МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ ПРИ КОНСТРУКЦИИ С ГЕРБЕРОВА СТАВА

Зорница Петрова, Мария Пейкова*

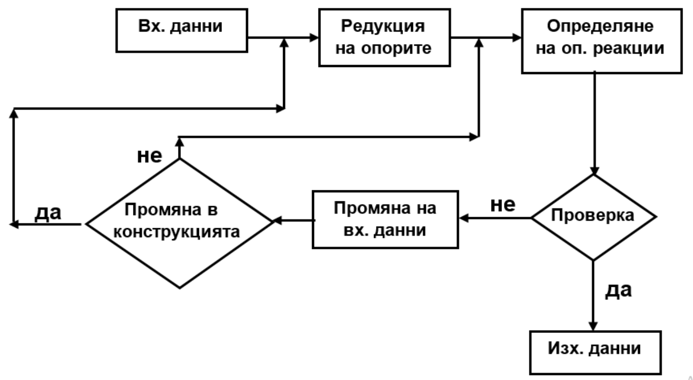
1. Увод

От векове Механиката е „практиката на математическите доказателства“. Целта на настоящата работа е едно предложение за нестандартен подход при приложение на метода на математическата индукция при изчислението на конструкции с герберова става. Този подход дава свобода на творческия избор и възможност за собствено конструктивно решение.

2. Теоретични основи

Методът на математическата индукция се базира на приемане на предварително изпълнени входни условия и следване на определените за даден проблем теоретични правила и методики до достигане на резултат. Резултатът от прилагането на метода води до два възможни изхода: получаване (теоретично или числено) на положително доказателство (решение) или достигане до противоречие или двусмислие. Последното предписва приемането на нови входни условия и повтаряне на решението (фигура 1). Процедурата продължава до достигане на желания резултат. Решаването на конструкции с герберови стави се подчинява на следната последователност от процедури:

1. Получаване на решение според условието на заданието чрез набор от условия за равновесие (алгебрични уравнения) и
2. Задължителна проверка, която направи верификация на резултата.



Фигура 1.

Потвърждението на верността на достигнатото решение задължително използва уравнения на равновесие, които са линейно независими от уравненията на процедурата за изчисляване. Изборът на този математически инструмент дава свобода на творчески избор и може да има повече от един правилен алгоритъм за достигане на резултат. Това е класическият подход.

Ако в процеса на приложение на математическата индукция е въведено „лъжливо (подвеждащо) условие“ тогава процедурата дава свобода за вариативност в самата конструкция отново с цел правилен резултат. Последното може да служи както за търсене на оптимизация на полученото решение така и за обучение и утвърждаване на знания от теорията. „Лъжливото условие“ може да не е умишлено въведено, а да е вариантност при създаване на конструкции, когато реалността не е очевидна, а се проверяват различни идеи. Ако има повече от едно решение може да се говори и за оптимизация. Задачата може да е продиктувана от практиката, но може да послужи и за проверка на знания и находчивост при конструктивното решение.

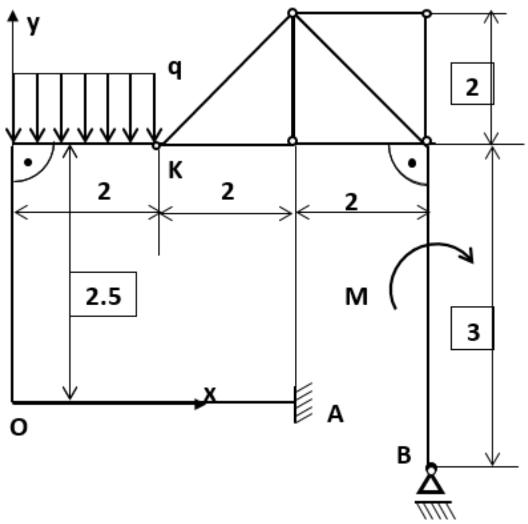
От Статиката е известно, че процедурата за необходимите изчисления в случая на конструкции с герберова става в началната конструкция от заданието изисква мисленото срязване на ставата до получаване на необходимите съставящи конструкции (прости греди, рамки и други). След това се прави избор на толкова на брой конструкции, колкото са необходими за провеждане на изчисляването, предписано от поставеното задание. Следва избор на условия за установяване на истинността на резултата.

3. Пример

Примерът е предназначен за проверка знанията за редукция на опорните стави и допустимостта на конструкцията според аксиомата от Статиката за неподвижността на всяка отделена част от дадена конструкция.

В настоящата работа се предлага *модификацията на приложението на математическата индукция* чрез въвеждането на „лъжливо условие“ на входа.

