ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"

ФАКУЛТЕТ МАТЕМАТИКА и ИНФОРМАТИКА

катедра Геометрия

Бистра Царева

ГЕОМЕТРИЯ НА ФИГУРИТЕ

Пловдив 2010

Геометрия на фигурите е изборен курс, преподаван на студентите от ФМИ през последните няколко години. Учебният материал е конструиран в три части. Той разширява знанията на студентите за изучаваните в училище вписан и описан четириъгълник и ги запознава с нови забележителни четириъгълници - псевдоквадрат, трибедреник, външно описан четириъгълник и ограден четириъгълник, които не са включени в учебните програми както на средното училище, така и на университетската бакалавърска програма .

Третата част е посветена на барицентричната координатна система, която се оказва много полезна при изучаване геометрията на триъгълника. Въведена е барицентричната координатна система върху права и в равнината, намерени са барицентричните координати на забележителните точки на триъгълника и е показано приложението на тази теория.

Всяка от трите части завършва със задачи, част от които са решени, а останалите се предлагат за самостоятелна работа.

За усвояването на материала са достатъчни знанията по геометрия от средното училище и аналитична геометрия.

Геометрия на фигурите

Част I

1 Псевдоквадрат и трибедреник

1.1 Псевдоквадрат

1.1.1 Определение и характеристика на псевдоквадрата

Определение 1.1 *Четири точки A, B, C, D, никои три от които не лежат на една права и техните шест съединителни отсечки, се нарича пълен четириъгълник.*

Точките A, B, C, D се наричат **върхове**, а отсечките AB, CD, AC, BD, AD, BC се наричат страни на пълния четириъгълник. Страните, минаващи през един и същи връх, се наричат **съседни**. Съгласно определението през всеки връх на пълния четириъгълник минават точно по три съседни страни. Страните, неминаващи през един и същи връх, се наричат **срещуположни**. AB и CD, AC и BD, AD и BC са двойките срещуположни страни на пълния четириъгълник $ABCD$.

Определение 1.2 *Всеки пълен четириъгълник, в който една двойка срещуположни страни са равни и перпендикулярни, се нарича псевдоквадрат.*

Примери:
1. Квадрат $ABCD$, допълнен с диагоналите му AC и BD. Двойката срещуположни страни AC и BD удовлетворяват условието да бъдат равни и перпендикулярни ;

2. Равнобедрен трапец $ABCD$ с перпендикулярни диагонали AC и BD. Двойката срещуположни страни AC и BD удовлетворяват условието да бъдат равни и перпендикулярни;

3. Триъгълник ABC и ортоцентърът му D, при условие, че $AB = CD$ определят псевдоквадрат $ABCD$. Двойката срещуположни страни AB и CD удовлетворяват условието да бъдат равни и перпендикулярни.

Лема 1.1 *Средите на кои да е две двойки срещуположни страни на пълния четириъгълник са върхове на успоредник, чиито двойки срещуположни страни са успоредни и равни на половината от дължините съответно на третата двойка срещуположни страни.*

Доказателство: Нека $ABCD$ (черт.1.1) е произволен пълен четириъгълник, за който са в сила равенствата:

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &a)\ \ AM = MB\ ,\quad M \in AB;\\ &b)\ \ CN = ND\ ,\quad N \in CD;\\ &c)\ \ BP = PC\ ,\quad P \in BC;\\ &d)\ \ AQ = QD\ ,\quad Q \in AD;\\ &e)\ \ AK = KC\ ,\quad K \in AC;\\ &f)\ \ BL = LD\ ,\quad L \in BD. \end{aligned}$$

От 1.1 $b)$ и 1.1 $e)$ следва, че NK е средна отсечка за $\triangle ACD$, а от 1.1 $a)$ и 1.1 $f)$ следва, че ML е средна отсечка за $\triangle ABD$. Тогава $NK \| AD \| ML$ и $NK = \frac{1}{2}AD = ML$, от където следва, че четириъгълникът $KMLN$ е успоредник.

След аналогични разсъждения установяваме, че NL и KM са средни отсечки съответно в $\triangle BCD$ и $\triangle ABD$, поради което $NL \| BC \| KM$ и $NL = \frac{1}{2}BC = KM$.

Доказателството, че $MPNQ$ и $LPQK$ са успоредници, удовлетворяващи условията на Лемата, протичат аналогично.

Теорема 1.1 *Един пълен четириъгълник е псевдоквадрат тогава и само тогава, когато средите на две от двойките му срещуположни страни са върхове на квадрат.*

Доказателство: Ще използваме означенията на черт.1.1 и равенствата (1.1), въвеждащи точките K, L, M, N.

Необходимост. Нека $ABCD$ е псевдоквадрат като двойката срещуположни страни BC и AD удовлетворяват условието на Определение 1.2 т.е. $BC = AD$ и $BC \perp AD$. Съгласно Лема 1.1 $KMLN$ е успоредник със страни $KM = \frac{1}{2}BC$, $KM \| BC$ и $ML = \frac{1}{2}AD$, $ML \| AD$. Следователно $KM = ML$ и $KM \perp ML$, което означава, че успоредникът $KMLN$ е квадрат.

Достатъчност. Нека $KMLN$ е квадрат. Следователно

$$(1.2)\qquad KM = ML\ , KM \perp ML.$$

Съгласно Лема 1.1 и условията (1.2) $AD = 2ML = 2KM = BC$ и $AD \perp BC$. Отчитайки последните релации и Определение 1.2, заключаваме, че $ABCD$ е псевдоквадрат.

