

КОМПЮТЪРНО СИМУЛИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА МОДЕЛИ ХИЩНИК-ЖЕРТВА С ТРИ ПОПУЛАЦИИ

А. Добрева

Резюме: Обекти на разглеждания в настоящата работа са модели на хищник-жертва, които изразяват взаимоотношението на два и повече популации. Въз основа на реални данни от националния парк Крюгер (ЮАР), заимствани от [3], се изследват динамични популационни модели на хищник и две жертви. Чрез приложение на алгебричната компютърна система Wolfram Mathematica са изследвани ефектите на различни реални фактори върху динамиката на всяка от популациите. Това позволява да се получи представа за поведението на системата и да се направят възможни прогнози за бъдещи тенденции. Изследваните модели се основават на диференциални уравнения, за които различни задачи са изследвани в [4]–[37] и са компютърно симулирани [38] – [52].

1. Въведение

Използването на диференциалните уравнения за моделиране в популационната динамика започва през 18-ти век с работата на Т. Малтус. Първите модели имат основно демографска цел и описват изключително динамиката на изолирани популации или такива на индивидуален растеж. Фундаменталните изследвания на А. Лотка [1] и В. Волтера [2], през първата четвърт на 20-ти век, поставят началото на съвременното математическо моделиране в популационната динамика на съвместно съществуващи биологични видове на базата на техните хранителни (трофични) взаимоотношения. С помощта на софтуерната система Wolfram Mathematica изследваме влиянието на различни фактори върху динамиката на всяка от популациите.

2. Дефиниция на модела и някои теоретични резултати

2.1. Дефиниция

Общата формулировка на модела на Лотка–Волтера за популационна двойка хищник жертва е:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases} \quad (1)$$

В тази система $x(t)$ и $y(t)$ са численостите, съответно на популациите X (жертва) и Y (хищник) в момент t , където t е времето. Тогава производните $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ се интерпретират като моментното изменение на популациите в момент t .

Параметрите α β γ δ са положителни и реални числа. α и γ описват прираста на всяка една от популациите. Параметрите β и δ определят взаимодействието (хищничество, конкуренция или мутуализъм) между отделните видове.

Дадената дефиниция съответства на модела на Лотка–Волтера за популационна двойка хищник–жертва. Възможно е да бъде изведен теоретичен модел за произволен брой видове (или обобщен модел). В зависимост от стойностите на параметрите, обобщените уравнения на Лотка–Волтера представят достоверно условията на хищничество и конкуренция между отделни популации, но са много по-неточни при описване на симбиотични взаимоотношения, в частност мутуализъм.

2.2. Общо решение

Нека $(x(t), y(t))$ е едно решение на (1) при начални условия (x_0, y_0) , т.е. $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, където $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$. Множеството от всички точки (x, y) в затворения първи квадрант $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ от вида $\{(x, y): x = x(t), y = y(t)\}$, където t е параметър, описващ даден интервал $0 \leq t \leq T$, представлява крива линия. Тази крива е траектория на решението $(x(t), y(t))$, която минава през т. (x_0, y_0) в началния момент $t = 0$. Когато казваме, че една крива е траектория на система (1), имаме предвид, че е траектория на някое решение на (1).

Нека намерим всички траектории за система (1), принадлежащи на затворения първи квадрант. Ако $(x(t), y(t))$ е такава траектория, разделяме почленно (1) и получаваме:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\delta xy - \gamma y}{\alpha x - \beta xy} \quad (2)$$

в околност на коя да е точка (x_1, y_1) от траекторията, където $x(t) \neq 0$. Съотношение (2) означава, че съответната част (около точка (x_1, y_1)) от траекторията е интегрална крива (т.е. графика на решение) на диференциалното уравнение :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta xy - \gamma y}{\alpha x - \beta xy} \quad \text{или още} \quad y' = \frac{\delta xy - \gamma y}{\alpha x - \beta xy} \quad (3)$$

Последното уравнение е с отделящи се променливи и следователно може да се интегрира. Наистина:

$$(\delta xy - \gamma y) / (\alpha x - \beta xy) = (xy(\delta - \gamma/x)) / (xy(\alpha/y - \beta)) \quad (4)$$

т.е. като съкратим на xy (което не променя интегралния портрет в затворения първи квадрант) записваме (4) във вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta - \gamma/x}{\alpha/y - \beta} \quad (5)$$

или

$$(\delta - \gamma/x) dx + (\alpha/y - \beta) dy = 0 \quad (6)$$

Като интегрираме (6), получаваме:

$$\int (\delta - \gamma/x) dx + \int (\alpha/y - \beta) dy = C \quad (7)$$

или още

$$\delta x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y) = C \quad (8)$$

