

ЧИСЛЕН АНАЛИЗ НА СТАБИЛИЗАЦИЯТА В ПЕРТУРБИРАН ДЖОЗЕФСОНОВ КОНТАКТ ОТ ТИП СВРЪХПРОВОДНИК- ФЕРОМАГНИТ-СВРЪХПРОВОДНИК

Павлина Атанасова, Стефани Панайотова

Резюме: Джозефсоновите контакти са един от широко изучаваните обекти в свръхпроводящите нанотехнологии. В последно време интензивно се разглеждат контакти от тип свръхпроводник-ферромагнит-свръхпроводник, в който е на лице връзка между магнитните моменти и джозефсоновия ток. Разглежданата система може да бъде пертурбирана чрез инжектиране на външен ток. След стабилизиране на магнитния момент, системата отново преминава в устойчиво състояние. Цел на настоящата работа е числен анализ на видовете стабилизация, която се осъществява. Математическият модел, описващ такива контакти, се представя чрез система от нелинейни диференциални уравнения (ДУ). При някои стойности на физичните параметри на задачата тези системи се явяват твърди. Създаден е потребителски софтуер за изучаване на магнитната прецесия в такива контакти. В него са имплементирани множество числени методи за решаване на система обикновени ДУ с начални условия. Акцентира се върху създаването на специален метод за решаване на твърди задачи за системи ДУ. Реализиран е неявният двустъпков метод на Гаус-Лежандър, за който се демонстрира повишаване на устойчивост и точност в сравнение с явните числени методи. С помощта на създадения от нас софтуер са получени нови числени резултати. Те представят процеса на стабилизация в едно от трите възможни устойчиви състояния: обръщане на магнитния момент, Капица Пендулум ефект или връщане в първоначалното състояние. Получените резултати могат

да бъдат използвани за анализ и прогнозиране на разглеждания феномен.

Keywords: джозефсонови контакти, магнитни моменти, диференциални уравнения, твърди задачи, Гаус-Лежандър

Mathematics Subject Classification 2000: 34-06, 65D99, 65Z05, 65K05

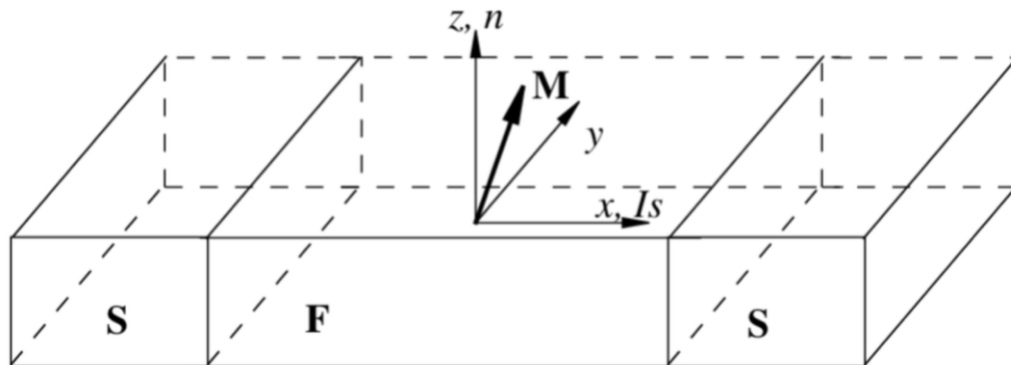
1. Въведение

Джозефсоновите контакти (ДК) заемат важно място в научните области на спинтрониката, нанотехнологията и свръхпроводимостта. Тези области на науката представляват изключителен интерес в редица практически приложения и са предмет на много изследователски сфери [1].

В последните няколко години са направени много изследвания за специални контакти от тип свръхпроводник-ферромагнит-свръхпроводник (СФС) ДК с магнитен момент [2]. Моделът се описва с многопараметрична система от нелинейни диференциални уравнения. В повечето случаи те не могат да се решат аналитично, а явните числени методи не са приложими при някои стойности на параметрите. Тези причини налагат прилагането на други методи. За текущото изследване сме използвали неявния метод на Гаус-Лежандър.

