ПРАКТИЧЕСКО ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЕДНА ТЕОРЕМА ЗА АСИМПТОТИЧЕСКО ПОВЕДЕНИЕ НА РЕШЕНИЯТА НА НЕУТРАЛНО ДИФЕРЕНЦИАЛНОУРАВНЕНИЕ С ЦЕЛОЧИСЛЕН АРГУМЕНТ И ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ

Тодор Костадинов

Резюме: *В настоящата статия констуираме два примера илюстриращи теорема за асимптотичното поведение на решенията на неутрално диференциално уравнение. Доказано е че примерите изпълняват условията на теоремата и е направен извод за поведението на решението.*

Ключови думи: *Неутрално уравнение, неосцилиращи и осцилиращи решения, асимптотично поведение, целочислен аргумент.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Диференциалните уравнения със целочислен аргумент за първи път са въведени от А. Мишкис (Myshkis 1977). Те представляват уравнения с хибридни свойства, които комбинират част от свойствата на непрекъснатите системи и част от свойствата на диференчните уравнения. Ахмет в (Akhmet 2007) пръв въвежда ‘гама’ функцията в своите разглеждания. Тази функция е широко използвана в няколко работи на Чиу и Пинто (Chiu 2014), (Chiu, Pinto 2010), (Chiu, Pinto 2013). Пинто в (Pinto 2009) и (Pinto 2011) изяснява важността на интервалите на закъснение и изпреварване.

В тази статия разглеждаме уравнението

$$\left(y(t)+py(t+\tau)\right)'=qf(y(\gamma(t)))$$

където $p\in R\setminus\{0\}$, $0<\tau<1$, $q<0$. Дефиницията на $\gamma(t)$ ще бъде дадена по долу.

В предишната работа на (Kostadinov, Projcheva 2016) е разгледано поведението на решенията в този случай като са конструирани примери онагледяващи повечето теореми. В статията ще конструираме примери за случая когато $p<-1$ които там не са показани.

Статията е организирана както следва:

Предварителни бележки

В статията ще разгледаме уравнението

$$(y(t)+py(t+\tau))'=q\,f(y(\gamma(t))),\qquad p<-1,\ q<0. \tag{1}$$

Въвеждаме две редици от реални числа $\{t_n\},\{\gamma_n\},\ n=0,1,2,\dots$, такива, че $t_0=-\tau, t_{n+1}=t_n+1$ и $n<\gamma_n\le t_{n+1}, \gamma_{n+1}=\gamma_n+1$. Функцията $\gamma(\mathrm{t})$ е стъпаловидна функция, която се задава с формулата:

$$\gamma(\mathrm{t})=[t] \quad \text{за} \quad t_n\le t<\gamma_n \quad \text{и} \quad \gamma(t)=2\left[\frac{t+1}{2}\right] \quad \text{за} \quad \gamma_n\le t<t_{n+1}$$

Както обикновенно с C ще означим Банаховото пространство от начални функции $C=\{\varphi:[-\tau,0]\to R:\varphi\in C([-\tau,0],R)\}$ със норма $\|\varphi\|=\sup_{t\in[-\tau,0]}|\varphi|$ и въвеждаме начално условие:

$$y(t)=\varphi(t),\ t\in[-\tau,0],\ \varphi\in C \tag{2}$$

Дефиниция 1. Функцията $y(t)$ се нарича решение на задача (1), (2), ако:

(a) $y(t)\in C([-\tau,\infty),R)$ и удовлетворява условие (2) за някоя $\varphi\in C$;

(b) $z(t)=y(t)+py(t+\tau)$ има производна за всяко $t\in[-\tau,\infty)$ с изключение на точките $t=\gamma_n$ и $t=n$, $n=0,1,2...$, в които притежава дясна производна;

(c) $y(t)$ удовлетворява (1) във всеки интервал $[n-\tau,n-\tau+1)$ $n=0,1,2...$.

Дефиниция2. Казваме, че решението на уравнение (1) осцилира, ако множеството от неговите нули е неограничено отгоре, в противен случай казваме, че е неосцилиращо.