За илюстриране на идеята ще си послужим с прост пример. Нека заданието да изисква определяне на опорни реакции и всички прътови сили при зададената конструкция (фигура 2). Тя е натоварена според схемата. Изисква се и определяне на ставната сила в т. К.



Фигура 2.

Големините на товарите са: M=4 [kNm], F=5 [kN] и q=6 [kN/m]. Размерите са дадени на схемата.

Първата стъпка от решението е редукция на разпределения товар, герберовата става и опорните реакции и избор на комплект от съставни и/или цяла конструкция за основните изчисления. За настоящия пример е избран комплекта от конструкции, показан на фигура 3 и фигура 4. Верификацията на решението се реализира чрез редуцираната конструкция, показана на фигура 5.

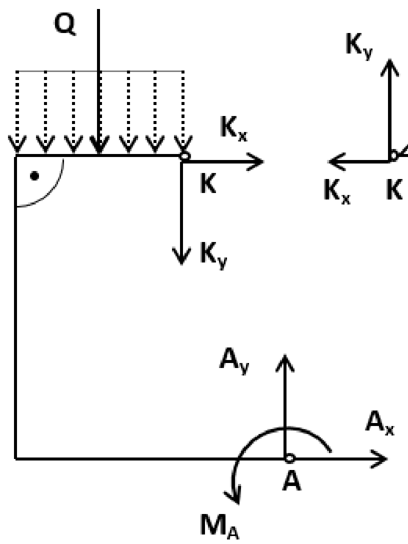
Системите от уравненията за изчислението са избрани да бъдат:

- за конструкцията АК (фигура 3):

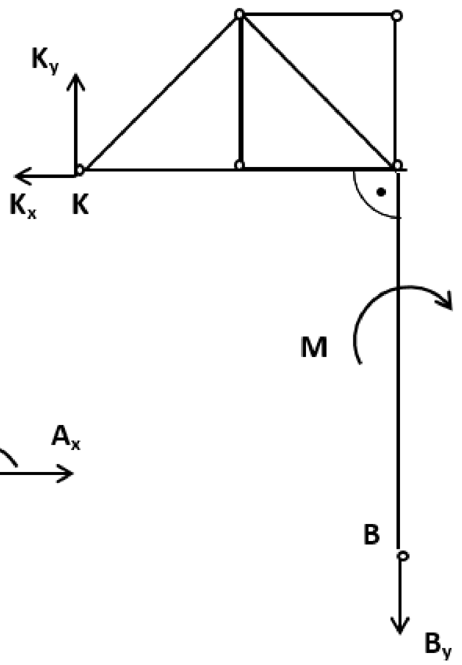
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = A_x + K_x = 0; \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = A_y - K_y - Q = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{A,i} = K_y \cdot 2 - K_x \cdot 2.5 + Q \cdot 3 + M_A = 0 \qquad (1)$$

- за конструкцията ВК (фигура 4):

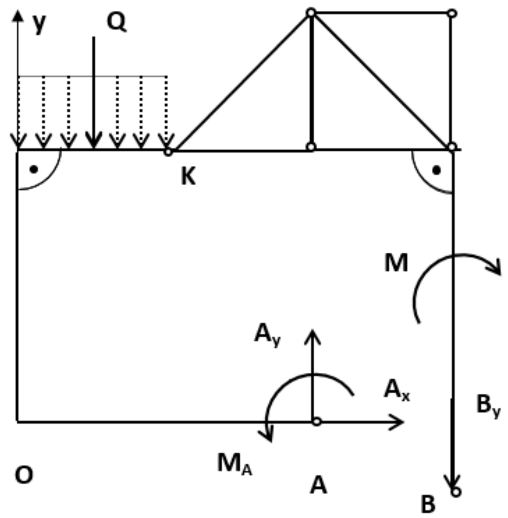
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = K_x = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{K,i} = -B_y \cdot 4 - M = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{B,i} = K_x \cdot 3 - K_y \cdot 4 - M = 0. \qquad (2)$$



Фигура 3.



Фигура 4.



Фигура 5.