Съотношение от вида (8) наричаме общ интеграл на съответната диференциална форма, т.е. (8) е общ интеграл на (6), а също и на (3). Пресмятанията по-горе същевременно показват, че ако $(x(t), y(t))$ е траектория на (1), то функцията:

$$F(x, y) = \delta x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y)$$

е константа върху всяка такава траектория, т.е. $F(x, y) = \text{const}$ (относно t); това именно означава съотношението (6). Всяка функция $F((x(t), y(t)))$, която е константа върху траекториите на дадена динамична система (такава например е система (1)), наричаме първи интеграл на системата, т.е. $F(x, y) = \delta x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y)$ е първи интеграл на системата на Лотка–Волтера.

3. Числови симулации на Модела на Лотка–Волтера

3.1. Теоретична формулировка на математически модел за популация от лъв, гну и зебра

При построяването на модел за лъв, гну и зебра използваме постоянни стойности на параметрите [3]. За моделите лъв–гну и лъв–зебра система (1) приема вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.405x - 0.81xy \\ \frac{dy}{dt} = -1.5y + 0.125xy \end{cases} \quad (9) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = 0.35z - 0.75yz \\ \frac{dy}{dt} = -1.5y + 0.125yz \end{cases} \quad (10)$$

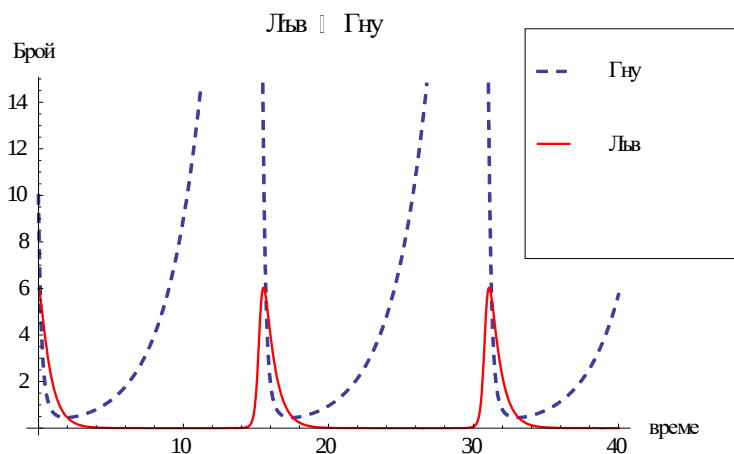
За основа на числените симулации са взети данните от преброяванията на популациите на лъв, гну и зебра в национален парк Крюгер (ЮАР) [3]. С цел да запазим максимално съответствие на математическите модели и данните получени в реални условия приемаме:

- Всички външни фактори, които могат да повлияят на динамиката на популациите, като суша, пожари и епидемии, се приемат за стабилни за разглеждания период или поне имат подобен ефект върху взаимодействащите видове.
- Използваме непрекъснати модели, тъй като популациите са достатъчно големи, не се прави разграничение между възрастовите групи на даден вид и непрекъснатите модели в този случай са много по-точни при описването на вариациите на популацията във времето.
- Резултатите от симулациите показват размера на популациите, измерени в хиляди. Гъстотата на популациите е посочена на вертикалната ос, а времето – на хоризонталната ос.
- Точните данни за преброяването на лъвовете в региона през този период не са налични, но се предполага, че популацията е в границите на 300 – 700 индивида. В симулацията приемаме първоначален брой от 500 лъва [3].

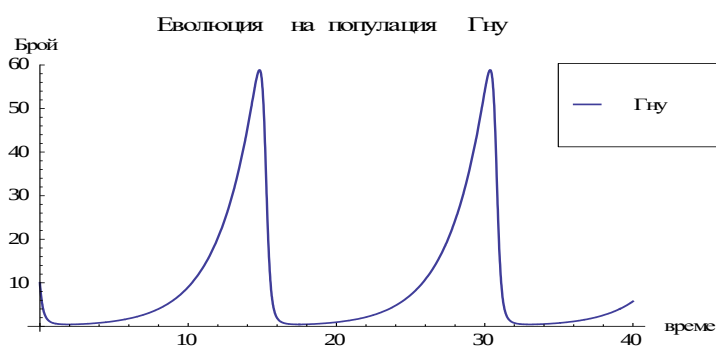
3.2. Числови симулации на модел Лъв–гну и лъв–зебра

Ще изследваме поведението на популациите при различни начални условия. От една страна изучаваме поведението на модела при отсъствие на жертва, от друга – при отсъствие на хищник. За тази цел използваме софтуерната система Wolfram Mathematica.