1.1.2 Задачи

Задача 1.1 **Задача 1.1** *Точките M и N са съответно средите на основите AB и CD на равнобедрения трапец $ABCD$. Ако $AB = a$, $CD = b$, $a > b$ и $MN = \frac{1}{2}(a-b)$, да се докаже, че $ABCD$ е псевдоквадрат.*

Решение Нека точките K, L и P, Q са среди съответно на диагоналите AC, BD и бедрата BC, AD (черт.1.1). Съгласно Лема 1.1 $KMLN$ е успоредник. Тъй като QL и QK са средни отсечки съответно в триъгълниците $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, то $KL = QL - KL = \frac{1}{2}(a-b)$. Следователно $MN = KL$ и $MN \perp KL$, а успоредникът $KMLN$ е квадрат. Тогава съгласно Теорема 1.1 $ABCD$ е псевдоквадрат.

Задача 1.2 *Нека ABC е неправоъгълен триъгълник, за който $\angle ACB = 45^0$, а точката D е ортоцентърът. Да се докаже, че пълният четириъгълник $ABCD$ е псевдоквадрат.*

Решение Нека $AD \cap BC = A_1, CD \cap AB = C_1$ (черт.1.2). Следователно $AA_1 \perp BC$, $CC_1 \perp AB$ и

$$\angle BAA_1 = 90^0 - \angle ABA_1 = \angle BCC_1. \tag{1.3}$$

Поради условието $\angle ACB = 45^0$ и $\angle AA_1C = 90^0$ следва, че правоъгълният триъгълник AA_1C е равнобедрен или

$$AA_1 = CA_1 \tag{1.4}$$

От (1.3) и (1.4) следва еднаквостта на правоъгълните триъгълници AA_1B и CA_1D. Така получаваме $CD = AB$, което заедно с $CD \perp AB$ удовлетворява условията на Определение 1.2 и заключаваме, че $ABCD$ е псевдоквадрат.

Задача 1.3 *Нека изпъкналият четириъгълник $ABCD$, за който*
$AD > BC$ и $AB \cap CD = E$ е псевдоквадрат, като $AB = CD$ и $AB \perp CD$.
Да се докаже:
а) разликата от диаметрите на окръжностите, вписани в $\triangle ACE$ и $\triangle BDE$ е равна на разликата от дължините на страните BD и AC;
б) $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$;
в) лицето на $ABCD$ е равно на $\dfrac{-BC^2 + AD^2}{4}$.

Задача 1.4 *Даден е успоредникът $ABCD$. Построени са квадратите $CDEF$ и $BCMN$, разположени външно за успоредника. Да се докаже, че пълният четириъгълник $AMFC$ е псевдоквадрат.*

1.2 Трибедреник

1.2.1 Определение и свойства на трибедреника

Определение 1.3 *Изпъкнал четириъгълник с три равни страни, за който сборът на ъглите, принадлежащи на четвъртата страна е равен на* 120^0*, се нарича трибедреник.*

Елементи на трибедреника. Равните страни на трибедреника се наричат бедра, а четвъртата страна - основа. Бедрото, което е срещулежащо на основата се нарича средно, а останалите две бедра се наричат крайни.

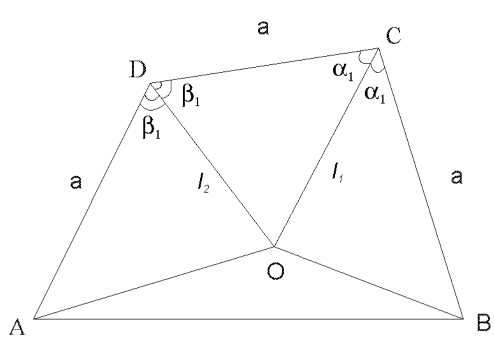
Означения. Нека с a означим дължината на бедрата, а ъглите, прилежащи на основата, ще означим с α и β. Или, ако $ABCD$ е трибедреник, то $BC = CD = AD = a$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, като $\alpha + \beta = 120^0$.

Тези означения ще използваме във всички следващи твърдения и техните доказателства.

Свойства на трибедреника

Свойство 1.1 *Ъглополовящите на ъглите, прилежащи на средното бедро на трибедреника, се пресичат в точка от основата му и го разделят на три еднакви триъгълника с общ връх. Всяко бедро се вижда от тази точка под ъгъл* 60^0*.*
Всеки от ъглите, прилежащи на средното бедро на трибедреника, е два пъти по-голям от срещуположния си.

Доказателство: Да означим $\angle BCD = 2\alpha_1$, $\angle CDA = 2\beta_1$, ъглополовящите им съответно с l_1 и l_2 , а пресечната им точка с O (черт.2.1).



черт.2.0

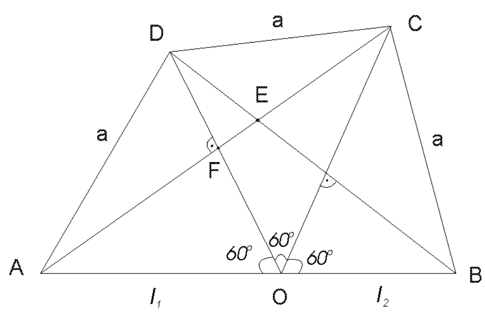
Лесно се съобразява еднаквостта на триъгълниците AOD, COD, COB въз основа на първи признак за еднаквост на триъгълници. Следователно

$$AO = CO = l_1, BO = DO = l_2;$$

$$\alpha_1 = \angle DCO = \angle DAO;$$

$$\beta_1 = \angle CDO = \angle CBO;$$

$$\angle AOD = \angle BOC = \angle DOC = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1) = 180^0 - \frac{240^0}{2} = 60^0.$$



черт.2.1

Но тогава $\angle AOB = 3.60^0 = 180^0$, от където следва, че $O \in AB$

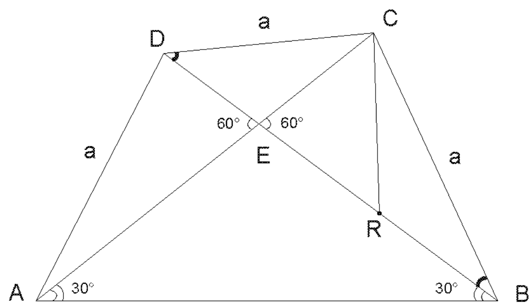
и $\alpha = \angle BAD = \alpha_1$, $\beta = \angle ABC = \beta_1$.