Ще казваме че условията (A) се изпълнени ако:

A1. $f\in C(R,R)$,

A2. $uf(u)>0$ за $u\neq 0$,

A3. За всяко $\delta>0$ съществува $\bar{\delta}>0$ такова, че ако $|u|>\delta$, то $|f(u)|>\bar{\delta}$.

В (Kostadinov ,Projcheva 2016) е доказана следната Теорема.

Теорема 1. Нека условията (A) са валидни, $q<0$ и $p<-1$. Тогава ако $y(t)$ е неосцилиращо решение на уравнението (1), то $\lim_{t\to\infty}\inf y(t)=0$ или $\lim_{t\to\infty}|y(t)|=\infty$. Нещо повече, когато $\lim_{t\to\infty} z(t)\geq 0$, тогава $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$.

Въвеждаме означението $y(n)=c_n$, $n=0,1,2,...$.

Нека в уравнение (1) $\tau=\dfrac{1}{2}$ и нека $t\in\left[n-\dfrac{1}{2},n+\dfrac{1}{2}\right)$ $n=1,2,3...$.Интегрираме (1) от n до t и получаваме

$$y(t)+py\left(t+\frac{1}{2}\right)=c_n+py\left(n+\frac{1}{2}\right)+qf(c_n)\gamma_0+qf(c_{n+1})(t-\gamma_n) \tag{3}$$

От уравнението (3) и непрекъснатостта на $y(t)$, минавайки към граница при $t\to n+\dfrac{1}{2}$, получаваме

$$(1-p)y\left(n+\frac{1}{2}\right)=c_n-pc_{n+1}+qf(c_n)\gamma_0+q\left(\frac{1}{2}-\gamma_0\right)f(c_{n+1}) \qquad (4).$$

Основни резултати

Пример 1. Разглеждаме уравнението

$$\left(y(t)-2y\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)'=-\frac{1}{2}y(\gamma(t)) \tag{5}$$

отговарящо на условията на Теорема 1 със $\tau=\dfrac{1}{2},p=-2,q=-\dfrac{1}{2}$ и $f(t)=t$ с $\gamma_0=-\dfrac{1}{2}$ и начална функция

$$\varphi(t)=2+\frac{1}{2\lambda}+\frac{t}{2\lambda(\lambda-1)} \qquad \text{за} \qquad t\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right),$$

$$\varphi(t)=1+\left(\frac{5-4\lambda}{2\lambda(\lambda-1)}-4\right)t \qquad \text{за} \qquad t\in\left[-\frac{1}{4},0\right].$$

където $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ е корен на уравнението $F(\lambda) = 16\lambda^3 - 20\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}$=0. Такъв корен съществува, защото $F(0) = \frac{1}{2} > 0$ и $F\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0$.

Дефинираме функцията $y(t)$ в $[-\frac{1}{2}, \infty)$ като

$$y\left(t + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(y(t) - \mathrm{z(t)}\big) \quad \text{за} \quad t \in \left[-\frac{1}{2} + \frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right], \; k = 0,1,2,...$$

където

$$y(t) = \varphi(t) \quad \text{за} \quad t \in [-\frac{1}{2}, 0] \quad \text{и}$$

$$z(t) = \frac{\lambda^{n-1}}{2}\left(n + \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{2(1-\lambda)}\right) - \frac{\lambda^{n-1}}{2} t \qquad \text{за} \quad t \in [n - \tfrac{1}{2}, n) \;,$$

$$z(t) = \frac{\lambda^{n}}{2}\left(n + \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{2\lambda(1-\lambda)}\right) - \frac{\lambda^{n}}{2} t \qquad \text{за} \quad t \in [n, n + \tfrac{1}{2}) \;\; n = 0,1,2,... \;.$$

Ще докажем че $y(t)$ е решение на (5) с начална функция $\varphi(t)$, $\liminf\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ и $y(t) > 0$ в $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$. От дефиницията на $y(t)$ следва, че $z(t) = y(t) - 2y\left(t + \frac{1}{2}\right)$.

Ще докажем, че $z'(t) = -\frac{1}{2} y(\gamma(t))$ във всеки интервал $[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$.

