СИСТЕМА ВАРИАНТИ НА ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ – СРЕДСТВО ЗА АКТИВИЗИРАНЕ НА РЕФЛЕКСИЯ[8]

доц. д-р Васил Б. Милушев, доц. д-р Димитър Г. Френкев
ПУ „Паисий Хилендарски”, ПУ „Паисий Хилендарски”- филиал Смолян

A SYSTEM OF VARIATIONS OF TRANSFORMATION OF MATHEMATICAL PROBLEMS – MEANS OF ACTIVATION OF REFLEXION

Assist. Prof. Vassil B. millushev, Phd; Assist. Prof. Dimitar G. Frenkev, Phd
Plovdiv University„Paisiy Hilendarski”; Plovdiv University„Paisiy Hilendarski”-Department of Smolyan

Abstract

There is presented a part of elaborated system of variations of transformation of problems, which is based on changes of structural components of problems. We illustrate an example of methodics for the use of this system for mastering knowledge and skills of students for solving problems in the context of the reflexive approach.

Решаването на математически задачи е главно средство за реализиране целите на обучението по математика и затова трябва да бъде и нейна цел.

Съставянето и преобразуването на математически задачи се явяват производни дейности на първообразната дейност решаване на задачи. Всеизвестно е, че този, който умее да съставя, в т.ч. и да преобразува, задачи, той най-добре умее и да решава задачи. Затова съставянето на задачи чрез преобразуване също трябва, в определени етапи, да бъде и цел на обучението. Системното използване на дейността преобразуване на задачи може да съдейства за по-пълноценно оползотворяване на заложените в методическите системи за средното училище принципи на обучение. Водещи измежду тях са принципите за съзнателност, активност и рефлексивност. Последният изисква по-голяма активност, съзнателност и рефлексивност от субекта и особено от обучаващия, който трябва да разгръща рефлексивния потенциал на учещия. Специално, в процес на усъвършенстване на уменията на учещите за решаване на задачи, обучаващият трябва да ги мотивира в необходимата степен, най-вече чрез акцентиране върху широката приложимост на овладените знания и умения за методите и евристиките за решаване. Заедно с това, чрез формирането и развиването на умения за целесъобразни преобразувания на задачи, още повече

[8] Изследванията са направени с финансово съдействие на фонд НИ при ПУ „Паисий Хилендарски”. Договор 07-М-8

може да се съдейства за насочване учещия към самоорганизация на собствената си дейност (самоактуализация, самореализация, самоконтрол, саморегулация, самоусъвършенстване на личностните си качества и т.н.). По този начин обучаващият оптимално може да оползотворява рефлексивните възможности на учебното съдържание, да създава условия за активизиране у учещия на ефективните типове рефлексии над съответните знания и над уменията му за тяхното прилагане.

„Рефлексията е социокултурно обусловена интелектуална процедура, съзнателно насочена (и осмислена) към самопознание, която се проявява в няколко различни модуси"[1, с. 99]. С разглеждания проблем пряко са свързани модусите ***интелектуална*** рефлексия и ***праксиологическа*** рефлексия. Интелектуалната рефлексия, от своя страна, се проявява в два по-конкретни модуса: 1) „като осъзнаване основанията и източниците на нашите мисли, действия и знания"[1,с.111]; 2) „интелектуалната рефлексия е конструиране на плана, схемата, модела, по който ще се реши една проблемна и достатъчно сложна задача; мислено забягване напред в процеса на познавателното действие („перспективна рефлексия"), при което субектът внимателно отчита и прилага своите лични познавателни възможности, своите силни (но и слаби) страни..." [пак там].

„Размишленията, чрез които субектът подбира нужните и най-подходящи знания, за да осъществи дадена практическа дейност; мисловните процедури, чрез които се подготвя, регулира и контролира превръщането на тези знания в средства (инструменти)...; регулирането, контролирането и осмислянето на ефективността от използването на прагматизираните знания и действия ... и всичко това непрекъснато съотнасяно с особеностите на мислещия и действащ субект – такъв е в основни линии психичният феномен, за който беше нужен новият термин „праксиологическа рефлексия" [1,с.181]. Една от целите на IV етап „Допълнителна работа по задачата след намиране на решението ѝ" от идеалния модел на дейността решаване на задачи е да се обогати опитът на учещите, необходим за търсене и реализиране на решения на задачи, т.е. да се създават подходящи условия за формиране и развиване на рефлексивни умения чрез организиране и осъществяване на целесъобразни дейности, като: търсене на други начини за решаване; проверяване общовалидността на използваните методи и евристики при решаване на задачите от съответния й клас; обобщаване на задачата и/или съответните методи и евристики за решаване; преобразуване и/или съставяне на задачи, конструиране на дидактически системи от задачи и др.