Свойство 1.2 *Ъглите при основата на трибедреника са остри.*

Доказателство: Да допуснем, че един от ъглите при основата на трибедреника е тъп, напр. $\alpha > 90^0$. Тогава съгласно Свойство 1.1 $\angle BCD = 2\alpha > 180^0$, което противоречи на изискването в определението на трибедреника, четириъгълникът да е изпъкнал. Следователно допускането не е вярно и $\alpha < 90^0$. Аналогично се доказва и $\beta < 90^0$.

Свойство 1.3 *Всеки от диагоналите на трибедреника сключва с основата му ъгъл, равен на* 30^0.
Частите от диагоналите на трибедреника, заключени между пресечната им точка и върховете при основата са равни помежду си и в същото време са равни на сбора от останалите две части от диагоналите.

Доказателство: Нека $ABCD$ е трибедреник и $AC \cap BD = E$ (черт.2.2).



черт.2.2

От $AD = CD = a$ следва, че точка D принадлежи на симетралата s_{AC} на отсечката AC. От $AO = CO = l_2$ следва, че точка O принадлежи на симетралата s_{AC} на отсечката AC. Така получихме $s_{AC} = DO$, от където следва $DO \perp AC$. Нека $AC \cap DO = F$. Тогава от $\triangle AOF$ намираме

$$\angle FAO = 180^0 - \angle AFO - \angle FOA = 180^0 - 90^0 - 60^0 = 30^0.$$

Аналогично се доказва, че и $\angle DBA = 30^0$. Но тогава $\triangle ABE$ е равнобедрен и следователно $AE = BE$.

Нека сега точка $R \in BD$ е такава, че $BR = DE$. Разглеждаме $\triangle BRC$ и $\triangle DEC$. От $BR = DE$ (по построение), $BC = DC$ (по условие) и $\angle DBC = \angle BDC$ (защото $\triangle BDC$ е равнобедрен) следва еднаквостта на $\triangle BRC$ и $\triangle DEC$. Следователно $RC = EC$. Тъй като външният ъгъл за $\triangle ABE$ - $\angle BEC = 60^0$, то равнобедреният $\triangle REC$ е равностранен, което означава, че $RE = EC$. Тогава $AE = BE = DE + CE$.

Свойство 1.4 *За трибедреника $ABCD$ с основа AB и пресечна точка E на диагоналите е в сила равенството $S_{ABE} = S_{ADE} + S_{BCE}$.*

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от Свойство 1.3. Наистина,

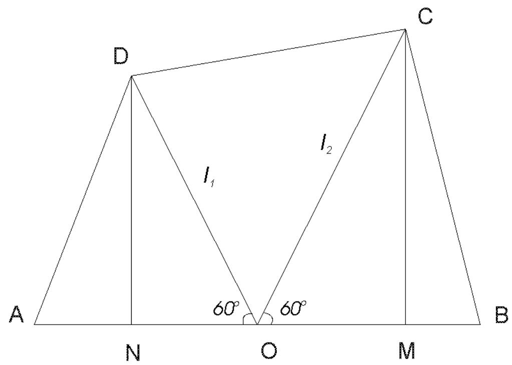
$$S_{ABE} = \frac{1}{2}AE.BE.sin120^0 = \frac{1}{2}(DE + CE)^2.sin60^0$$

$$S_{ADE} + S_{BCE} = \frac{1}{2}AE.DE.sin60^0 + \frac{1}{2}BE.CE.sin60^0 =$$

$$\frac{1}{2}AEsin60^0(DE + CE) = \frac{1}{2}(DE + CE)^2.sin60^0.$$

Свойство 1.5 *Отсечката с краища петите на височините към основата на трибедреника е равна на половината от основата му.*

Доказателство: (черт.2.3) Нека с M и N означим петите на височините към основата AB на трибедреника $ABCD$, т.е. $CM \perp AB$ и $DN \perp AB$. Съгласно Свойство 1.1 ъглополовящите на прилежащите ъгли на средното бедро се пресичат в точка O и $AO = l_1$, $BO = l_2$, т.е. $AB = l_1 + l_2$.

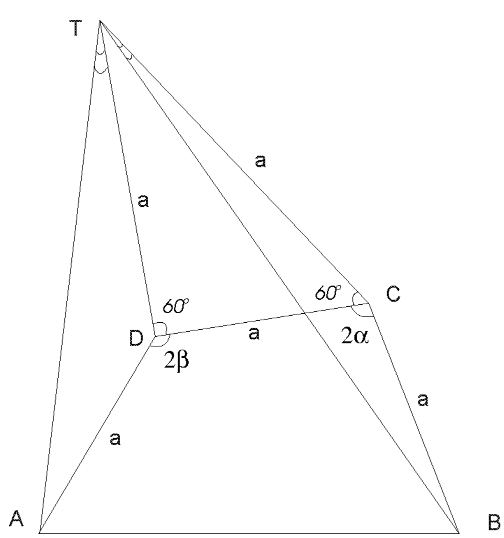


черт.2.3

Разглеждаме $\triangle DNO$ и $\triangle CMO$. Тъй като $\angle DON = \angle COM = 60^0$, то $\angle NDO = \angle MCO = 30^0$. Тогава $NO = \dfrac{1}{2}DO = \dfrac{1}{2}l_2$, $MO = \dfrac{1}{2}CO = \dfrac{1}{2}l_1$ или $MN = \dfrac{1}{2}(l_1 + l_2) = \dfrac{1}{2}AB$.