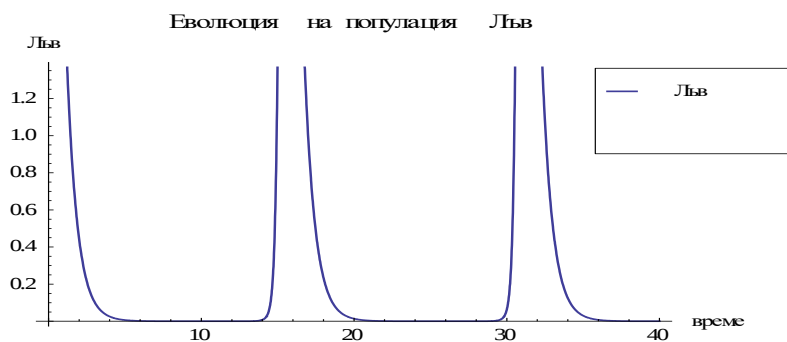
Като начални условия за брой на популацията от лъв, гну и зебра фиксираме 500, 1000 и 1000 съответно. Спрямо модела, дефиниран в първа част система уравнения (1), получаваме следните резултати.



Фигура 1. Еволюция на популация на лъв и гну за период от 40 години



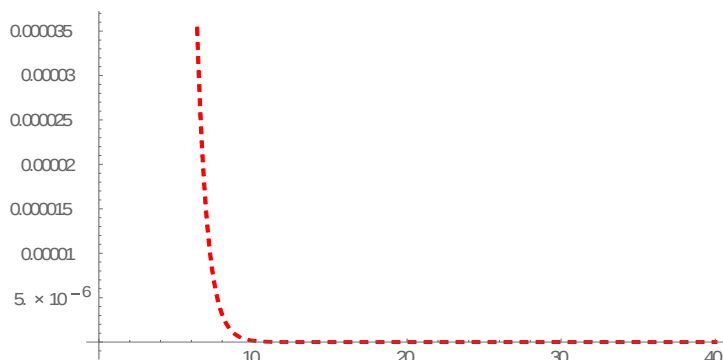
Фигура 2. Еволюция на популация на гну за период от 40 години



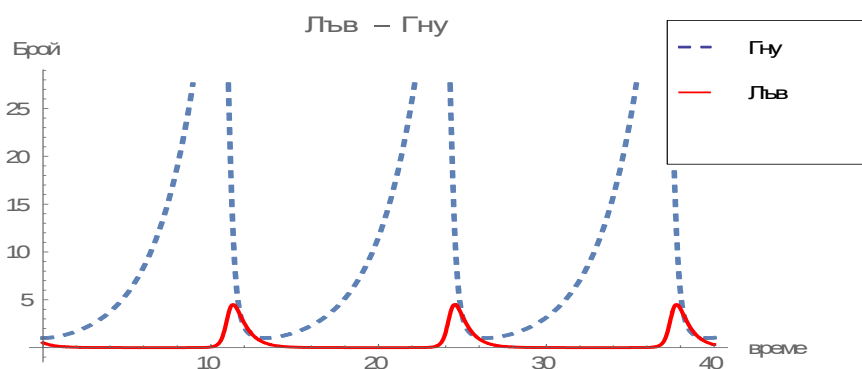
Фигура 3. Еволюция на популация на лъв за период от 40 години



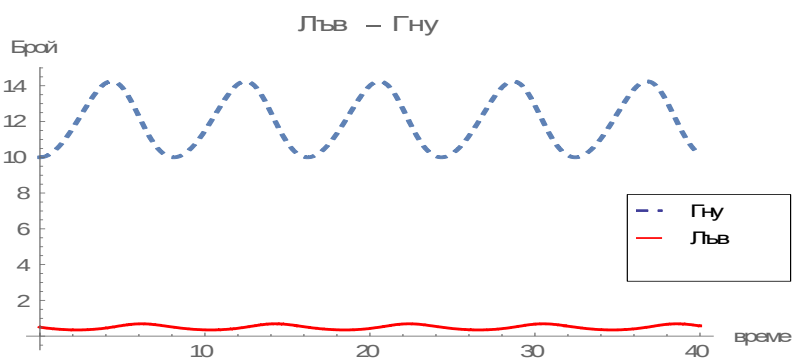
Фигура 4. Еволюция на популацията на гну в отсъствие на хищник