2. Математически модел

Изследва се геометрията на системата за СФС ДК, която е представена във фигура 1. Феромагнетизмът е насочен по оста z , която е в същата посока като n -градиента на потенциала на спин-орбита. Магнитният момент, представен чрез своята y -компонентата е свързан с джозефсоновия ток I_s , който е по оста x . В представената статия магнитният момент $\mathbf{M}$ е изследван посредством неговите три координати.



Фигура 1. Геометрия на разглежданата СФС ДК система, където S е свръхпроводник и F – феромагнит.

Динамиката на магнитния момент $M = \vec{m}$ и фазовата разлика φ в СФС ДК се описва в [3] чрез четири обикновени ДУ от първи ред с начални условия. Системата в безразмерна форма е:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{m}} &= \vec{F}(t, \vec{m}, \varphi) \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{w} (I_{pulse}(t) - \sin(\varphi - rm_y)), \\ I_{pulse}(t) &= \begin{cases} A_s, & t \in [t_0 - 1/2\Delta t, t_0 + 1/2\Delta t]; \\ 0, & \text{в останалите случаи,} \end{cases}\end{aligned}\quad (1)$$

където $\vec{F} = K(\vec{D} + \alpha \vec{m} < \vec{m} \cdot \vec{H} > -\vec{H})$ и

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} m_y H_z - m_z H_y \\ m_z H_x - m_x H_z \\ m_x H_y - m_y H_x \end{pmatrix}, \quad K = -\frac{\omega_F}{1 + M\alpha^2},$$

$$\vec{m} = (m_x, m_y, m_z), \quad \vec{H} = (H_x, H_y, H_z),$$

където $t \geq 0$ е времето. Компонентите на ефективното магнитно поле $H_x(t), H_y(t), H_z(t)$ са определени по посочения начин: $H_x(t) = 0$, $H_y(t) = G \sin(\varphi(t) - rm_y(t))$, $H_z(t) = m_z(t)$.

Физичните параметри на системата (1) са следните: ω_F е честотата на феромагнитния резонанс, α – параметър на феромагнитно затихване, G – параметър на взаимодействие на фазовите разлики, r – магнетизация, $w = V_F / (I_c R) = \omega_F / \omega_R$, $V_F = \hbar \omega_F / (2e)$, I_c – критичен ток, R – съпротивлението на ДК, $\omega_R = 2e I_c R / \hbar$ – характеристична честота. В системата се инжектира външен ток $I_{pulse}(t)$, който се характеризира от следните параметри: A_s – амплитуда на тока, $t_0, \Delta t$ са съответно средата и големината на времевия интервал когато е приложен тока.

Неизвестните функции, зависещи от времето, са компонентите на магнитния момент $m_x(t), m_y(t), m_z(t)$ и фазовата разлика $\varphi(t)$. Началните условия за тези функции представляват:

$$m_x(0) = 0, \quad m_y(0) = 0, \quad m_z(0) = 1, \quad \varphi(0) = 0. \quad (2)$$

Свърхпроводящият ток $I_s(t)$ се пресмята със следната формула $I_s(t) = I_c \sin(\varphi(t) - rm_y(t)), t \geq 0$, в която участва фазовата разлика $\varphi(t)$.

3. Числени методи

За опростяване на описанието на числения метод ще използваме общата формулировка на задачата на Коши [4]:

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}), \quad \bar{y}(0) = \bar{y}_0, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

В системата (1) с начални условия (2) имаме $\bar{y} = (m_x, m_y, m_z, \varphi)$, $x = t$ и $\bar{f}$ е вектор-функцията, отговаряща на дясната страна на (1).