Свойство 1.6 *Ако $\triangle CDT$, разположен в полуравнината с контур правата на средното бедро на трибедреника $ABCD$ е равностранен, то и $\triangle ABT$ е равностранен също.*

Доказателство: (черт.2.4)



Всеки от триъгълниците $\triangle ADT$ и $\triangle BCT$ е равнобедрен с бедро, равно на бедрото на трибедреника. Освен това

$$\angle ADT = 360^0 - \angle TDC - \angle ADC =$$

$$300^0 - 60^0 - 2\beta = 300^0 - 2\beta,$$

$$\angle BCT = \angle BCD + \angle DCT = 2\alpha + 60^0 =$$

$$240^0 - 2\beta + 60^0 = 300^0 - 2\beta.$$

Следователно $\angle ADT = \angle BCT$ и съгласно първи признак за еднаквост на триъгълниците следва, че $\triangle ADT$ и $\triangle BCT$ са еднакви.

Тогава $AT = BT$ и $\angle ATD = \angle BTC$. Но $\angle ATB = \angle ATD + \angle DTB = \angle BTC + \angle DTB = \angle DTC = 60^0$. Така получихме, че равнобедреният $\triangle ABT$ има ъгъл между бедрата си, равен на 60^0, от където следва, че $\triangle ABT$ е равностранен.

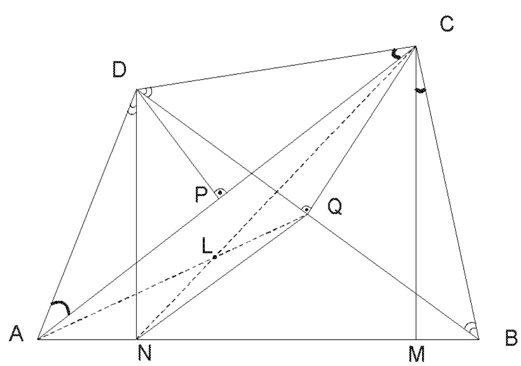
Свойство 1.7 *Лицето на трибедреника е равно на разликата от лицата на равностранните триъгълници със страни съответно равни на основата и бедрото му.*

Доказателство: (черт.2.4) Използвайки доказаното в предходното свойство, че $\triangle ADT$ и $\triangle BCT$ са еднакви , можем да запишем

$$S_{ABCD} = S_{ABCTD} - S_{CDT} = S_{ABTD} + S_{BCT} - S_{CDT} =$$

$$S_{ABTD} + S_{ADT} - S_{CDT} = S_{ABT} - S_{CDT},$$

с което твърдението е доказано.



черт.2.5

1.2.2 Задачи

Задача 1.5 *В трибедреника $ABCD$ са построени височините CM и DN към основата AB като $M, N \in AB$. Нека точките P и Q са средите съответно на диагоналите AC и BD на трибедреника. Да се докаже:*
а) $DN = \frac{1}{2}BD$ *и* $CM = \frac{1}{2}AC$ *;*
б) $\angle ADN = \angle BDC = \angle CBD$ *и* $\angle BCM = \angle ACD = \angle DAC$*;*
в) $CQ = AN$, $DP = BM$ *и* $CQ + DP = \frac{1}{2}AB$.

Решение (черт.2.5) а) Съгласно Свойство 1.3 $\angle CAB = \angle DBA = 30^0$. Тогава от правоъгълните триъгълници BND и CMA и свойството на катета срещу ъгъл, равен на 30^0, веднага следва верността на равенствата в а).

б) Съгласно Свойство 1.1 $\angle BCD = 2\alpha$. Тъй като $CD = BC$, то $\angle CDB = \angle DBC = 90^0 - \alpha$. В същото време от правоъгълния триъгълник AND намираме, че и $\angle ADN = 90^0 - \alpha$. Следователно

$$\angle CDB = \angle DBC = \angle ADN.$$

Тъй като $AD = CD$ и $\angle ADC = 2\beta$, то от $\triangle ACD$ следва $\angle DAC = \angle DCA = 90^0 - \beta$. В същото време от правоъгълния триъгълник BMC намираме, че и $\angle BCM = 90^0 - \beta$. Следователно

$$\angle DCA = \angle DAC = \angle BCM.$$

в) Медианата CQ в равнобедрения триъгълник BDC е и негова височина. Тогава $CQ = CDsin(90^0 - \alpha) = acos\alpha$. От правоъгълния триъгълник AND следва $AN = ADcos\alpha = acos\alpha$. Следователно $CQ = AN$.
С помощта на аналогични съображения се доказва, че $DP = BM = acos\beta$. Тогава съгласно свойство 1.5

$$CQ + DP = AN + BM = AB - MN = AB - \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB\ .$$

Задача 1.6 *Нека точка N е петата на височината , спусната от върха D на трибедреника $ABCD$ към основата му AB и точка Q е средата на диагонала BD. Да се докаже:*
а) $NQ \| AC$ *;*
б) Отсечката CN разделя трибедреника на две равнолицеви части.

Решение. а) Отсечката NQ е медиана на хипотенузата BD на правоъгълния триъгълник BND (черт.2.5). Следователно $QN = BQ = DQ$. Тогава, прилагайки Свойство 1.3, записваме $\angle QNB = \angle QBN = 30^0$ и $\angle CAB = 30^0$. Така установихме, че съответните ъгли CAB и QNB, получени при пресичането на правите AC и NQ с AB са равни. Следователно $NQ \| AC$.

