УСТОЙЧИВОСТ С ДВЕ МЕРКИ – ФОРМУЛИРОВКА И ПРИЛОЖЕНИЕ

Снежана Христова, Красимира Иванова, Тодор Костадинов

Резюме: *В тази статия е дефинирано понятието устойчивост на диференциални уравнения при използването на две различни мерки за близост на началните условия и за близост на двете решения. Разгледан е случая на използване на векторна функция на Ляпунов, при което, в понятието устойчивост е въведено скаларно произведение. Получени са достатъчни условия за експоненциална устойчивост с две мерки при използване на векторна функция на Ляпунов.*

Ключови думи: *диференциални уравнения, устойчивост, две мерки, функции на Ляпунов*

1. Въведение

Един от основните въпроси, свързани с изследванията на динамичните модели, описващи съответния процес е свързан с изучаване критериите при които процеса е устойчивост. Това означава, че малки изменения на началните стойности на параметрите не води до значителни изменения в поведението на процеса. Дефинирането на понятието „близост“ математически често е свързано с т.н. мерки или норма. С оглед по-голяма общност на изследванията, както и за по-широко приложение на теоретичните резултати се използват две различни мерки за близост на началните данни и на съответните им решения на началните задачи за съответните уравнения.

Ще разгледаме обикновеното диференциално уравнение

$$x'(t) = f(t,x) \tag{1}$$

с начално условие

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

където $x_0, x \in R^n$, x_0 е началната стойност.

Да означим с D, d са две различни мерки в R^n.

Дефиниция 1. *Казваме, че решението x(t) на началната задача (1), (2) е устойчиво по две мерки, ако за всяко число ε>0 и всяко начално време t_0 съществува число δ>0 такова, че ако D(x_0, y_0)<δ тогава d(x(t),y(t))<ε за всяко t≥0, където D, d са две различни мерки, y(t) е решение на ОДУ (1) с начално условие (2), където x_0 е заместено с y_0. Ако δ не зависи от началното време t_0, а само от ε, то устойчивостта се нарича равномерна.*

Ще отбележим, че двете мерки в дефиниция 1 могат да съвпадат с норма в евклидовото пространство.

Пример 1. Нека f(t,x)=x, n=1. Тогава решението е зададено с $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$.

Ако използваме абсолютната стойност като мярка, то решението не е устойчиво съгласно дефиниция 1.

Нека в дефиниция 1 изберем мярката D да е абсолютна стойност, а мярката $d(x,y) = e^{-t}|x-y|$. Тогава, ако $|x_0 - y_0|$<δ= εe^{t_0}, то $d\big(x(t),y(t)\big) = e^{-t}|x(t) - y(t)| = e^{-t}|x_0 e^{t-t_0} - y_0 e^{t-t_0}| = e^{-t_0}|x_0 - y_0| <$, т.е. решението е устойчиво при избраните две мерки, но не е равномерно устойчиво.

Един от методите за изследване на въпроса за устойчивост на решенията на диференциалните уравнения е методът на функциите на Ляпунов. При използването му основен проблем възниква с намирането на подходяща функция на Ляпунов. Често се използват скаларни функции, но това е ограничение. В общия случай може да се дефинират векторни функции, при което по подходящ начин се дефинира и съответната производна и условието за устойчивост. За целта се дефинира нов вид устойчивост.

Дефинираме конус К={$y \in R^n$: (x●y)≥0 за всяко x ∈ К}, където (x●y) е скаларното произведение на векторите x и y.

Разглеждаме множеството Г={ $h \in C([0,\infty) \times R^n, K)$: $\inf h(t,x) = 0$ при $t \geq 0$}

Пример 2. Нека (x,y) е вектор, тогава h(t,x,y)=($e^{-t}x, e^{-t}y$) е от множеството Г.

Ще дефинираме понятие устойчивост, което съчетава идеите за устойчивост на две мерки и скаларно произведение на вектор:

Дефиниция 2. *Казваме, че нулевото решение на началната задача (1), (2) е d-устойчиво по две мерки, ако съществува вектор A от К и две мерки h и H от Г, такива че за всяко число ε>0 и всяко начално време t_0 съществува число δ>0 такова, че ако (A●h(t_0, x_0))<δ, тогава (A●H(t,x(t))< ε за всяко t≥0, където x(t) е решение на ОДУ (1) с начално условие (2). Ако δ не зависи от началното време t_0, а само от ε, то d-устойчивостта по две мерки се нарича равномерна.*

Забележка 1. Векторът A играе ролята на тегло на компонентите на решението.

Забележка 2. В частен случай на едномерен конус К, съвпадащ с неотрицателната полуос, двете мерки са скаларни неотрицателна функции. Тогава d-устойчивостта по две мерки съвпада с устойчивост по две мерки.