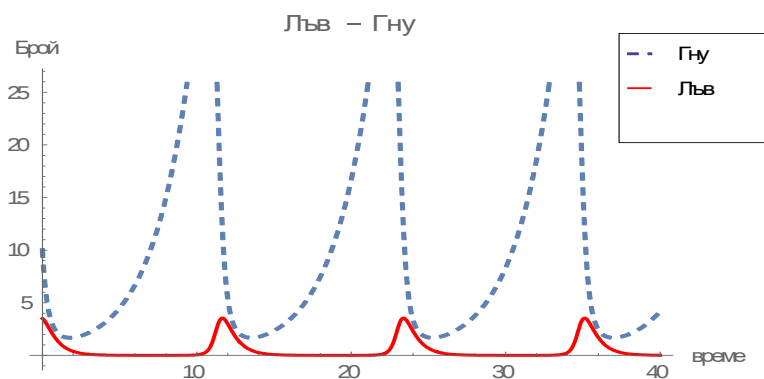
Фигура 5. Еволюция на популацията на лъв в отсъствие на жертва.



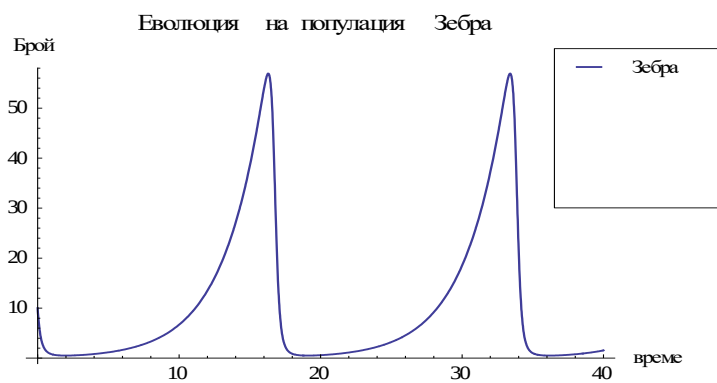
Фигура 6. Еволюция на популация на лъв и гну за период от 40 години при начални условия (1;0.5)



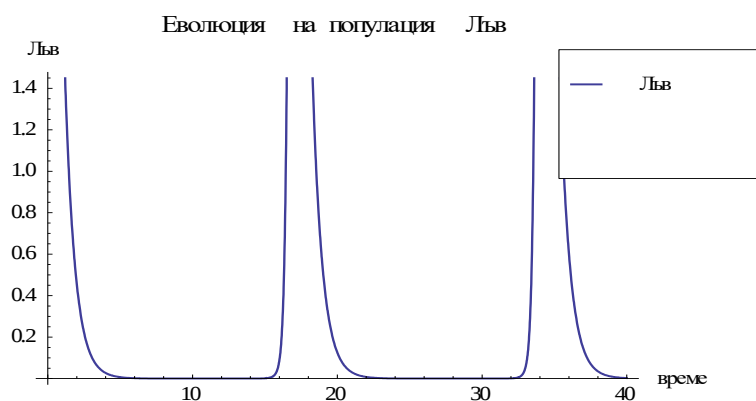
Фигура 7. Еволюция на популация на лъв и гну за период от 40 години при начални условия (10;0.5)



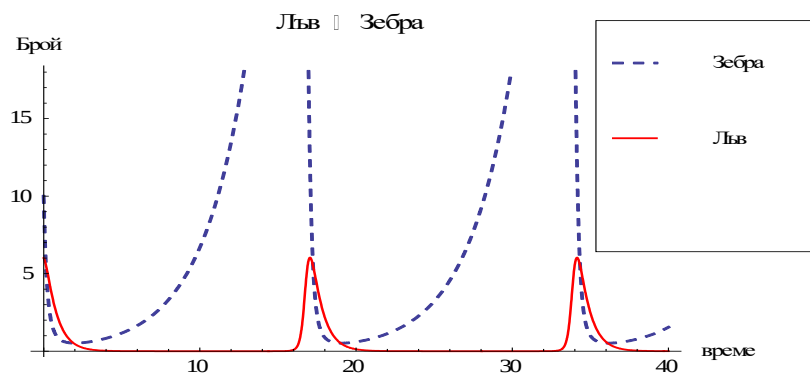
Фигура 8. Еволюция на популация на лъв и гну за период от 40 години при начални условия (10;3.5)