Нашият опит, част от който ще споделим тук, показва, че преобразуването на задачи съдържа значителен рефлексивен потенциал

Ще използваме следните компоненти на информационна структура на математическите задачи: условие, изискване (търсено), метод и базис. Ако на учещия не са известни само компонентите метод и базис, то задачата е от евристичен тип (III степен на проблемност); ако не е известен само метода – задачата е от полуевристичен тип (II степен на проблемност); а ако са известни всичките компоненти, задачата е от алгоритмичен тип (I степен на проблемност).

Критерий за сложността на една задача е броят на задачите-компоненти, чиито решения съставят нейното решение.

Е. Скафа [2] разглежда модел на понятието задача, в който включва като компонент и системата от средства, използвани от субектът при решаването на задачата. Според нас този компонент има пряко отношение към организацията по търсене и реализиране решението на задачата.

Имайки предвид тези теоретични аспекти на понятието задача, обособихме система от варианти за преобразуване на задача (най-вече осъществявани в етапа „Поглед назад”), които, заедно с предназначенията им, представяме компактно чрез следната таблица.

5

Преобразуване, с цел повишаване степента на проблемност и/или сложност, чрез внасяне на съответни промени в:	**Активизира рефлексията върху знанията и уменията за осъществяване на:**
условието и/или изискването на задачата	аналитико-синтетични разсъждения от определен тип
метода за решаване	аналитико-синтетични разсъждения в комбинация с евристики
метода и базиса, които се използват при решаване на задачата	учебна дейност с проява на творчество
организацията по търсене и реализиране на решение	търсене и използване на ефективни информационни средства, инструменти; изготвяне на проекти, модели (схеми, чертежи и др); изграждане на алгоритми и т.н.

След като учениците овладеят в достатъчна степен отделните варианти за преобразуване на задачи, могат да им бъдат поставени и задания, при които едновременно се осъществяват повече от един вариант на преобразуване.

Ще представим „обучаващи решения” и варианти на преобразуване на следната конкурсна

Задача. Да се намерят острите ъгли $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ на правоъгълен триъгълник, ако радиусите $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$ съответно на вписаната в триъгълника и описаната около него окръжности се отнасят както ***2:5***.

Тъй като в условието на задачата е дадено само отношението на $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$, то правоъгълният триъгълник е <u>определен до подобие</u> – това е структурата на задачата. Тази информация ни насочва към общи идеи за решаване, една от които е <u>въвеждане на допълнителен метричен параметър</u> и свеждане до задача, в която фигурата е определена до еднаквост.

При осъществяване на тази идея за параметър е уместно да се въведе най-голямата обща мярка $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$. Тогава $r = 2x$, $R = 5x$. Процесът на прилагане на възходящ анализ за откриване плана за решаване може, за краткост, да се изобрази схематично по следния начин:

$$\alpha \leftarrow \sin\alpha \leftarrow \frac{a}{c} \leftarrow \begin{cases} c \leftarrow R = 5x \\ a \leftarrow a + b = 2r + 2R \leftarrow \begin{cases} r = 2x,\ R = 5x \\ b \leftarrow b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \end{cases}$$

Схемата за намиране на катета ***a*** е от тип „мрежа”, една от веригите на която съдържа няколко твърдения, отнасящи се до катета ***a***. Затова се налага да се състави система от уравнения, едно от неизвестните на които е ***a***, а именно: $\begin{vmatrix} a^2 + b^2 = 100x^2 \\ a + b = 14x \end{vmatrix}$ Като се реши тя, се получава $a = 6x$, $b = 8x$ или $a = 8x$, $b = 6x$.