От дефиницията на $z(t)$ получаваме $z(n) = \frac{\lambda^n}{2}\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{2\lambda(1-\lambda)}$ и $z(n + \frac{1}{2}) = \frac{\lambda^n}{2}\frac{1}{4(1-\lambda)}$.

Ще докажем по индукция, че $y(n) = \lambda^n$, $n = 0,1,2,...$. Тъй като $y(0) = \varphi(0) = 1$, то твърдението е валидно при $n = 0$.

Допускаме, че $y(n) = \lambda^n$,

$$y(n+1) = \frac{1}{2}\big(y(n+\tfrac{1}{2}) - z(n+\tfrac{1}{2})\big) = \frac{1}{4}(y(n) - z(n) - 2z(n+\tfrac{1}{2})) = \frac{\lambda^n}{4}\left(1 - \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{4\lambda(1-\lambda)} - \frac{1}{4(1-\lambda)}\right).$$

От дефиницията на λ непосредствено се установява, че

$$1 - \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{4\lambda(1-\lambda)} - \frac{1}{4(1-\lambda)} = 4\lambda$$

Тогава $y(n+1) = \lambda^{n+1}$ и индуктивната стъпка е завършена.

От доказаното $y(n) = \lambda^n$ и дефинициите на $z(t)$ и $\gamma(t)$ непосредствено следва, че $y(t)$ удовлетворява уравнението (5) и че $\liminf\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Тъй като $y(t)$ е линейна функция във всеки интервал $[-\frac{1}{2} + \frac{k}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{k}{4}]$, $k = 0,1,2...$, то за да докажем, че $y(t) > 0$ е достатъчно да докажем, че $y(-\frac{1}{2} + \frac{k}{4}) > 0$ за $k = 0,1,2...$.

$$y(-\tfrac{1}{2}) = \varphi(-\tfrac{1}{2}) = 2 + \frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{4\lambda(1-\lambda)} = \frac{8 - 2\lambda}{4(1-\lambda)} + \frac{1}{4\lambda} > 0 \,.$$

$y(-\frac{1}{2} + \frac{k}{4})$ зависи от k и е в една от формите $y(n), y(n + \frac{1}{2})$ и $y(-\frac{1}{4} + \frac{n}{2})$.

Очевидно $y(n)=\lambda^n>0$. От уравнение (4) (за $f(t)=t$) следва че,

$$y(n+\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}y(n)+\tfrac{2}{3}y(n+1)>0\,.$$

Остава да докажем, че $y(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{n}{2})>0$. Точката $-\tfrac{1}{2}+\tfrac{n}{2}$ е или във вида $k+\tfrac{1}{4}$ или във вида $k+\tfrac{3}{4}$. Понеже $y(t)$ е линейна функция и $y(k)>0$, то или $y(k-\tfrac{1}{4})>y(k)>0$ или $y(k+\tfrac{1}{4})>y(k)>0$.

Нека $y(k-\tfrac{1}{4})>y(k)>0$. Тогава

$$y(k+\tfrac{1}{4})=\frac{1}{2}\big(y(k-\tfrac{1}{4})-z(k-\tfrac{1}{4})\big)>\frac{1}{2}\left(\lambda^k-\frac{\lambda^{k-1}(2\lambda-1)}{8(1-\lambda)}\right)=\frac{\lambda^{k-1}}{2}\left(\lambda+\frac{1-2\lambda}{8(1-\lambda)}\right)>0\,.$$

Нека $y(k+\tfrac{1}{4})>y(k)>0$. Тогава

$$y(k+\tfrac{3}{4})=\frac{1}{2}\big(y(k+\tfrac{1}{4})-z(k+\tfrac{1}{4})\big)>\frac{1}{2}\left(\lambda^k-\frac{\lambda^{k-1}(2\lambda^2-1)}{4(1-\lambda)}\right)=\frac{\lambda^{k-1}}{2}\left(\lambda+\frac{1-2\lambda^2}{4(1-\lambda)}\right)>0\,.$$

Следователно, $y(\mathrm{t})>0$ за всяко $t\in[n-\tfrac{1}{2},n+\tfrac{1}{2})$, т.е. е неосцилиращо, с което доказахме, че то изпълнява условията и резултатите на Теорема 1.