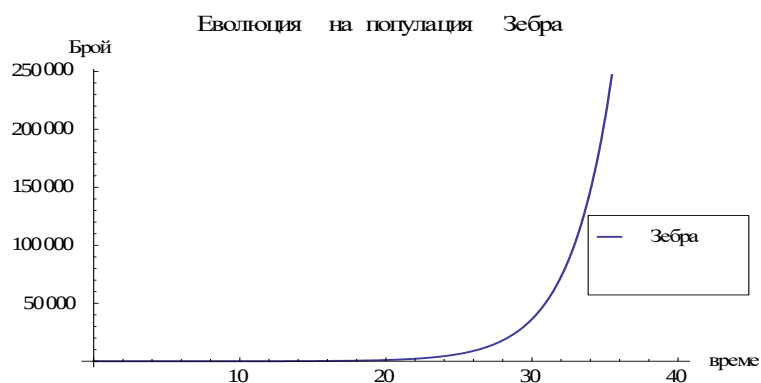
Фигура 9. Еволюция на популация на зебра за период от 40 години



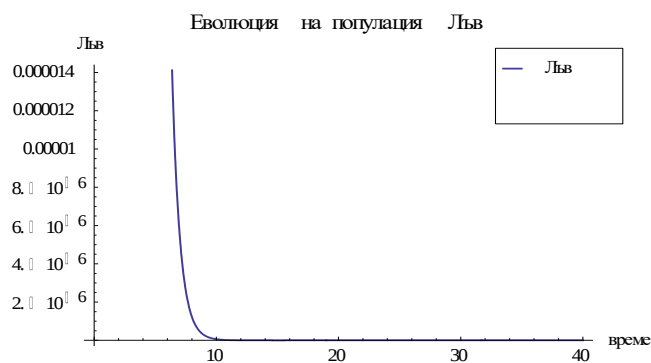
Фигура 10. Еволюция на популация на лъв за период от 40 години



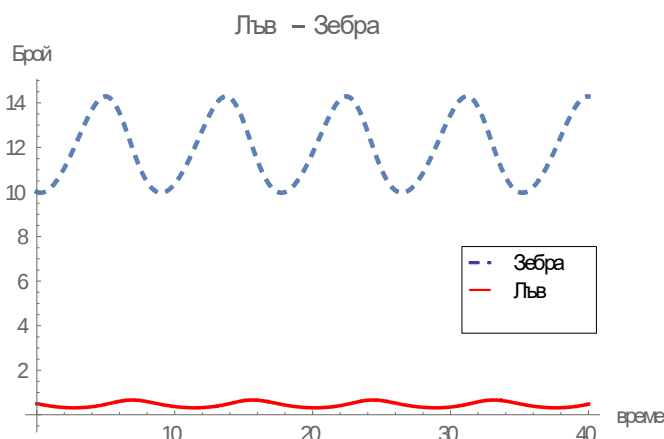
Фигура 11. Еволюция на популация на лъв и зебра за период от 40 години при начални условия (1,0,5)



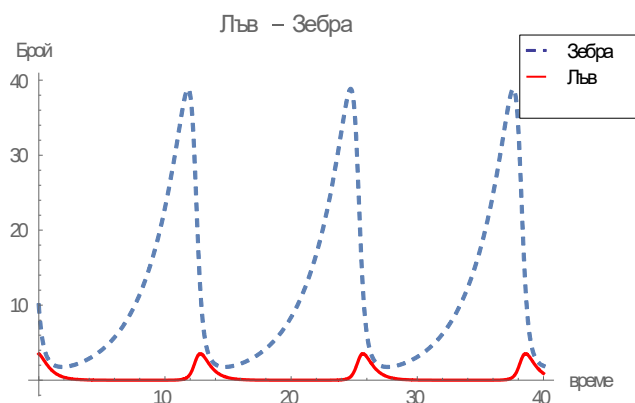
Фигура 12. Еволюция на популацията на зебра в отсъствие на хищник



Фигура 13. Еволюция на популацията на лъв в отсъствие на жертва



Фигура 14. Еволюция на популация на лъв и зебра за период от 40 години при начални условия (10;0.5)



Фигура 15. Еволюция на популация на лъв и зебра за период от 40 години при начални условия (10;3.5)

От проведените симулации може да заключим, че когато популацията на жертва започва да нараства, броят на хищниците също започва да нараства до момента, в който хищниците убиват жертвите по-бързо, отколкото могат да се възпроизведат. Тогава популацията на жертва започва да намалява, което от своя страна води до намаляване на ресурсите необходими за оцеляване на хищниците, чиито брой също започва да намалява. Решението на система (1) получено от числовата симулация е

циклично, което означава, че цикълът на нарастване и намаляване на двата вида може да продължи безкрайно.

Основният недостатък на системата (1) като математически модел на екологична система е нейната структурна нестабилност: малка промяна в дясната страна на (2) може да доведе до качествена промяна в поведението на решенията (фигури 6, 7, 8, 13, 14, 15).

