имаме $r = 2^{1/2}$, но за Гаус-Питагоровите точки числото r по условие е цяло число. Да подложим на ротация на 90° точките в комплексната равнина ще рече да умножим всяка от тях с множителя $e^{i\pi/2} = cos(\pi/2) + isin(\pi/2) = i$. Тогава ако изходната точка P се определя от $re^{i\varphi}$ трасформирата точка P^* се определя от $re^{i\varphi}e^{i\pi/2} = re^{i(\varphi+\pi/2)}$, което означава, че P^* е пак Гаус-Питагорова точка. Получихме, че трансформацията $P \rightarrow P^*$ запазва условието за Гаус-Питагоровост. Нещо повече, тази трансформация запазва и разстоянията. Това следва от общия смисъл на понятието ротация, но може да се докаже и като изразим разстоянията $|PQ|$, $|P^*Q^*|$, съответно с определящите ги полярни координати и сравним получените изрази.

Ротациите на 90° (или $\pi/2$) образуват циклична група от ред 4. (За това понятие читателят може да консултира всеки учебник по висша алгебра). Може да се докаже, че няма други ротации които да трансформират всяка Гаус-Питагорова точка пак Гаус-Питагорова такава. Наистина, да вземем ротация на ъгъл θ. Ако $n + im = re^{i\varphi}$ е Гаус-Питагорова точка , трябва да умножим с $e^{i\theta}$ за да получим нова Гаус-Питагорова точка $n^* + im^*$. Тогава, ще имаме $(n^*)^2 + (m^*)^2 = r^2$ защото разглеждаме ротация. Но точката (n^*,m^*) трябва да лежи на права през началото на координатната система с рационален ъглов коефициент защото е Гаус-Питагорова. Нека например $m^* = kn^*$, където k е рационално число. Тогава за n^* получаваме $n^* = r(1 + k^2)^{1/2}$. Сега виждаме, че е достатъчно да вземем права през началото с такова рационално k , че $(1 + k^2)^{1/2}$ да не бъде цяло число за да се убедим, че има Гаус-Питагорови точки, които не се трасформират пак в такива. Едва сега можем да твърдим, че ротациите на 90° градуса са единствените ротации, които трасформират всяка Гаус-Питагорова точка пак в такава точка. □

Ясно е, че всяка ротация за Гаус-Питагоровите точки има обратна. Заради това ротациите образуват група. Същото не се отнася за хомотетиите с целочислен коефициент, които също трансформират Гаус-Питагорова точка пак в такава. Тези хомотетии също имат обратна трансформация, но тя се определя с помощта на рационално число, реципрочната стоиност на целочисления коефициент на изходната хомотетия.

Симетриите относно координатните оси и началото на координатната система очевидно запазват Гаус-Питагоровите точки и разстоянията между тях. Те също образуват група.

Окончателно, можем да търдим, че цикличната група на ротациите заедно с групата на симетриите образуват структурната група на геометрията на целочислените фигури в равнината на Гаусовите числа $n + im$, която нарекохмеоще Диофантова равнина.

Заключение. Тук не засягаме ред изследавания от комбинаторен характер. Тези изследвания използват компютърни алгоритми. Тези изследвания могат да бъдат полезни за теорията на кодирането. Тук излагаме по-подробно и по-популярно геометричната природа на предмета, която ни бе подсказана от цитираната теорема на Ердьош, в която въобще не става дума за геометрия.

ЛИТЕРАТУРА

С, Димиев, И.Тонов (1986), Диофантови фигури, Математика и Математическо образование, 15 (1986), 78-85.

M.Brancheva (2000), Constructing Diophantine Figures: algorithms and Geometry, Jubilee Scientific Session of the University of Plovdiv, Faculty of Mathematics and Informatics, 304-311.

M.Brancheva (2001), Diophantine Figures and Diophantine Carpets, Mathematics and Education in Mathematics, 30 (2001), 289-304.

A.Kohnert and S,Kurz (2006), A note on Erdoes-Diophantine Graphs and Diophantine Figures, Mthematica Balkanica, vol. 20 (2006), Fasc.3-4.