б) Съгласно задачи 1.5 в) и 1.6 а) четириъгълникът $ANQC$ е равнобедрен трапец и ако $AQ \cap NC = L$, то $\triangle ANL$ и $\triangle CQL$ са еднакви и следователно равнолицеви, т.е.

$$S_{ANL} = S_{CQL} \quad .$$

Знаем, че всяка медиана разделя триъгълника на две равнолицеви части. Тъй като AQ и CQ са медиани съответно на $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, то можем да запишем

$$S_{AQD} = S_{AQB} \quad ,$$

$$S_{DQC} = S_{BQC} \quad ,$$

от където след почленно събиране получаваме

$$S_{AQD} + S_{DQC} = S_{AQB} + S_{BQC}$$

или

$$S_{AQCD} = S_{AQCB} \quad ,$$

което може да се запише във вида:

$$S_{ALCD} + S_{LQC} = S_{ANL} + S_{NLQCB} \quad ,$$

$$S_{ALCD} + S_{ANL} = S_{LQC} + S_{NLQCB} \quad ,$$

$$S_{ANCD} = S_{NQC} \quad .$$

Задача 1.7 *Ако точка N е петата на перпендикуляра, спуснат от върха D към основата AB на трибедреника $ABCD$, да се докаже, че сумата от разстоянията на N до бедрата AD и CD е равна на разстоянието ѝ до бедрото BC .*

Решение. Нека N_1, N_2, N_3 са петите на перпендикулярите, спуснати от точка N съответно до бедрата AD, CD, BC. Тогава

$$S_{ANCD} = S_{AND} + S_{CDN} = \frac{1}{2}(AD.NN_1 + CD.NN_2) = \frac{1}{2}a(NN_1 + NN_2) \ ,$$

$$S_{NBC} = \frac{1}{2}BC.NN_3 = \frac{1}{2}a.NN_3 \quad .$$

Като отчетем, че $S_{ANCD} = S_{NBC}$ (зад.1.6 б)) установяваме

$$NN_1 + NN_2 = NN_3.$$

Задача 1.8 *Нека H е произволна точка върху основата AB на трибедреника $ABCD$ и $HG \perp AB$, където $G \in CD$. Да се докаже, че $S_{ABG} = 2S_{CDH}$.*

Решение. Нека $CM \perp AB$, $DN \perp AB$, $M, N \in AB$ и $CK \perp HG$, $DL \perp HG$, $K, L \in HG$ (черт.2.6). Тогава от

$$S_{ABG} = \frac{1}{2}AB.HG = MN.HG \quad ,$$

$$S_{CDH} = S_{CGH} + S_{DGH} = \frac{1}{2}HG.CK + \frac{1}{2}HG.DL \quad ,$$

$$S_{CDH} = \frac{1}{2}HG(CK + DL) = \frac{1}{2}HG.MN$$

следва твърдението $S_{ABG} = 2S_{CDH}$.

Задача 1.9 *Четириъгълникът $ABCD$ е трибедреник с основа AB, а четириъгълникът AB_1CD е успоредник. Да се докаже, че триъгълникът BB_1C е равностранен.*

Задача 1.10 *Височината CM към основата AB на трибедреника $ABCD$ пресича диагонала BD в точка K, а височината DN към основата AB пресича диагонала AC в точка L. Да се докаже, че $KL = CD$.*

Задача 1.11 *Върху продължението на бедрото CD на трибедреника $ABCD$ е взета точка X, така че $XD = CD$. Да се намери големината на $\angle BAX$.*

Задача 1.12 *Върху бедрата AD и BC на трибедреника $ABCD$ или техните продължения са взети съответно точки M и N, така че $MN \perp BC$. Да се докаже, че лицето на $\triangle ADN$ е равно на половината от лицето на $\triangle BCM$.*

Геометрия на фигурите

Част II

2 Вписани, описани, външно описани и оградени четириъгълници

Означения

Нека $ABCD$ е произволен изпъкнал четириъгълник. Да въведем следните означения за:

1. дължините на страните и диагоналите му:

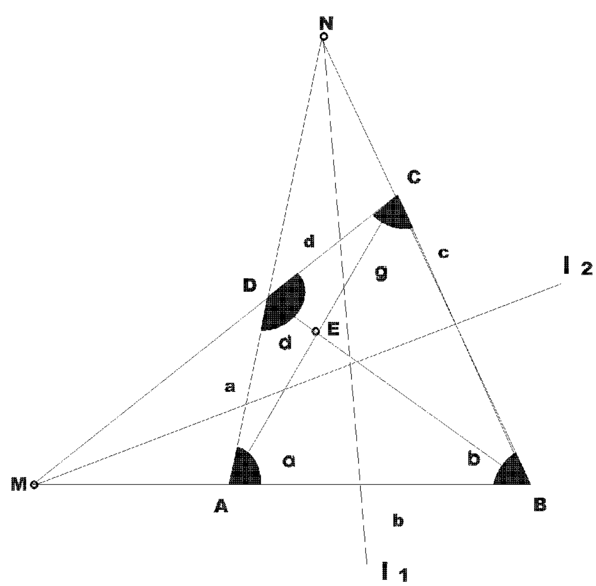
$DA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$; $AC = m$, $BD = n$;

2. мерките на ъглите му:

$\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$, $\angle BCD = \delta$;

Да въведем точките: $M = AB \cap CD$, $N = AD \cap BC$, $E = AC \cap BD$;

Да означим с l_1 и l_2 ъглополовящите съответно на ъглите $\angle BMC$ и $\angle ANB$.



Тези означения ще използваме във всички следващи твърдения и техните доказателства.

2.1 Вписан четириъгълник

2.1.1 Характеристики на вписания четириъгълник

Характеристика 2.1 *Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато сумата на двойка негови срещуположни ъгли е равна на 180^0.*

Характеристика 2.2 *Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато негова страна се вижда под един и същи ъгъл от останалите му два върха.*

Характеристика 2.3 *Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато симетралите на три от страните му се пресичат в една точка.*
Тази точка е центърът на описаната около четириъгълника $ABCD$ окръжност.

