НАУКАТА, ОБРАЗОВАНИЕТО И ВРЕМЕТО КАТО ГРИЖА
Юбилейната научна конференция с международно участие
Смолян, 30 ноември – 1 декември, 2007 г.

МЕТОД НА ЛИЦАТА ЗА НАМИРАНЕ НА ОТНОШЕНИЯ НА ЕЛЕМЕНТИ С ЕДНА И СЪЩА РАЗМЕРНОСТ

гл.ас. Пенка Гунчева
ПУ „Паисий Хилендарски” – Филиал Смолян

METOD OF THE AREA FOR A FINDING OF THE RELATION OF ELEMENTS WITH THE SAME DIMENSIONS

Chief assistant Penka Guncheva
Plovdiv University „Paisii Hilendarski” – Smolyan Branch

Abstract

The main aims of teaching mathematics in secondary school now are to prepare the students for self-study in mathematics acquiring new knowledge and skills and solving specific problems on their own.

With the following paper we join in the search for efficient techniques for preparing students for self-study. We describe the method of „connecting element” when the role of „the connecting element” is played by the area of the figure examined.

Обучението по математика в СОУ не е в състояние да даде на учениците необходимите за бъдещата им дейност знания и умения. Учебното съдържание по математика в действащата учебна документация включва само определен минимум от математически материал, идеи и методи. Традициите в математическото образование от много години са се основавали върху развитието на интелекта. И днес те се построяват върху това, че човек трябва да се научи да мисли преди всичко сам. Същевременно основните задачи на обучението по математика в СОУ сега са да подготви учениците за самостоятелна работа по математика – за самостоятелно придобиване на знания и умения, за самостоятелно решаване на конкретни задачи.

Чрез настоящото изложение се включваме в търсенето на ефективни средства за подготовка на учениците за самостоятелна работа, които могат да бъдат използвани в часовете за СИП по геометрия.

Както е известно теоретичният базис, операторът на задачата, е един от компонентите на информационната ѝ структура, който играе първостепенна роля при търсене и откриване на нейни решения. Затова е изключително важно в процеса на изучаването на програмната математическа теория, за всеки неин елемент (определение, теорема, следствие, формула и т.н.) да се поставя въпросът за какво служи, за какво би могло да се използва съответното знание.

В тази връзка в [1, с. 108 - 110, с. 146 - 150] обосновано се препоръчва, чрез последователно синтезиране на теореми, изучавани в различно време, учениците постепенно да изграждат така наречените:

- Дидактически системи от признаци (достатъчни условия за подвеждане на обекти под понятие);
- Дидактически системи от свойства (необходими условия за принадлежност към обема на понятие).

Такива дидактически системи учениците следва последователно да попълват с нови елементи в специални за целта тетрадки и редовно да ги използват в качеството на справочен източник предимно в процес на самостоятелна работа при решаване на задачи.

Тази идея би могла да се развие и усъвършенства и за решаване на задачи, при които не само се налага да се подвежда под понятие и след това да се използват някои свойства на съответното понятие, но и които допускат адаптиране и прилагане на известни общологически или частни методи за решаване на задачи, с което се разширява кръгът на тяхната приложимост. Такъв метод е например методът на"свързващия елемент". (По Здр. Лалчев [2, с. 369-373]). Ще демонстрираме прилагането на тази идея, когато ролята на свързващ елемент се играе от лицето на разглеждана фигура.

Като средство за откриване на важни отношения между елементи на фигура, освен формулите за лица на определени фигури, с успех могат да се използват и редица свойства на лицата на фигурите, при това лицето също може да бъде даден или търсен параметър.

На различните формули за лица на фигури и разнообразните им свойства се базират начините за решаване на задачи, принадлежащи на твърде широкообхватен кръг от разнообразни геометрични задачи. Това ни дава основание да синтезираме някои от тези начини в един по-общ метод, наречен условно "Метод на лицата за намиране на отношения на елементи с една и съща размерност".

Тук се спираме на този метод, като първо представяме дидактическа система от твърдения – теореми за лице на триъгълник и четириъгълник – и свойства на лице на триъгълник, които намират широко приложение за самостоятелно решаване на разнообразни геометрични задачи.

На всяка геометрична фигура Ф се съпоставя по единствен начин положително реално число S(Ф), наречено лице на фигурата, със следните свойства:

1. Еднаквите фигури имат равни лица, т.е. ако $\Phi_1 \cong \Phi_2$, то $S(\Phi_1) = S(\Phi_2)$.

2. Ако фигурата Ф е обединение на фигурите Φ_1 и Φ_2, които нямат общи вътрешни точки, то $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.

3. Ако Е е квадрат със страна единична отсечка (единичен квадрат), то S(E) = 1 (квадратна единица).

Лицето обикновено се бележи с буквата S, но понякога се използва и буквата B.

Фигури, чиито лицата са равни, се наричат равнолицеви. Равнолицевите фигури изобщо не са еднакви. Те могат да бъдат и от различен вид.

Теореми, намиращи приложение при метода на лицата.

Теорема 1: Лицето на триъгълника е равно на полупроизведението, на коя да е негова страна и височината към нея, т.е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.