Системата (1) съдържа 5 неизвестни и в самостоятелен вид е нерешима: от другаде следва да се определят 2 от неизвестните. Големините на K_x и K_y се съдържат и в (2) и след решаването на последната система може да се заместят в (1). Решението на (2) е

$$K_x = 0\ ;\ B_y = -M/4 = -1\ [kN]\ ;\ K_y = M/3 = 4/3\ [kN]\ . \tag{3}$$

Ако обаче за ВК се избере алтернативна система от уравнения за равновесие

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = K_x = 0;\ \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = K_y - B_y = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_{B,i} = K_x \cdot 3 - K_y \cdot 4 - M = 0 \tag{4}$$

Решението на (4) е

$$K_x = 0; \quad K_y = M/3 = 4/3[kN]; \quad B_y = 4/3[kN]. \tag{5}$$

Кое е вярното решение за B_y? Това вариантност ли е? Отговорът на този въпрос е необходим за проверката чрез равновесието на конструкцията АВ. Поради простотата на условията за равновесие, не може да става въпрос за математична грешка от решаване на коя да е от системите (2) или (3). Тъй като и в двете решения K_y е еднакво, може да се продължи формално с рамката АК, чии-то уравнения за равновесие са

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = A_x - K_x = 0 \to A_x = 0; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = A_y - K_y - Q = 0 \to A_y = 4/3 + 12 = 40/3[kN];$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{A,i} = Q \cdot 3 + K_y \cdot 2 + M_A = 0 \to M_A = -38\frac{2}{3}[kNm].$$

Уравненията за равновесие на проверката са за АВ и, както е известно, те трябва да се удовлетворяват тривиално за вярно пресмятане на реакциите в т. А и т. В

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = A_x = 0 \to A_x = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = A_y - B_y - Q = 0 \to 40/3 - 4/3 - 12 = 0[kN]; \end{aligned} \tag{7}$$

За B_y=4/3 [кN] получаваме

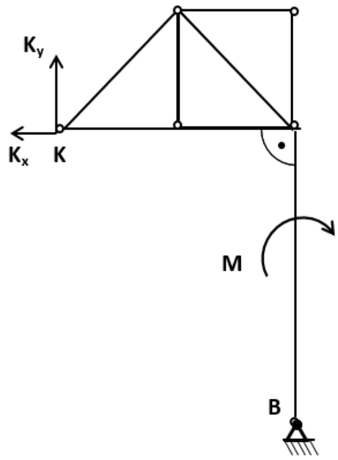
$$\sum_{i=1}^{n} M_{A,i} = Q \cdot 3 - B_y \cdot 2 + M_A = 0 \to 36 - 8/3 - 38\frac{2}{3} \neq 0\ [kNm].$$

Проверката показва, че тази стойност не е вярна. Да направим проверката с B_y=1 [кN] в последното уравнение на (7)

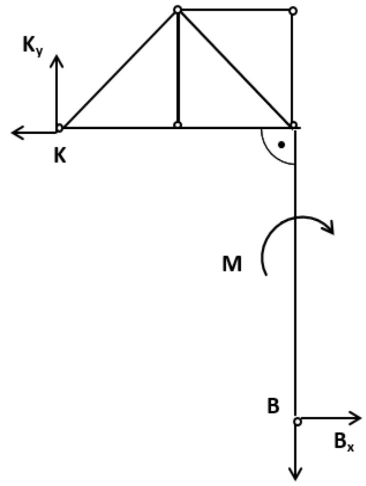
$$\sum_{i=1}^{n} M_{A,i} = Q \cdot 3 - B_y \cdot 2 + M_A = 0 \to 36 - 1 - 38\frac{2}{3} \neq 0\ [kNm].$$

Отново проверката показва неверен резултат от решението.

Ако авторът на решението има елементарни понятия от прости движения в Кинематиката, при обстойно изследване на ВК ще забележи, че един транслационен импулс в хоризонтално направление ще превърне ВК в движещ се обект. Следователно това е квазиконструкция и разковничето е в „поправката“ ѝ, която да осигури хоризонтална неподвижност и превръщане на ВК в конструкция.



Фигура 6.



Фигура 7.

Това може да се постигне чрез:

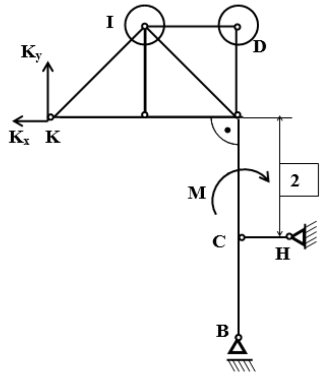
- замяна на подвижната става в т. В с неподвижна (фигура 6);
- поставяне на хоризонтален прът в произволна точка от вертикалната част на рамката ВК (фигура 7).