Забележка 1. Понеже $z(t)$ не винаги е неотрицателно, то не можем да твърдим, че $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$.

Пример 2. Разглеждаме уравнение (5) с начална функция $\varphi(t)=2+\dfrac{1}{2\lambda}+\dfrac{t}{2\lambda(\lambda-1)}$ за $t\in[-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{4})$, $\varphi(t)=1+(\dfrac{5-4\lambda}{2\lambda(\lambda-1)}-4)t$ за $t\in[-\tfrac{1}{4},0]$, където λ е корен на уравнението $F(\lambda)=16\lambda^3-20\lambda^2-\lambda-2=0$.Съществува корен $\lambda\in(\tfrac{9}{8},\tfrac{5}{4})$ на това уравнение понеже $F(\tfrac{9}{8})<0$ и $F(\tfrac{5}{4})>0$.

Дефинираме функцията $y(t)$ в $[-\dfrac{1}{2},\infty)$, като $y(t+\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}(y(t)-\mathrm{z(t)})$ за $t\in\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{2},\dfrac{k}{2}\right]$, $k=0,1,2,\ldots$, където $y(t)=\varphi(t)$ за $t\in[-\dfrac{1}{2},0]$ и

$$z(t)=\frac{\lambda^{n-1}}{2}\left(n+\frac{\lambda-2}{2(\lambda-1)}\right)-\frac{\lambda^{n-1}}{2}t \quad \text{за} \quad t\in[n-\tfrac{1}{2},n)\ ,$$

$$z(t)=\frac{\lambda^{n}}{2}\left(n+\frac{\lambda-2}{2\lambda(\lambda-1)}\right)-\frac{\lambda^{n}}{2}t \quad \text{за} \quad t\in[n,n+\tfrac{1}{2}) \quad n=0,1,2\ldots.$$

Ще докажем, че $y(t)$ е решение на (5) с начална функция $\varphi(t)$ и че $y(t)>1$ в $(0,\infty)$. От дефиницията на $y(t)$ следва, че $z(t)=y(t)-2y(t+\dfrac{1}{2})$.

Ще докажем, че $z'(t)=-\dfrac{1}{2}y(\gamma(t))$ във всеки интервал $[n-\tfrac{1}{2},n+\tfrac{1}{2}]$. От дефиницията на $z(t)$ получаваме $z(\mathrm{n})=\dfrac{\lambda^n}{2}\dfrac{\lambda-2}{2\lambda(\lambda-2)}$ и $z(n+\tfrac{1}{2})=\dfrac{\lambda^n}{2}\dfrac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}$.

Ще докажем по индукция че, $y(n)=\lambda^n \quad n=0,1,2,\ldots$.

Тъй като $y(0)=\varphi(0)=1$, то твърдението е валидно при $n=0$. Допускаме, че $y(n)=\lambda^n$, $y(n+1)=\dfrac{1}{4}(y(n)-z(n)-2z(n+\tfrac{1}{2}))=\dfrac{\lambda^n}{4}\left(1-\dfrac{\lambda-2}{4\lambda(\lambda-1)}-\dfrac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}\right)$.

От дефиницията на λ непосредствено се установява, че

$$1-\frac{\lambda-2}{4\lambda(\lambda-1)}-\frac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}=4\lambda\ .$$

Тогава $y(n+1)=\lambda^{n+1}$ и индуктивната стъпка е завършена.

От доказаното $y(n)=\lambda^n$ и дефинициите на $z(t)$ и $\gamma(t)$ непосредственно следва че, $y(t)$ удовлетворява уравнението (5).

За да докажем, че $y(t)>1$ за $t\in(0,\infty)$ е достатъчно да докажем, че

(*) $y(n)>1$;

(**) $y(n+\tfrac{1}{2})>1$;

(***) $y(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{n}{2})>1$, $n=1,2,\dots$.

(*) Очевидно $y(n)=\lambda^n>1$.