Теорема 2: Лицето на триъгълника е равно на полупроизведението на две от страните му и синуса на ъгъла, заключен между тях, т.е. $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Теорема 3: Лицето на триъгълника е равно на произведението от полупериметъра му и радиуса на вписаната в триъгълника окръжност, т.е. $S=p.r$.

Теорема 4: $S = \frac{abc}{4R}$, където R е радиусът на описаната около триъгълника окръжност.

Теорема 5: Лицето на правоъгълника е равно на произведението от дължината и широчината му.

Теорема 6: Лицето на успоредника е равно на произведението от една негова страна и височината към нея, т.е. $S=ah_a=bh_b$.

Теорема 7: Лицето на всеки успоредник е равно на произведението на две негови съседни страни и синуса на ъгъла между тях, т.е. $S=ab\sin\alpha$.

Теорема 8: Лицето на трапец е равно на произведението от полусбора на основите и височината му.

Теорема 9: Лицето на произволен четириъгълник (в това число успоредник, трапец, делтоид и т.н.) е равно на полупроизведението на диагоналите му и синуса на ъгъла, заключен между тях.

Теорема 10: Лицата на два подобни многоъгълника се отнасят така, както квадратите на съответните им страни.

Свойства на лицето на триъгълник, които намират приложение при намиране отношения на елементи от една и съща размерност.

Свойство 1: Ако основите A_1B_1 и A_2B_2 на триъгълниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на една права, а върховете C_1 и C_2 лежат на права успоредна на нея, то двата триъгълника са равнолицеви, тогава и само тогава когато $A_1B_1=A_2B_2$.

Свойство 2: Ако основите A_1B_1 и A_2B_2 на триъгълниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на една права, а върховете C_1 и C_2 лежат на права успоредна на нея, то $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

Свойство 3: Ако точката P лежи на страната AB на ΔABC (или на нейното продължение), то $\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = \frac{AP}{BP}$ и $\frac{S_{ACP}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AB}$.

Свойство 4: Ако точките B_1 и C_1 лежат съответно на страните AB и AC на ΔABC или на техните продължения, то $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1.AC_1}{AB.AC}$.

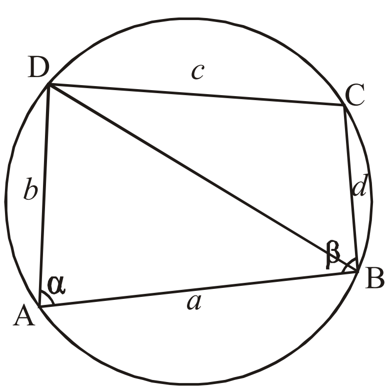
Свойство 5: Ако точка M е вътрешна за ΔABC и CM пресича страната AB в точка C_1, то $\dfrac{S_{AMC}}{S_{BMC}} = \dfrac{AC_1}{BC_1}$.

Доказателство: Основите на ΔAMC и ΔAMC_1 лежат на една и съща права, а върхът им A е общ. Тогава от свойство 3 получаваме $\dfrac{S_{AMC}}{S_{AMC_1}} = \dfrac{CM}{C_1M}$. По същата причина $\dfrac{S_{BMC}}{S_{BMC_1}} = \dfrac{CM}{C_1M}$. Следователно $\dfrac{S_{AMC}}{S_{AMC_1}} = \dfrac{S_{BMC}}{S_{BMC_1}}$ или $\dfrac{S_{AMC}}{S_{BMC}} = \dfrac{S_{AMC_1}}{S_{BMC_1}}$. От свойство 3 имаме $\dfrac{S_{AMC_1}}{S_{BMC_1}} = \dfrac{AC_1}{BC_1}$, т.е. $\dfrac{S_{AMC}}{S_{BMC}} = \dfrac{AC_1}{BC_1}$.

Зад. 1 Дължините на страните на триъгълник образуват аритметична прогресия. Да се докаже, че радиусът на вписаната окръжност е равен на $\dfrac{1}{3}$ от средната по големина височина на триъгълника.

Решение. Нека дължините на страните на ΔABC са a, b и c, при което $a \leq b \leq c$. Тогава $h_c \leq h_b \leq h_a$. От това, че a, b и c образуват аритметична прогресия следва, че $b = \dfrac{a+c}{2}$ и, тъй като $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} r\left(a+b+c\right)$, намираме за лицето на триъгълника $S_{ABC} = \dfrac{3}{2} rb$, където r е радиусът на вписаната в триъгълника окръжност. От друга страна $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} h_b.b$. Тогава от $\dfrac{3}{2} rb = \dfrac{1}{2} bh_b$ намираме $r = \dfrac{1}{3} h_b$.

Зад. 2 В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$. Ако $AB=a$, $AD=b$, $CD=c$, $BC=d$, $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$, докажете, че $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{ad+bc}{ab+cd}$.