С направените „корекции“, според избора на конструкция с хоризонтален прът, представена на фигура 8, съответно с редукция, представена на фигура 9, съставната рамка ВК има „нови равновесни условия“, а именно

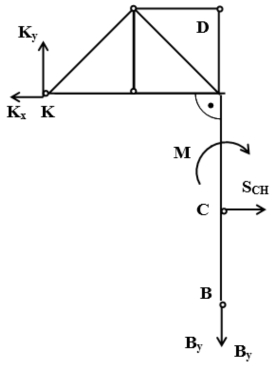
$$\sum_{i=1}^{n} M_{B,i} = -S_{CH} \cdot 1 - K_y \cdot 4 + K_x \cdot 3 - M = 0;$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = K_y - B_y = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = -K_x + S_{CH} = 0. \tag{8}$$

Ако сега преброим неизвестните в системите (6) и (8) те са 7 и от 6 уравнения за равновесие на двете части АК и ВК се оказва, че конструкцията от фигура 2 е статично неопределима. От тук следва необходимост от „корекция“ в дясната рамка АК. Тук е възможна замяната на запъването в т. А с:

- неподвижна става;
- два пръта: хоризонтален и вертикален (или два взаимноперпендикулярни пръта).



Фигура 8.

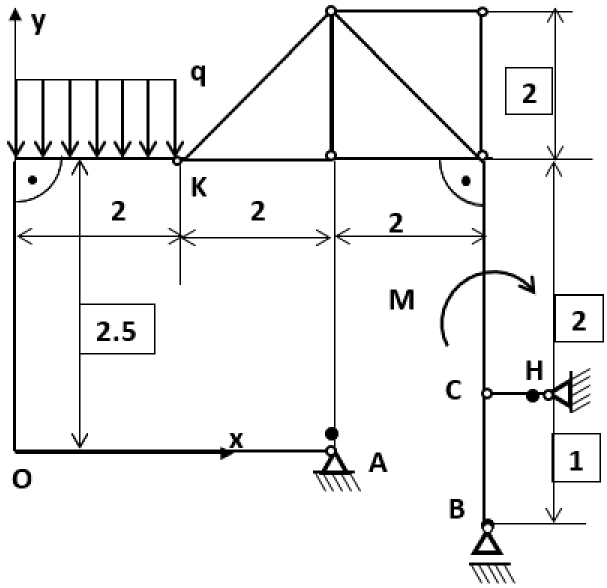


Фигура 9.

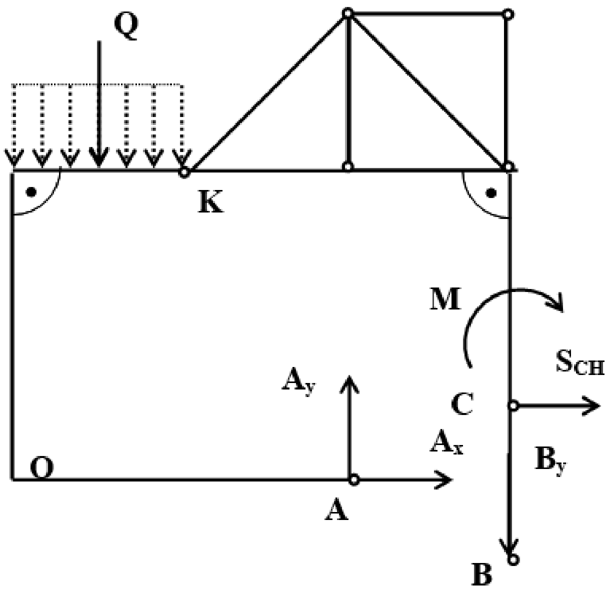
В крайна сметка конструкцията изглежда така, както е показана на фигура 10, с редуцирани връзки и разпределен товар – фигура 11 и рамка АК – фигура 12.

За коригираната конструкция според фигура 10 за АК са избрани уравненията за равновесие

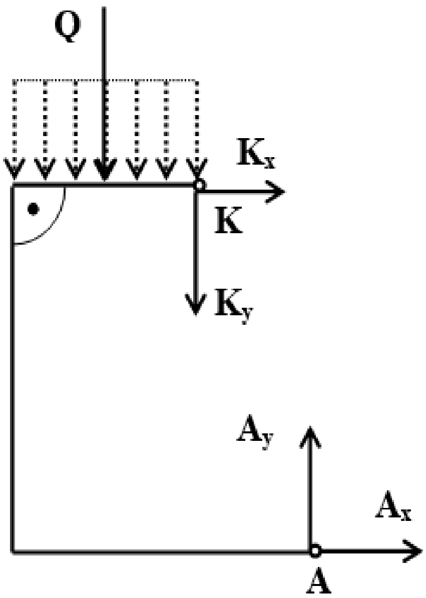
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = A_x - K_x = 0; \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = A_y - K_y - Q = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{A,i} = Q \cdot 3 + K_y \cdot 2 - K_x \cdot 2.5 = 0. \quad (9)$$



Фигура 10.