Дефиниция 3. *Казваме, че нулевото решение на началната задача (1), (2) е d-експоненциално устойчиво по две мерки, ако съществува вектор A от К, две мерки h и H от Г и положителни константи M, P такива, че за всяко начално време t_0 е изпълнено неравенството (A●H(t,x(t))< M (A●h(t_0,x_0))$e^{-P(t-t_0)}$ за всяко t≥0, където x(t) е решение на ОДУ (1) с начално условие (2).*

2. Основни резултати

При по нататъшните ни изследвания ще използваме следния резултат:

Лема 1. *(A. Dishliev, S. Hristova, 2010): Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Функцията g∈ $C([0,\infty) \times R, [0,\infty))$, g(t,0)=0.*
2. *Векторът A∈ К и функцията V∈ $C([0,\infty) \times R^n, K)$ са такива, че*

   (A●V'(t,x))≤g(t,(A●V(t,x)) за всяко t≥0, x∈ R^n.
3. *Функцията u(t) е решение на диференциалното уравнение u'(t)=g(t,u) с начално условие u(t_0)= (A●V(t_0, x_0)).*

Тогава (A●V(t,x(t)) ≤u(t) при t≥t_0.

Забележка 3. Ще използваме Лема 1 при g(t,u)=$-Pu$. Тогава

$$u(t)= (A●V(t_0, x_0))e^{-P(t-t_0)}.$$

Ще получим достатъчни условия за d-експоненциална устойчивост по две мерки като използваме векторна функция на Ляпунов и скаларно произведение.

Теорема 1: *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Съществуват две мерки h,H∈ Г.*
2. *Векторът A∈ К и функцията V∈ $C([0,\infty) \times R^n, K)$ са такива, че*

(i) *$(A\bullet H(t,x)) \leq (A\bullet V(t,x)) \leq (A\bullet h(t,x))$ за всяко $t\geq 0$* и $x\in R^n$.

(ii) *$(A\bullet V'(t,x)) \leq - P\,(A\bullet V(t,x))$ за всяко $x\in R^n$,*

където P е положителна константа.

Тогава нулевото решение на началната задача (1), (2) е d-експоненциално устойчиво с две мерки.

Доказателство. Съгласно условие 2 (ii), Лема 1 и Забележка 3 е изпълнено неравенството

$$(A\bullet V(t,x(t)) \leq (A\bullet V(t_0, x_0))e^{-P(t-t_0)} \tag{3}$$

От условие 2 (i) и неравенство (3) получаваме

$$(A\bullet H(t,x(t))) \leq (A\bullet V(t,x(t)) \leq (A\bullet V(t_0, x_0))e^{-P(t-t_0)} \leq \leq (A\bullet h(t_0, x_0))e^{-P(t-t_0)} \tag{4}$$

Неравенство (4) доказва твърдението на теоремата.

В частен случай, когато функцията на Ляпунов е скаларна функция, тогава получаваме следния резултат за експоненциална устойчивост с две мерки:

Следствие 1: *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Съществуват две мерки h, $H\in$ Г.*
2. *Функцията $V\in C([0,\infty)\times R,[0,\infty))$ са такива, че*
   (i) *$H(t,x) \leq V(t,x) \leq h(t,x)$ за всяко $t\geq 0$* и $x\in R$.
   (ii) *$V'(t,x) \leq - P\, V(t,x)$ за всяко $x\in R$,*

където P е положителна константа.

Тогава нулевото решение на началната задача (1), (2) е експоненциално устойчиво с две мерки.

Забележка 4. Ще отбележим, че d-експоненциалната устойчивостта по две мерки гарантира d-асимптотическа устойчивост по две мерки на нулевото решение. В случая на използване на скаларна функция на Ляпунов и двете мерки съвпадат с норма, то условията на Теорема 1 гарантират асимптотическа устойчивост на нулевото решение.

Благодарности

Част от изследванията са извършени с финансовата помощ на Фонд НПД, Пловдивски университет „П. Хилендарски“, МУ17ФМИ007.

Литература

Agarwal, R. and S. Hristova, Strict stability in terms of two measures for impulsive differential equations with supremum, *Appl. Anal.*, Vol. 91, No. 7, 2012, 1379–1392.

Dishliev, A. and S. Hristova, Stability on a cone with two measures for differential equations with “maxima”, *Ann. Funct. Anal.*, Vol. 1, No. 1, 2010, 133–143.

Hristova, S., Stability on a cone in terms of two measures for impulsive differential equations with supremum, *Appl. Math. Lett.*, Vol. 23, No. 5, 2010, 508–511.

Снежана Христова, Красимира Иванова

Факултет по математика и информатика,

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“,

Пловдив 4003, бул. „България“ № 236,
Имейл: sehri@uni-plovdiv.bg

Тодор Костадинов
Технически университет-София, Филиал Пловдив,
Пловдив 4000, Цанко Дюстабанов 25, България

STABILITY WITH TWO MEASURES – DEFINITION AND APPLICATION

Snezhana Hristova, Krasimira Ivanova, Todor Kostadinov

Summary: *Stability with the application of two different measures for the initial values as well as for the solutions is presented for ordinary differential equations. In the case of a vector Lyapunov function the dot product is introduced. Sufficient conditions for exponential stability with two measures and vector Lyapunov functions are obtained.*

Key words: *Differential equations, stability, two measures, Lyapunov functions*