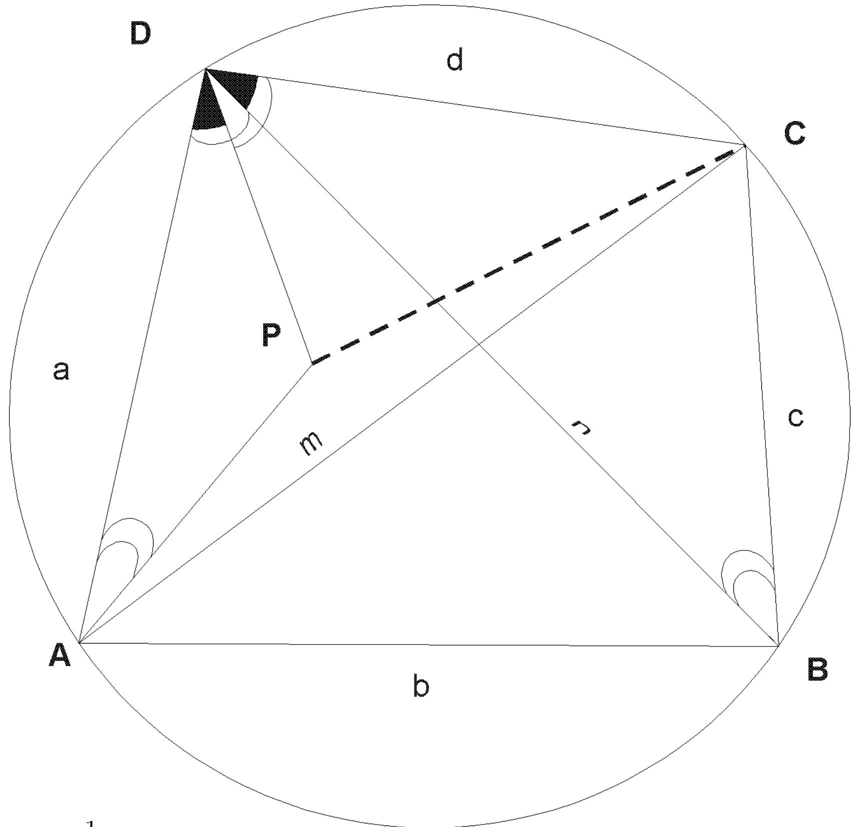
Характеристика 2.4 *Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато $AE.EC = BE.ED$.*

Характеристика 2.5 *Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато $MA.MB = MD.MC$ или*
$NA.ND = NC.NB$.

Лема 2.1 *За произволен четириъгълник $ABCD$ е в сила*
$ac + bd \geq mn$.

Доказателство:
1. Всеки два съседни ъгъла са равни. Следователно всеки от тях е равен на 90^0 и тогава четириъгълник $ABCD$ е правоъгълник. Сега е в сила $a^2 + b^2 = m^2$.
2. Поне два съседни ъгъла не са равни и за определеност да приемем, че $\alpha > \beta$ (черт.1). Тогава съществува вътрешна точка P за четириъгълник $ABCD$, така че $\angle PAD = \angle CBD$, $\angle PDA = \angle BDC$. Тогава $\triangle APD \sim \triangle BCD$ и можем да запишем

$$\frac{a}{n} = \frac{DP}{d} = \frac{AP}{c}. \tag{2.5}$$



черт.1

Но $\angle BDA = \angle BDP + \angle PDA = \angle PDB + \angle BDC = \angle PDC$. Тогава, отчитайки първото равенство на (2.5), установяваме $\triangle ADB \sim \triangle PDC$ и можем да запишем

$$\frac{b}{CP} = \frac{n}{d}. \tag{2.6}$$

Така от (2.5) и (2.6) получаваме $ac+bd = n(AP+CP) \geq nAC = nm$. Равенство се достига, когато $P \in AC$.

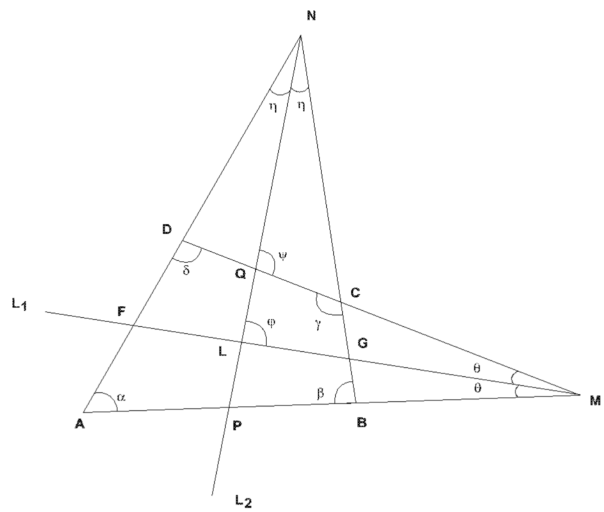
Характеристика 2.6 *Теорема на Птоломей. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато $ac+bd = mn$.*

Доказателство: За да докажем теоремата но Птоломей, ще използваме характеристика 2.2 на вписан четириъгълник и лема 2.1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност $\iff \angle DAC = \angle CBD \iff P \in AC \iff AP + PC = m \iff ac + bd = nm$.

Характеристика 2.7 *Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато ъглополовящите l_1 и l_2 съответно на ъглите $\angle BMC$ и $\angle ANB$ са перпендикулярни.*

Доказателство: (черт.2). Въвеждаме следните точки и ъгли:

черт.2



$l_1 \cap l_2 = L$, $l_1 \cap AD = F$, $l_1 \cap BC = G$, $l_2 \cap AB = P$, $l_2 \cap CD = Q$;
$\angle MLN = \varphi$, $\angle DQN = \psi$, $\angle BMG = \angle CMG = \theta$, $\angle ANP = \angle BNP = \eta$.
Тъй като $\angle CQN = \psi$ е външен за $\triangle MQL$ и $\triangle NQD$, то записваме

$$\begin{aligned} &\varphi = \psi - \theta = \eta + 180^0 - \delta - \frac{1}{2}(180^0 - \alpha - \delta) \\ &\varphi = \frac{1}{2}(180^0 - \alpha - \beta) + 90^0 - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\alpha = 180^0 - \frac{1}{2}(\beta + \delta) \\ &\varphi = 180^0 - \frac{1}{2}(\beta + \delta). \end{aligned} \tag{2.7}$$