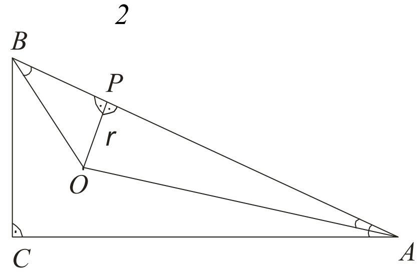
Тогава от $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ се получава $\sin\alpha = 0{,}6$; $\sin\beta = 0{,}8$ или обратно $\sin\alpha = 0{,}8$; $\sin\beta = 0{,}6$.

В етапа „Поглед назад” най-напред бе разискван въпросът за съществуване на други начини за решаване. Структурата на задачата насочи учещите още към следните две идеи за решаване: използване метода на подобие; тъй като се търси ъгъл – инвариант на подобието, то би могло да се състави тригонометрично уравнение за него.

II начин. При реализирането на първата идея се разглежда множеството от правоъгълни триъгълници, за които $r : R = 2 : 5$. Тъй като те имат съответно равни ъгли, е уместно да се избере един от тях, например, онзи за който $r = 1$. Тогава $R = 2{,}5$, $c = 5$, а по-нататък разсъжденията са същите, както при първия начин, но се реализират по-лесно, защото в системата няма параметър.

III начин. За да намерим ъгъл α, достатъчно е да съставим тригонометрично уравнение за него.

Случай 1). Понеже центърът *O* на вписаната окръжност е пресечната точка на вътрешните ъглополовящи на триъгълника, достатъчно е да съставим тригонометрично уравнение за $\dfrac{\alpha}{2}$.



Като се има предвид, че ΔAOP съдържа ъгъла $\dfrac{\alpha}{2}$, а ΔBOP съдържа ъгъл, който може да се изрази чрез $\dfrac{\alpha}{2}$ и освен това двата триъгълника имат общ катет с дължина ***r*** и ***AP+BP=2R***, то за да се състави тригонометрично уравнение за $\dfrac{\alpha}{2}$, е достатъчно да се разгледат тези триъгълници и да се намери връзка между техни елементи, които, от своя страна, могат да се изразят чрез тригонометрични функции на търсения ъгъл $\frac{\alpha}{2}$ и даденото отношение $\frac{r}{R}$. Понеже $\frac{AP+BP}{r}=\frac{2R}{r}$, то е целесъобразно да използваме равенствата $cot\,g\frac{\alpha}{2}=\frac{AP}{r}$ и $cot\,g\left(45^o-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{BP}{r}$. Така стигаме до уравнението $cot\,g\frac{\alpha}{2}+cot\,g\left(45^o-\frac{\alpha}{2}\right)=5$. То, според някои от учещите, е сравнително сложно за решаване, което показва, че като се промени базиса на задачата, може, както в случая, да се повиши степента на нейната проблемност.

Случай 2). Като се има пред вид дефинициите за тригонометричните функции на остър ъгъл в правоъгълен триъгълник и факта, че $c=2R$, то за да се състави тригонометрично уравнение спрямо α, е достатъчно да се открие връзка между отношенията $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{r}{R}$. За целта е достатъчно да се намери „хомогенно” равенство, съдържащо *a, b,* $c=2R$ и *r*. Такова е характеристичното свойство $a+b=2R+r$ на правоъгълния триъгълник. От него последователно се получава: $\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}=1+\frac{r}{R}$, $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1+\frac{2}{5}$, $sin\,\alpha+cos\,\alpha=\frac{7}{5}$ $\Leftrightarrow$ $sin\,2\alpha=\frac{24}{25}=0,96$. Оттук, с помощта на таблицата за стойностите на тригонометричните функции, може да се намери и стойността на самия ъгъл α.

С цел апробиране и на други идеи, методи и подходи за активизиране на интелектуалната и/или праксиологическата рефлексия над знанията и уменията за методите и евристиките за решаване на задачи, с учещите бяха обсъдени и други въпроси. Тук ще се спрем върху въпросите: При кой начин най-добре се демонстрират умения за разсъждаване чрез анализ?; Кой начин е най-рационален?