В много случаи, явният метод на Рунге-Кута успешно се прилага за числено решение на системата (1), (2) (виж, например [3, 5]). Въпреки това, за някои стойности на параметрите (примерно, $G = 500\pi$, $r = 0.1$, $\alpha = 0.1$, $t_0 = 25$, $\Delta t = 6$, $A_s = 1.1$, $\omega_F = 1$) системата става твърда. При решаването, на такива системи с явните числени методи, се изисква значително намаляване на стъпката по аргумента. Пресмятанията с голяма стъпка (напр. $h = 0.1$) много бързо предизвикват препълване на оперативната памет. Проблемът може да се реши с явен метод само когато използваме достатъчно малка стъпка (напр. $h = 0.001$), но това отнема много изчислително време. В дадената работа са приложени специални числени методи, чрез които могат да се избегнат проблемите с твърдостта на системата.

Използваме следната дефиниция за твърдост [4]:

Дефиниция 1: Системата се нарича твърда, когато за всяко x и $\bar{y}$ в определена област, (за всички решения на задачата на Коши (3) собствените стойности $\lambda_j, j = \overline{1, n}$ на n -размерната матрица на Якоби $A = \partial \bar{f} / \partial \bar{y}$ изпълняват следните условия:

1. $Re(\lambda_j) < 0, \quad j = \overline{1, n},$
2. $C = \max_j |Re(\lambda_j)| / \min_k |Re(\lambda_k)| \gg 1$ – коефициент на твърдост.

Системата (1), (2) често става твърда, когато взаимодействието на фазовите разлики G нараства, особено за $G \geq 50$. В нашите изследвания използваме един неявн двустъпков метод на Рунге-Кута, наречен още метод на Гаус-Лежандър и Хамър-Холингсворт метод [4, р.137]. За да намерим коефициентите на Рунге-Кута $\bar{k}_i, i = \overline{1, 2}$ в неявната схема, решаваме следната нелинейна система с метода на простата итерация:

$$\begin{aligned} \bar{k}_1^{(m+1)} &= f(x + c_1 h, \bar{y}_n + h(a_{11} \bar{k}_1^{(m)} + a_{12} \bar{k}_2^{(m)})) \\ \bar{k}_2^{(m+1)} &= f(x + c_2 h, \bar{y}_n + h(a_{21} \bar{k}_1^{(m)} + a_{22} \bar{k}_2^{(m)})) \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

където $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}, c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}, a_{11} = \frac{1}{4}, a_{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\sqrt{3}, a_{21} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\sqrt{3}, a_{22} = \frac{1}{4}$.

След определяне на коефициентите $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$, намираме стойностите на неизвестното $\bar{y}_{n+1}$ за следващата стъпка по формулата:

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{h}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (4)$$

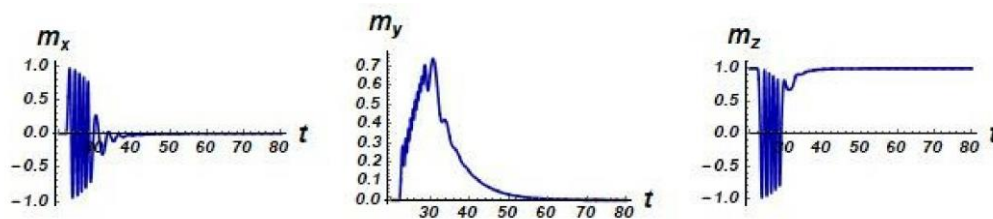
където N е броят на мрежовите възли.

Имплементацията на неявния метод на Гаус-Лежандър и възможностите на *Wolfram Mathematica* са съчетани в потребителски софтуер за изследване на магнитния момент в ДК, който подробно е описан в [5].

4. Числени резултати

С помощта на създадения потребителски софтуер, използващ неявния двустъпков метод на Гаус-Лежандър, са получени резултати при различни стойности на параметрите.