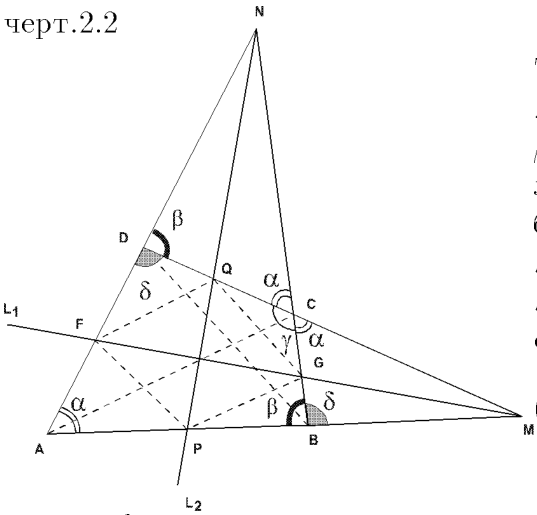
Така получихме $\varphi = 90^0 \iff \beta + \delta = 180^0$. Следователно четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност $\iff \beta + \delta = 180^0 \iff \varphi = 90^0$.

2.1.2 Свойства на вписания четириъгълник

Свойство 2.1 *Ъглополовящите l_1 и l_2 съответно на ъглите $\angle BMC$ и $\angle ANB$ пресичат страните на вписания четириъгълник в точки, които са върхове на ромб, със страни, успоредни на диагоналите на четириъгълника.*

Доказателство: Ще използваме означенията на черт.2.2 Тогава свойство 2.1 твърди, че четириъгълникът $FPGQ$ е ромб. Достатъчно е да докажем, че четириъгълникът $FPGQ$ е успоредник, а от характеристика 2.7 на вписания четириъгълник следва, че диагоналите му са перпендикулярни, т.е. четириъгълникът $FPGQ$ е ромб.

черт.2.2



Тъй като $\angle NCD = \angle MCB = \angle BAD = \alpha$, $\angle NDC = \angle ABC = \beta$, $\angle MBC = \angle ADC = \delta$, то съгласно първи признак за подобие на триъгълници следва, че $\triangle ABN \sim \triangle CDN$ и $\triangle ADM \sim \triangle CBM$. Следователно в сила са следните пропорции:

$$\frac{BN}{DN} = \frac{AN}{CN} \quad \text{и} \quad \frac{DM}{BM} = \frac{AM}{CM} \tag{2.8}$$

Понеже l_1 е ъглополовяща на общия ъгъл на $\triangle ADM$ и $\triangle BCM$, а l_2 е ъглополовяща на общия ъгъл на $\triangle ABN$ и $\triangle CDN$, то в сила са и пропорциите:

$$\begin{aligned} \frac{AF}{DF} = \frac{AM}{DM}\ ,\ \frac{CG}{BG} = \frac{CM}{BM}\ ; \\ \frac{AP}{BP} = \frac{AN}{BN}\ ,\ \frac{CQ}{DQ} = \frac{CN}{DN}\ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

От (2.8) следват

$$\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}\quad ,\quad \frac{AN}{BN} = \frac{CN}{DN}\ . \tag{2.10}$$

Прилагайки синусовата теорема за $\triangle ADM$ и $\triangle ABN$, получаваме

$$\frac{AM}{DM} = \frac{sin\delta}{sin\alpha}\quad ,\ \frac{AN}{BN} = \frac{sin\beta}{sin\alpha} = \frac{sin(180^0 - \delta)}{sin\alpha} = \frac{sin\delta}{sin\alpha}. \tag{2.11}$$

Така от (2.9), (2.10) и (2.11) намираме

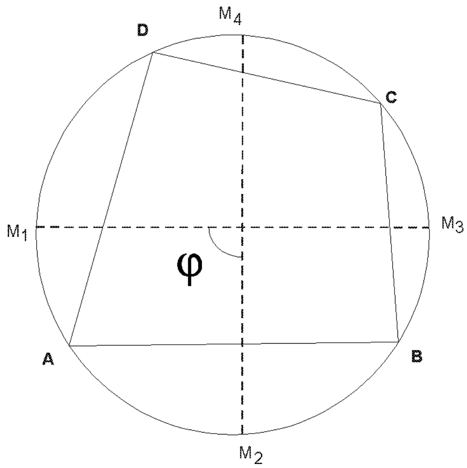
$$\frac{AF}{DF} = \frac{CQ}{DQ} = \frac{CG}{BG} = \frac{AP}{BP}. \tag{2.12}$$

От равенствата (2.12) и теоремата на Талес следват релациите:
$FQ \| AC \| PG$ и $FP \| BD \| GQ$, доказващи, че четириъгълникът $FPGQ$ е успоредник.
Диагоналите на успоредника $FPGQ$ лежат върху ъглополовящите l_1 и l_2. Тъй като четириъгълникът $ABCD$ е вписан, то от Характеристика 2.7 следва $l_1 \perp l_2$, а тогава и успоредникът $FPGQ$ ще бъде ромб.

Свойство 2.2 *Отсечките, съединяващи средите на дъгите, стягани от срещуположните страни на вписания четириъгълник, са перпендикулярни.*

Доказателство:

черт.3



Нека четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжността k и да означим средите на дъгите $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, съответно с M_1, M_2, M_3, M_4 и нека $\angle(M_1M_3, M_2M_4) = \varphi$ (черт.3). Тогава $2\varphi = \overset{\frown}{M_1M_2} + \overset{\frown}{M_3M_4} = \overset{\frown}{M_1A} + \overset{\frown}{AM_2} + \overset{\frown}{M_3C} + \overset{\frown}{CM_4} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}) = \frac{360^\circ}{2}$ или $\varphi = 90^\circ$.

Свойство 2.3 *За всеки вписан четириъгълник $ABCD$ е в сила равенството* $\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$.