Можем да отбележим и друг недостатък на модела на Лотка–Волтера. Популациите се възстановяват от изключително малък брой останали индивиди (фигури 2, 3, 9, 10). В реални условия това би довело до изчезването и на двата вида.

4. Резултати

Разгледани са два популационни модела, базирани на уравненията на Лотка–Волтера. При определени начални условия (обем на популациите) и хипотезите, касаещи всички външни фактори, са получени сходни решения и за двата модела. При дадени начални условия моделът показва устойчиво развитие на всяка от двете двойки хищник-жертва. Констатирана е цикличност в развитието на двете популации. Симулациите потвърждават, че при изчезване на хищния вид популацията на жертвата расте постоянно, а от друга страна при изчезване на популацията на жертва, популацията на хищник започва да намалява, като клони към 0 за по-голям период от време.

5. Заключение

Моделът на Лотка-Волтера хищник-жертва е един от основните модели в екологията. Той е създаден само за една популация от жертва и една популация от хищник, също така не предполага никакви външни влияния като болести, променящи се условия, замърсяване и т.н. От една страна при определени начални условия, моделът дава достатъчно добро описание за поведението на екосистемата. От друга – познаването на описаните модели на междувидови взаимодействия дава възможност за контролируемо вмешателство, с цел регулиране числеността на популациите, както на жертвите, така и на хищниците. Това би възвърнало нарушеното равновесие в дадените екосистеми и би предотвратило изчезването на множество застрашени видове.

Благодарности

Изследванията са частично финансирани от проект на ФП19ФМИ002 при НПД, ПУ „Паисий Хилендарски“ и проект МУ19ФМИ009 при НПД, ПУ „Паисий Хилендарски“.

Литература

- [1] Lotka, A. J., *Elements of physical biology*, Wiliams and Wilkins, Baltimore, 1925.
- [2] Volterra, V., *Theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Gauthier – Villars et c-ie, Paris, 1931.
- [3] Fay, T., J. C. Greff, Lion, wildebeest and zebra: A predator-prey model, *Ecological Modelling*, vol. 196, is. 1–2, (2006), 237-244.
- [4] Hristova, S., T. Kostadinov, K. Ivanova, stability with two measures for differential equations with noninstantaneous impulses, *Mechanics of machines*, 119, 1, 2018, 18-22.
- [5] Hristova, S., Tunc, Stability of nonlinear volterra integro-differential equations with caputo fractional derivative and bounded delays, *Electr. J. Diff. Eq.*, 2019, vol. 2019, Art. No. 30.
- [6] Agarwal, R., S. Hristova, D. O'Regan, R. Terzieva, Stability properties of neural networks with non-instantaneous impulses, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, 16 (3): 1210-1227.
- [7] Agarwal, R., S. Hristova, D. O'Regan, Lipschitz Stability for Non-Instantaneous Impulsive Caputo Fractional Differential Equations with State Dependent Delays, *Axioms* 2019, 8.
- [8] Hristova, S., and K. Ivanova, Caputo Fractional Differential Equations with Non-Instantaneous Random Erlang Distributed Impulses, *Fractal Fract.* 2019, 3, 28, 1-15.
- [9] Agarwal, R., S. Hristova, D O'Regan, Global Mittag—Leffler Synchronization for Neural Networks Modeled by Impulsive Caputo Fractional Differential Equations with Distributed Delays, *Symmetry* 10 (10), 2018, 473.
- [10] Agarwal, R., S. Hristova, D O'Regan, and P. Kopanov, Stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks with random impulses, *Mathematics* 2018, 6 (9), 144.
- [11] Agarwal, R., S. Hristova, D O'Regan, Applications of Lyapunov Functions to Caputo Fractional Differential Equations, *Mathematics* 2018, 6, 229.
- [12] Agarwal, R., S. Hristova, D O'Regan, Lyapunov functions to Caputo reaction-diffusion fractional neural networks with time-varying delays, *J. Math. Computer Sci.*, 2018, 18, 328-345.
- [13] Hristova, S., T. Kostadinov, and K. Ivanova, Stability with two measures of delay differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceedings* 2018, 040007.
- [14] Hristova, S., P. Kopanov, Stability of neural networks with random impulses, *Dynamical Systems and Applications*, 2018, 27, No. 4, 791-801.