Решение. Тъй като четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност и $\angle A=\alpha$, а $\angle B=\beta$, то $\angle C=180^\circ-\alpha$ и $\angle D=180^\circ-\beta$. Очевидно

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} \text{ и } S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}.$$

$$S_{ABD} = \frac{a.b\sin\alpha}{2}, \quad S_{BDC} = \frac{cd\sin(180^{\circ}-\alpha)}{2} = \frac{cd\sin\alpha}{2}.$$

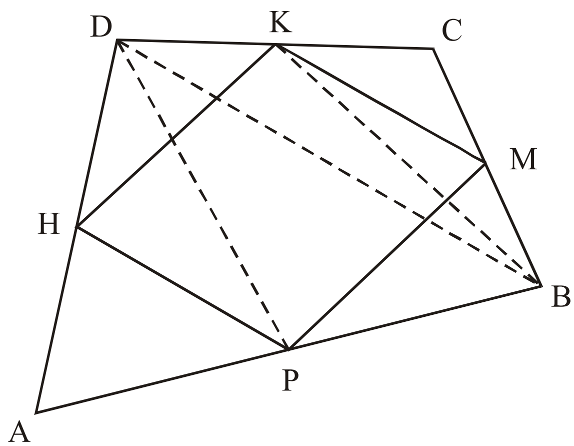
Така получаваме $S_{ABCD} = \frac{a.b\sin\alpha}{2} + \frac{cd\sin\alpha}{2}$.

От $S_{ABC} = \frac{ad\sin\beta}{2}$ и $S_{ACD} = \frac{bc\sin(180^{\circ}-\beta)}{2} = \frac{bc\sin\beta}{2}$ следва, че

$$S_{ABCD} = \frac{ad\ sin\ \beta}{2} + \frac{bc\ sin\ \beta}{2}.$$

Тогава $absin\alpha + cdsin\alpha = adsin\beta + bcsin\beta$ откъдето $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$.

Зад. 3 Докажете, че лицето на четириъгълника, с върхове средите на страните на даден четириъгълник, е равно на половината от лицето на дадения четириъгълник.



Решение. I начин: Разглеждаме четириъгълника $ABCD$. Нека точките P, M, K и H са среди съответно на AB, BC, CD и DA. От триъгълниците ABD и BCD и медианите в тях DP и BK получаваме (1) $S_{APD} = \frac{1}{2}S_{ABD}$ и $S_{BKC} = \frac{1}{2}S_{BCD}$. Аналогично от триъгълниците APD и BKC и техните медиани PH и KM имаме (2) $S_{APH} = \frac{1}{2}S_{APD}$ и $S_{KMC} = \frac{1}{2}S_{BKC}$. От (1) и (2) следват зависимостите $S_{APH} = \frac{1}{4}S_{ABD}$ и $S_{KMC} = \frac{1}{4}S_{BCD}$. Така достигаме до равенствата (3) $S_{APH} + S_{KMC} = \frac{1}{4}\left(S_{ABD} + S_{BCD}\right) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Аналогично се получава (4) $S_{PBM}+S_{HKD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Равенствата (3) и (4) показват, че

$S_{APH}+S_{BPM}+S_{KMC}+S_{HKD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, откъдето следва, че $S_{PMKH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

II. Начин: KM е средна отсечка в $\Delta DBC \Rightarrow KM \| DB$ и $\Delta KMC \sim \Delta DBC$. От свойствата на подобните триъгълници следва, че $\frac{S_{KMC}}{S_{DBC}}=\left(\frac{KM}{BD}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Следователно $S_{KMC}=\frac{1}{4}S_{DBC}$ (5). Аналогично следва, че $S_{APH}=\frac{1}{4}S_{ABD}$ (6). От равенства (5) и (6) $\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BDC}=4S_{APH}+4S_{KMC} \Rightarrow S_{KMC}+S_{APH}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ (7)

Аналогично се доказва, че $S_{PMB}+S_{HKD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$ (8). От равенства (7) и (8) $\Rightarrow S_{KMC}+S_{APH}+S_{PMB}+S_{HKD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, т.е. $S_{PMKH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Посочените два начина за решаване на задачата показват възможността за прилагане на метода на лицата в различните етапи от обучението на учениците.

По аналогичен начин могат да се разработят и други частни методи за решаване на задачи, които ще бъдат предмет на разглеждане на други публикации.

В заключение ще отбележим, че задачите са средство не само за постигане на определени образователни цели и задачи, но и значително допринасят за реализирането на развиващите и възпитателни цели и задачи на обучението въобще.

Важно качество на мисълта е способността да се правят верни изводи от правилни съждения, което се придобива най-вече чрез дейността решаване на математически задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ганчев, И. Основни учебни дейности в урока по математика. ИФ”Модул-96”, София, 1999.

2. Лалчев, В. Здравко, Ирина З. Вутова. Свързващ елемент. Математика и математическо образование – В: сборник от доклади – 32 конференция на СМБ, 5-8 април, 2003, 369-373.

3. Паскалев, Г., З. Паскалева. Математика за 10. клас второ равнище. Архимед, София, 2001.

4. Портев, Л., Ив. Иванов и др. Математика – учебно помагало за държавен зрелостен и кандидатстудентски изпит, част II. Летера, Пловдив, 2004.

5. Рангелова, П. Лица на фигури. Пловдив, 1992.