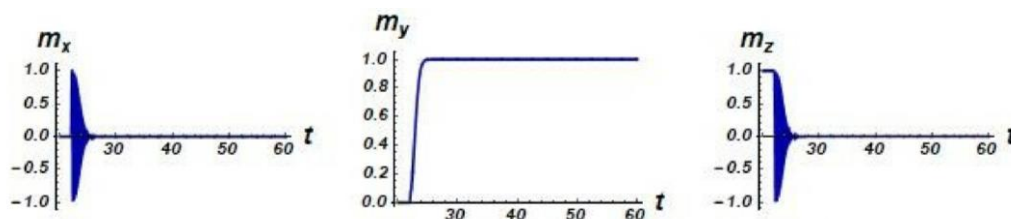
След стабилизиране на магнитния момент, системата отново преминава в устойчиво състояние. Поведението ѝ силно се влияе от стойностите на параметрите, поради тази причина ще демонстрираме няколко различни варианта на стабилизацията ѝ. Нашите изследвания показват, че стабилизирането се наблюдава в едно от трите устойчиви състояния, описани по-долу.



Фигура 2. Резултати при

$G = 60, r = 0.3, \alpha = 0.02, t_0 = 25, \Delta t = 6, A_s = 0.35, \omega_F = 1, h = 0.005$

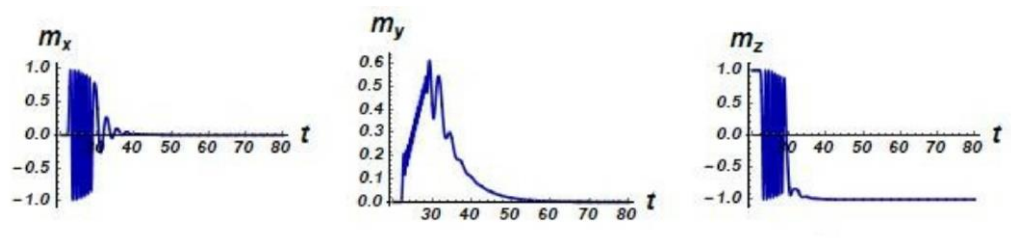
На фигура 2 са показани магнитните моменти при стойности на параметрите $G = 60, r = 0.3, \alpha = 0.02, t_0 = 25, \Delta t = 6, A_s = 0.35, \omega_F = 1, h = 0.005$. Демонстрира се как те започват от началните си условия, но след инжектирането на тока, при $t = 22$, се дестабилизируют. В показания случай след стабилизацията се наблюдава завръщането им в началните състояния.



Фигура 3. Резултати при

$$G = 532\pi, r = 0.2, \alpha = 0.02, t_0 = 25, \Delta t = 6, A_s = 0.35, \omega_F = 1, h = 0.1$$

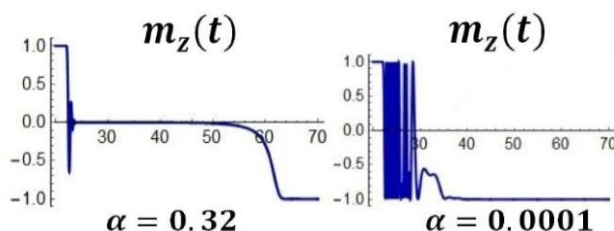
Вторият вариант е когато x -компонентата на магнитния момент се връща към началното си състояние ($m_x = 0$), но y и z компонентите преминават съответно в 1 и 0. Такава ситуация е представена на фигура 3 в случая $G = 532\pi, r = 0.2, \alpha = 0.02, t_0 = 25, \Delta t = 6, A_s = 0.35, \omega_F = 1, h = 0.1$. Този феномен е известен под името Капица-Пендулум.



Фигура 4. Резултати при

$$G = 123, r = 0.2; \alpha = 0.01; t_0 = 25; \Delta t = 6; A_s = 0.35; \omega_F = 1, h = 0.005$$

Последният възможен вид стабилизация е когато x и y компонентите се завръщат към началните си състояния, а z -компонентата се променя от 1 към -1 . Този ефект се нарича обръщане на магнетизацията и е представен на фигура 4 при конкретните стойности на параметрите $G = 123, r = 0.2, \alpha = 0.01, t_0 = 25, \Delta t = 6, A_s = 0.35, \omega_F = 1, h = 0.005$.