(**) От уравнение (4) (за $f(t)=t$) следва че,

$$y(n+\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}y(n)+\tfrac{2}{3}y(n+1)=\frac{\lambda^n}{12}(3+8\lambda)>1\,.$$

(***) Точката $-\tfrac{1}{2}+\tfrac{n}{2}$ е или във вида $k+\tfrac{1}{4}$ или във вида $k+\tfrac{3}{4}$. Понеже $y(t)$ е линейна функция, то или $y(k-\tfrac{1}{4})>y(k)$, или $y(k+\tfrac{1}{4})>y(k)$.

Нека $y(k-\tfrac{1}{4})>y(k)$. Тогава

$$y(k+\tfrac{1}{4})=\frac{1}{2}(y(k-\tfrac{1}{4})-z(k-\tfrac{1}{4}))>\frac{1}{2}\left(\lambda^k-\frac{\lambda^{k-1}(3\lambda-5)}{8(\lambda-1)}\right)=\frac{\lambda^{k-1}}{2}\left(\lambda-\frac{3\lambda-5}{8(\lambda-1)}\right)>\frac{\lambda^{k-1}}{2}2\lambda=\lambda^k>1,$$

тъй като лесно може да се докаже че, $\lambda-\dfrac{3\lambda-5}{8(\lambda-1)}>2\lambda$ за $\lambda\in(\tfrac{9}{8},\tfrac{5}{4})$.

Нека $y(k+\tfrac{1}{4})>y(k)$. Тогава

$$y(k+\tfrac{3}{4})=\frac{1}{2}(y(k+\tfrac{1}{4})-z(\mathrm{k}+\tfrac{1}{4}))>\frac{1}{2}\left(\lambda^k+\frac{\lambda^{k-1}(\lambda^2-3\lambda+4)}{8(\lambda-1)}\right)$$
$$=\frac{\lambda^{k-1}}{2}\left(\lambda+\frac{\lambda^2-3\lambda+4}{8(\lambda-1)}\right)>\frac{\lambda^{k-1}}{2}2\lambda=\lambda^k>1$$

Тъй като лесно може да се докаже че, $\lambda+\dfrac{\lambda^2-3\lambda+4}{8(\lambda-1)}>2\lambda$ за $\lambda\in(\tfrac{9}{8},\tfrac{5}{4})$.

Следователно, $y(t)$ е неосцилиращо, $\liminf\limits_{t\to\infty} y(t)>1$ и според Теорема 1 можем да заключим, че $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

Akhmet, M., Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2007, vol. 66, no. 2, p. 367–383.

Chiu, K. and M. Pinto, Periodic solutions of differential equations with a general piecewise constant argument and applications, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2010, vol. 46, p. 1–19.

Chiu, K. and M. Pinto, Oscillatory and periodic solutions in alternately advanced and delayed differential equations, *Carpathian Journal of Mathematics*, 2013, vol. 29, no. 2, p.149–158.

Chiu, K., Periodic solutions for nonlinear integro-differential systems with piecewise constant argument, The Scientic World Journal, vol. 2014, p. 1–4.

Kostadinov, T. and V. Projcheva, Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *IJPAM*, nov. 2016, vol. 110, iss. 3, p.547–562.

Myshkis, A., On certain problems in the theory of differential equations with deviating argument, *Uspekhl Matematicheskikh Nauk,* 1977, vol. 32, p.173–202.

Pinto, M., Asymptotic equivalence of nonlinear and quasi linear differential equations with piecewise constant argument, *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, vol. 49, no. 9-10, p. 1750–1758.

Pinto, M., Cauchy and Green matrices type and stability in alternately advanced and delayed differential systems, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2011, vol. 17, no. 2, p. 235–254.

Технически Университет София, Филиал Пловдив,
Пловдив 4000, ул. „Цанко Дюстабанов“ № 25,
e-mail: peterblood62@yahoo.com

PRACTICAL APPLICATION OF ONE THEOREM FOR ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS OF A NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENT OF GENERALIZED TYPE

Todor Kostadinov

Abstract. In the present paper two examples illustrated one Theorem for asymptotic behavior of the solutions of a neutral differential equation are construsted. It is proven that the examples satisfy the conditions of the Theorem and the conclusion for the behavior of the solution is made.

Key words: Neutral equation,oscillate and nonoscillate solutions,asymptotic behavior,piecewise constant argument.