- [15] Agarwal, R., S. Hristova, D. O'Regan, P. Kopanov, Differential equations with random Gamma distributed moments of non-instantaneous impulses and p-moment exponential stability, *Demonstratio Mathematica*, 2018, 51 (1), 151-170.
- [16] Agarwal, R., S. Hristova, D. O'Regan, Caputo Fractional Differential Equations with Non-Instantaneous Impulses and Strict Stability by Lyapunov Functions, *Filomat* 31:16 (2017), 5217–5239.
- [17] Hristova, S., K. Ivanova, T. Kostadinov, Generalized exponential stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceedings* 1910, 2017, 040005.
- [18] Hristova, S., T. Kostadinov, K. Ivanova, Stability with two measures for differential equations with noninstantaneous impulses, *Mechanics of machines*, 119, 1, 2018, 18-22.
- [19] Agarwal, R., S. Hristova, D. O'Regan, P. Kopanov, Impulsive differential equations with Gamma distributed moments of impulses and p-moment exponential stability, *Acta Mathematica Scientia*, 2017, Issue 4, Vol. 37.
- [20] Agarwal, R., S. Hristova, D. O'Regan, P. Kopanov, P-moments exponential stability of differential equations with random non-instantaneous impulses and their Erlang distribution, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2016, vol. 109, no. 1, 9-28.
- [21] Agarwal, R., D. O'Regan, S. Hristova, Stability of Caputo fractional differential equations by Lyapunov functions, *Appl. Math.*, 60, 2015, No. 6, 653–676.
- [22] Agarwal, R., D. O'Regan, S. Hristova, Stability by Lyapunov like functions of nonlinear differential equations with noninstantaneous impulses, *J. Appl. Math. Comput.*, 2015.
- [23] Agarwal, R., S. Hristova and D. O'Regan, Practical Stability of Caputo fractional differential equations by Lyapunov functions, *Diff. Equ. Appl.*, vol. 8, 1, 2016.
- [24] Agarwal, R., S. Hristova and D. O'Regan, Lyapunov functions and strict stability of Caputo fractional differential equations, *Advances in Difference Equations*, 2015, 2015:346.
- [25] Agarwal, R., D. O'Regan, S. Hristova, Stability and Caputo Fractional Dini Derivative of Lyapunov Functions for Caputo Fractional Differential Equations, *В сборник с доклади на: International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations*, QUALITDE – 2015, December 27–29, 2015, Tbilisi, Georgia, 3-8.
- [26] Agarwal, R., S. Hristova, D. O'Regan, Stability with respect to initial time difference for generalized delay differential equations, *Electron. J. Differential Equations* 2015, No. 49.

- [27] Hristova, S., V. Proytcheva, Weighted exponential stability for generalized delay functional differential equations with bounded delays, *Adv. Difference Equ.*, 2014, 2014:185.
- [28] Hristova, S., K. Stefanova, Nonlinear Bihari type integral inequalities with maxima, Research and Education in Mathematics, Informatics and Their Applications, *Proc. of the Anniversary International Conference REMIA'2010*, Plovdiv, December, 145-152, 2010.
- [29] Hristova, S., K. Stefanova, Linear integral inequalities involving maxima of the unknown scalar functions, *Funkcialaj Ekvacioj*, Vol. 53, 381-394, 2010.
- [30] Hristova, S., K. Stefanova, Linear integral inequalities involving maxima of the unknown scalar functions, *Journal of Mathematical Inequalities*, 2010, Vol. 4, No. 4, 523-535.
- [31] Hristova, S., K. Stefanova, Two-dimensional integral inequalities and applications to partial differential equations with “maxima”, *IeJPAM*, 2010, Vol. 1, No. 1, 11-28.
- [32] Stefanova, K. Integral inequalities and applications to partial differential equations with “maxima”, Mathematics and Education in Mathematics, *Proc. of 40th Jubilee Spring Conference of the UBM*, Borovetz, April 5–9, 213-218, 2011.
- [33] Stefanova, K. Nonlinear generalization of Bihari inequality in the theory of partial differential equations with “maxima”, *The 22nd Edition of the NAV-MAR-EDU International Scientific Conference*, Constanta, Sec. 7, 25-34, 2011.
- [34] Hristova, S., K. Stefanova, Integro-summation inequalities and applications to impulsive differential equations with “supremum”, *The 22nd Edition of the NAV-MAR-EDU International Scientific Conference*, Constanta, 2011, Sec. 7, 15-24.
- [35] Hristova, S., K. Stefanova, Some integral inequalities with maximum of the unknown functions, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 2011, Vol. 6, No. 1, 57-69.
- [36] Bohner, M., S. Hristova, K. Stefanova, Nonlinear integral inequalities involving maxima of the unknown scalar functions, *Mathematical Inequalities and Applications*, 2012, Vol. 12, Num. 4, 811-825.
- [37] Hristova, S., K. Stefanova, Practical stability of impulsive differential equations with “supremum” by integral inequalities, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2012, Vol. 5, No. 1, 30-44.
- [38] Hristova, S., A. Golev, K. Stefanova, Quasilinearization of the Initial Value Problem for Difference Equations with “Maxima”, Hindawi Publ. Corp., *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2012, Art. ID 159031, 17 pages.