Относно първия въпрос учениците единодушно посочиха първия начин, най-вече заради схематичното представяне на разсъжденията по схемата на Пап. Поставихме им като задание да помислят как биха могли да внесат изменение в текста на задачата така, че да се „удължи” процеса на търсене на решение с една стъпка. Измежду дискутираните предложения, за определеност, се спряхме на идеята да се замени изискването със следното: „Да се намери ъгъла между ъглополовящите на вътрешните ъгли при върховете *B* и *C* ”. Предложихме им да представят схематично откриването на решение по посочения по-горе втори начин, но при това ново изискване. Те разработиха следната схема:

$$\angle BOC \leftarrow \alpha \leftarrow sin\,\alpha \leftarrow \frac{a}{c} \leftarrow \begin{cases} c \leftarrow R = 2,5 \\ a \leftarrow a+b = 2r+2R \leftarrow \begin{cases} r=1,\ \ R=2,5 \\ b \leftarrow b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \end{cases}$$

При коментиране на втория въпрос учещите отбелязаха че, въпреки използването на таблици, третият начин е най-рационален. Бе разискван и въпросът: „ Как трябва да се промени числената стойност на отношението $\frac{r}{R}$ в условието на задачата, че да не се налага използване на таблица?”

В отговор на този въпрос бяха направени следните разсъждения. Нека положим $\frac{r}{R}=t$. Тогава от равенството $\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}=1+\frac{r}{R}$ се получава уравнението $\sin\alpha+\cos\alpha=1+t$. Тъй като α е остър ъгъл и последното уравнение е еквивалентно на уравнението $\sqrt{2}\cos\left(45^0-\alpha\right)=1+t$, т.е. $\sin\left(45^0+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+t\right)$, то трябва да са изпълнени неравенствата $1<1+t\le\sqrt{2}$. Освен това уравнението $\sin\alpha+\cos\alpha=1+t$ е равносилно и на по-простото уравнение $\sin 2\alpha=t^2+2t$. За да може да се използва последното за постигане на горната цел, трябва да се направи оценка на израза t^2+2t така, че да са изпълнени неравенствата $1<1+t\le\sqrt{2}$. От тях лесно се получава, че $0<t^2+2t\le 1$. Сега е ясно, че за да има уравнението $\sin 2\alpha=t^2+2t$ решения (спрямо α), които да се намират без помощта на таблицата за стойностите на тригонометричните функции, е достатъчно параметърът t да се определи така, че изразът t^2+2t да получава съответно стойностите: $\frac{1}{2}$ или $\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $\frac{\sqrt{3}}{2}$, или 1, които очевидно принадлежат на интервала (0;1]. Оттук, с известна помощ, учещите съставиха и решиха следните уравнения $t^2+2t=\frac{1}{2}$, $t^2+2t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t^2+2t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $t^2+2t=1$. Така за отношението $\frac{r}{R}=t$, бяха пресметнати съответно стойностите:

$$t_1=\frac{\sqrt{6}}{2}-1,\ t_2=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1,\ t_3=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ \text{и}\ t_4=\sqrt{2}-1.$$

Беше направена проверка, че при тези стойности за отношението $\frac{r}{R}$, за ъгъла 2α наистина се получават съответно стойностите 30^0, 45^0, 60^0 и 90^0.

След като учещите сравниха изходната задача със задачите, условията на които съдържат намерените стойности за $\frac{r}{R}$, стигнаха до извода, че при решаването на новите задачи се изискват и умения за преобразуване на изрази и уравнения, съдържащи радикали. Но въпреки това, третият начин за решаване пак се явява най-рационален (но не, защото не се използват таблици за стойности на тригонометрични функции).

Учещите варираха базиса и метода и преобразуваха задачата – на базата на знанията и уменията за аналитико-синтетични разсъждения и чрез целенасочено изследване на параметрично уравнение. С това те овладяха още по-добре средствата, инструментите за търсене и реализиране на решение и осъзнаха важността на уменията за провеждане на такива изследвания, което естествено е свързано с развиването на праксиологическа рефлексия върху посочените знания и умения.

Литература

1. Василев, В. Рефлексията в познанието, самопознанието и практиката. Пловдив: „Макрос", 2006.
2. Скафа, Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Донецк: Изд ДонНУ, 2004.