Фигура 11.

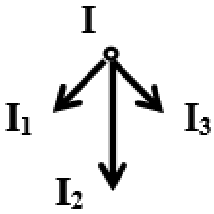


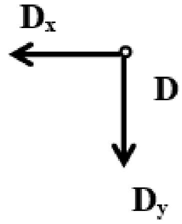
Фигура 12.

Нито една от системите (8) и (9) не е автономна. За получаването на решението те следва да се обединят в алгебрична система от 6 уравнения, която за Q=36 [kN] има вида

$$K_y - B_y = 0 \; ; \quad -S_{CH} \cdot 1 - K_y \cdot 4 + K_x \cdot 3 = 4 \; ; \quad -K_x + S_{CH} = 0 \; ; \quad (10)$$

$$A_x - K_x = 0;\;\; A_y - K_y = 36;\; K_y \cdot 2 - K_x \cdot 2.5 = -36.$$





Фигура 13. Възел I ***Фигура 14. Възел D***

4. Методика на обучението

В примера са представени възможности за проверка на знанията на обучаемите на елементарно за статиката ниво в работа в екип. За вариантите се задава домашна/курсова задача на толкова студенти, колкото са възможните варианти, като последният факт се съобщава на участниците-студенти. Обявява се също, че при преписване (не е забранено, но работата се удължава) един от друг работата продължава до изчерпване на вариантите след консултация с преподавателя, който е водещ. След решаването се прави презентация на работата от всеки студент на един от вариантите. Има две възможности:

- Всеки от студентите от екипа решава **единствен уникален свой вариант**. Събирането на екипа и дебатирането върху решенията е взаимно обучение на участниците в екипа. Резултатът е, че представянето на всички ВЕРНИ решения и обсъждането им показва на студентите, че може да има алтернативни решения и че всеки може да мисли *вярно* при различни алгоритми-пътища за постигане на верни резултати. Обсъждането обогатява участниците не само от тясната област на науката, но и в социалния аспект на колективната работа според народната мъдрост, че повече умове дават по-добра и по-богата на резултати работа (перифраза). *Всеки студент представя писмено само* ***своя вариант***.
- Ако има ***преписване един от друг*** (за съжаление честа практика!) водещият преподавател им дава урок за обогатяване на знанията в науката, която преподава, чрез изчерпване на вариантите на задачата и ги води до извода, че процесът на ***преписване също може да е продуктивен***. Разбира се и при тази възможност на развитие на екипната работа (всички заедно да откриват решението) се прави дискусия и презентация. Всеки участник представя един от решените варианти. В този случай поради екипната работа по самото решаване на задачата всеки студент се задължава да препише *всички варианти, а да представи един.*

За да има стимул, всеки студент получава оценка или бонус за изпита от работата си:

1. като изработка на задачата;
2. като презентация.

В този смисъл обучението няма да е принуда, а последователно събиране на точки, които могат да доведат до облекчено полагане на изпит „по части“. *Решаването на такива задачи се задава по желание*. Известно е, че студентите винаги обменят „информация“ как се полагат изпитите и е сигурно, че всеки може да се опита да облекчи проверката на знанията си чрез изява на желание за участие в такъв екип.

В крайна сметка къде е *методът на индукцията тук*? Ако студентът при работата си тръгне по грешен път (***лъжливо решение***: избере неприложим за задачата метод за решаване поради лоша подготовка с областта на знанието) грешният резултат от работата го *води в началото*, до нов избор (***вярно решение***) след *преговор/придобиване на нови знания*.

5. Забележка

Това разширено тълкуване на *метода на математическата индукция* беше подтикнато от идея, породила се след прочитане на решенията на PISA-тест за 4-ти клас, представено в пресата през 2014 г., за решаване на транспортна задача. Решението беше представено като ***решение по математична индукция***. Показателното в случая беше, че децата би следвало *да се запознават последователно с факта, че математиката като логическа наука не е толкова „**тясна**“, както се мисли от голяма част от учителите, учениците и родителите/попечителите*. Развиването на логичността по време на обучение както на ученици, така и на студенти (в разширен смисъл също ученици), води до развиване на опит, който може да се окаже много важен в живота.

* Авторите са преподаватели в Технически университет – София:

- Доц. д-р мат. Зорница Петрова, преподавател във Факултет по приложна математика и физика;
- Доц. д-р инж.-мат. Мария Пейкова, преподавател във Факултет по транспорта.