- [39] Hristova, S., K. Stefanova, Monotone-iterative method for a mixed nonlinear boundary value problem for differential equations with “maxima”, *AIP Conf. Proc.* 2012, **1497**, 99, 99-106.
- [40] Hristova, S., A. Golev, K. Stefanova, Approximate Method for Boundary Value Problems of Anti-Periodic Type for Differential Equations with Maxima, *Boundary Value Problems*, 2013, 2013:12, ISSN: 1687-2770.
- [41] Agarwal, R., S. Hristova, A. Golev, K. Stefanova, Monotone-iterative method for mixed boundary value problems for generalized difference equations with “maxima”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2013, 43, 213-233, <https://doi.org/10.1007/s12190-013-0660-6>.
- [42] Hristova, S., A. Golev, Quasilinearization for nonlinear boundary value problems for delay-type difference equations with maxima, *J. Inequal. Appl.*, 2014, 2014:132.
- [43] Agarwal, R., A. Golev, S. Hristova, D. O'Regan, K. Stefanova, Iterative techniques with computer realization for the initial value problem for Caputo fractional differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2018, 58: issue 1-2, 443-467.
- [44] Agarwal, R., A. Golev, S. Hristova, D. O'Regan, K. Stefanova, Iterative Techniques with Initial Time Difference and Computer Realization for the Initial Value Problem for Caputo Fractional Differential Equations, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 2017, 72.
- [45] Голев, А., С. Христова, Компютърна реализация на някои приближени методи за диференциални уравнения от дробен ред, *Сборник с доклади на научна конференция „Иновационни софтуерни инструменти и технологии с приложения в научни изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението“*, Пампорово, 23-24 ноември 2017 г., 15–24, ISBN: 978-619-202-343-0.
- [46] Golev, A., A. Penev, K. Stefanova and S. Hristova, Using GPU to Speed Up Calculation of Some Approximate Methods for Fractional Differential Equations, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2018, Vol. 119, No. 3, 391-401.
- [47] Stefanova, K., S. Hristova and A. Golev, Dynamic modeling of discrete leader-following consensus with impulses, *AIMS Mathematics*, 2019, 4(5): 1386-1402.
- [48] Stefanova, K., S. Hristova and A. Golev, Discrete leader-following consensus for multi-agent system with non-instantaneous impulses, *Dynamic Systems and Applications*, 2019, Vol. 28, No. 3, 743-755.
- [49] Hristova, S., K. Stefanova and A. Golev, Computer Simulation and Iterative Algorithm for Approximate Solving of Initial Value Problem for Riemann-Liouville Fractional Delay Differential Equations, *Mathematics*, 2020, 8 (4), 477.

- [50] Hristova, S., K. Stefanova, Exponential stability of Hopfield-type delay impulsive discrete neural networks and computer simulation, *International Journal of Differential Equations and Applications*, Vol. 19, No. 1, 2020, 33-44.
- [51] Hristova, S., K. Stefanova, Exponential stability of discrete neural networks with non-instantaneous impulses, delays and variable connection weights with computer simulation, *International Journal of Applied Mathematics*, 2020, Vol. 33, No. 2, 187-209.
- [52] Stefanova, K. Computer simulations for delay impulsive discrete neural networks, *International Journal of Differential Equations and Applications*, Vol. 19, No. 1, 2020, 63-82.

Faculty of Mathematics and Informatics,
University of Plovdiv "Paisii Hilendarski",
24, Tzar Asen Str., 4000 Plovdiv, Bulgaria,
E-mails: addobрева88@gmail.com

COMPUTER SIMULATION AND INVESTIGATION OF PREDATOR-PREY MODELS WITH THREE POPULATIONS

A. Dobрева

Abstract. Some predator-prey models with two and more populations are studied in the paper. Based on the real data from national park Kruger (South Africa), the dynamic model of a predator and two preys is investigated in various cases. By the help with CAS Wolfram Mathematica the effects of different real World factors over the dynamics of each population are studied. The simulations allow us to investigate the behavior of the system and to predict some trends.

Keywords: *mathematical models, predator, prey, CAS Wolfram Mathematica*