Фигура 5. Резултати при различни стойности на параметъра на феромагнитно затихване α . Ляв панел: $\alpha = 0.32$; десен панел: $\alpha = 0.0001$.

От съществен интерес за физичния експеримент е не само типа на устойчивото състояние след пертурбацията на контакта, но и времето, за което се достига. Пример за различно време за настъпване на това е демонстриран на фигура 5, която показва стабилизация във вариант на магнитно обръщане. На левия панел стабилизацията става приблизително при $t = 60$, за $\alpha = 0.32$, а на десния при $t = 35$, за $\alpha = 0.0001$. Промяната само

на един параметър от всички, които описват разглеждания СФС ДК, води до съществена промяна на времето за стабилизация (около 25 времеви единици). Изследването на системата ни показва, че времето за достигането до устойчиво състояние на компонентите на магнитния момент съществено зависи от физичните параметрите. Това е предпоставка за бъдещи изследвания в тази насока.

Заклучение

Разглежда се актуален модел от физиката на свръхпроводимостта и спинтрониката, описващ СФС ДК с магнитен момент. За получаване на числени резултати е реализиран и използван ефективния числен метод на Гаус-Лежандър за решаване на твърди системи нелинейни ДУ с начални условия. Анализът на получените резултати показва, че след инжектирането на външен ток в разглеждания СФС ДК, системата се пертурбира, след което се стабилизира в едно от три възможни устойчиви състояния. Направено е изследване и са демонстрирани резултатите, които показват, че устойчивите състояния, след пертурбацията, са първоначалното положение, магнитното обръщане и Капица Пендулум ефект.

Благодарности

Авторите изказват благодарност на Юрий Шукринов, Илхом Рахмонов и Елена Земляная за полезните обсъждания. Работата е изпълнена под финансовата поддръжка на проект ФП17-ФМИ-008.

Литература

- [1] Linder, J., W. Jason Robinson, *Nature Physics* 11, 2015, 307.
- [2] Waintal, X., P. Brouwer, *Phys. Rev. B* 65, 054407(2002).
- [3] Yu. Shukrinov, I. Rahmonov, K. Sengupta, and A. Buzdin, *Appl. Phys. Lett.* 110, 182407, 2017.
- [4] Hall, G., J. Watt, *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [5] Atanasova, P., S. Panayotova, Yu. Shukrinov, I. Rahmonov, E. Zemlyanaya, *EPJ Web of Conf*, Vol. 173, 05002, 2018.

Факултет по математика и информатика

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

бул. „България“ № 236, 4003 Пловдив, България

e-mail: atanasova@uni-plovdiv.bg

NUMERICAL ANALYSIS OF STABILIZATION IN PERTURBED JOSEPHSON JUNCTION FROM TYPE SUPERCONDUCTOR-FERROMAGNETIC-SUPERCONDUCTOR

Pavlina Atanasova, Stefani Panayotova

Abstract. Josephson junctions are one of the widely-studied objects in superconducting nanotechnology. In recent times, junctions of type superconductor-ferromagnet-superconductor with connection between the magnetic moments and the Josephson current have been intensively considered. The system under consideration can be perturbed by injection of external current. After the stabilizing of the magnetic moment, the system returns to a stable state. The purpose of this work is a numerical analysis of the types of stabilization that is being carried out. The mathematical model describing such junctions is represented by a system of nonlinear differential equations (DE). For some values of the physical parameters of the problem, these systems are stiff. User software has been developed to study magnetic precession in such junctions. It has implemented a number of numerical methods to solve a system of ordinary DE with initial conditions. Attention is drawn to the creation of a special numerical method for solving stiff systems of DE. The implicit two-stage Gauss-Legendre method has been implemented which demonstrate an increase of stability and accuracy compared to explicit numerical methods. With the help of the developed user software, new results have been obtained. They represent the stabilization process in one of three possible stable states: magnetic reversal, Kapitza pendulum effect or return to the initial state. The results obtained can be used to analyze and predict the phenomenon under consideration.