Доказателство: Тъй като $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$, то получаваме $absin\alpha + cdsin(180 - \alpha) = bcsin\beta + adsin(180 - \beta)$ или

$$(ab + cd)sin\alpha = (bc + ad)sin\beta. \tag{2.13}$$

Ако с R означим радиуса на окръжността, описана около четириъгълника $ABCD$, то прилагайки синусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, записваме $\frac{AC}{2R} = sin\beta$, $\frac{BD}{2R} = sin\alpha$ или $sin\beta = \frac{m}{2R}$, $sin\alpha = \frac{n}{2R}$. Тогава (2.13) приема вида

$$(ab + cd)\frac{n}{2R} = (bc + ad)\frac{m}{2R}, \tag{2.14}$$

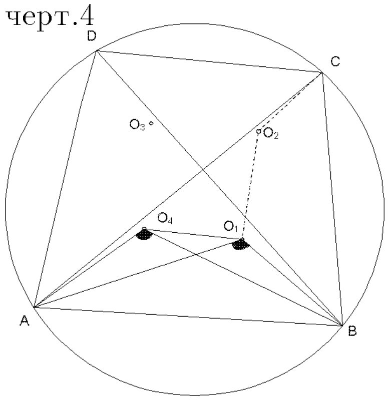
от където следва $\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$.

Свойство 2.4 *Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан, то центровете O_1, O_2, O_3, O_4 на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците ABC, BCD, CDA, DAB са върхове на правоъгълник.*

Доказателство: (черт.4) Понеже центърът на окръжността, вписана в триъгълник е пресечната точка на ъглополовящите на ъглите му, то

$$\angle AO_1B = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}, \quad \angle AO_4B = 90^\circ + \frac{\angle ADB}{2}.$$

черт.4



Но четириъгълникът $ABCD$ е вписан и съгласно характеристика 2.2 $\angle ACB = \angle ADB$. Следователно $\angle AO_1B = \angle AO_4B$, което означава, че четириъгълникът ABO_1O_4 е вписан в окръжност и тогава $\angle BO_1O_4 = 180° - \angle BAO_4 = 180° - \dfrac{\alpha}{2}$ (O_4 е центърът на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност.)

Аналогично се доказва, че $\angle BO_1O_2 = 180° - \dfrac{\gamma}{2}$. Тогава

$$\angle BO_1O_4 + \angle BO_1O_2 = 2.180° - \frac{\alpha+\gamma}{2} = 360° - \frac{180°}{2} = 270°,$$

а
$$\angle O_2O_1O_4 = 360° - (\angle BO_1O_4 + \angle BO_1O_2) = 360° - 270° = 90°.$$

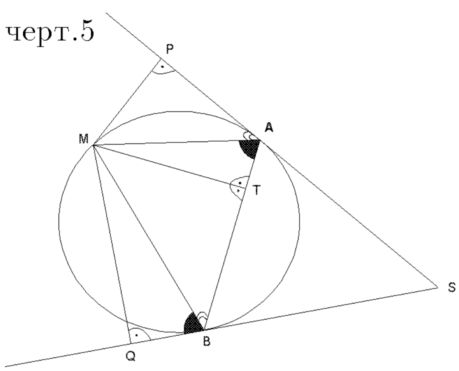
Аналогично се доказва, че и $\angle O_1O_2O_3 = \angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = 90°$. Следователно четириъгълникът $O_1O_2O_3O_4$ е правоъгълник.

Лема 2.2 *Разстоянието от точка на окръжност до нейна хорда е средно геометрично на разстоянията от същата точка до допирателните към окръжността, построени в краищата на хордата.*

Доказателство: Трябва да докажем

$$\frac{MQ}{MT} = \frac{MB}{MA} = \frac{MT}{MP} \quad \text{или} \quad MT^2 = MP.MQ.$$

черт.5



Нека са дадени окръжност k, хорда AB, допирателни към k - AS и BS и точка $M \in k$ (черт.5). Да означим с T, P, Q петите на перпендикулярите, спуснати от точка M съответно към AB, SA, SB. Поради $\angle MBQ = \dfrac{\overset{\frown}{MB}}{2} = \angle MAB$ и

$\angle ABM = \dfrac{\overset{\frown}{MA}}{2} = \angle PAM$ следва $\triangle MBQ \sim \triangle MAT$ и $\triangle MBT \sim \triangle MAP$. Тогава

$$\frac{MQ}{MT} = \frac{MB}{MA} = \frac{MT}{MP} \quad \text{или} \quad MT^2 = MP.MQ.$$

Свойство 2.5 *Теорема на Пап. Ако X е произволна точка от окръжността, описана около четириъгълника $ABCD$, то произведението на разстоянията на точката X до едната двойка срещуположни страни на $ABCD$ е равно на произведението на разстоянията на точката X до другата му двойка срещуположни страни.*

Доказателство: Нека четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжността k и точка $M \in k$. Да означим разстоянията от точка M до правите $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ съответно с d_1, d_2, d_3, d_4, а разстоянията от точка M до допирателните прави във върховете A, B, C, D - съответно с p, q, s, t.
Прилагайки лема (2.2), получаваме

$$d_1{}^2 = pq,\ \ d_3{}^2 = st,\ \ d_2{}^2 = qs,\ \ d_4{}^2 = pt.$$

Следователно
$d_1{}^2.d_3{}^2 = pqst = d_2{}^2.d_4{}^2$, което означава $d_1.d_3 = d_2.d_4$.

2.1.3 Вписан четириъгълник с перпендикулярни диагонали

Лема 2.3 *Четириъгълникът $ABCD$ има перпендикулярни диагонали тогава и само тогава, когато дължините на страните му удовлетворяват равенството $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.*

Доказателство: Нека диагоналите на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точка E.
Необходимост. Нека $AC \perp BD$. Прилагаме питагоровата теорема за триъгълниците DEA, AEB, BEC, CED и записваме :

$$a^2 = AE^2 + DE^2, b^2 = AE^2 + BE^2,$$
$$c^2 = BE^2 + CE^2,\ d^2 = CE^2 + DE^2,$$

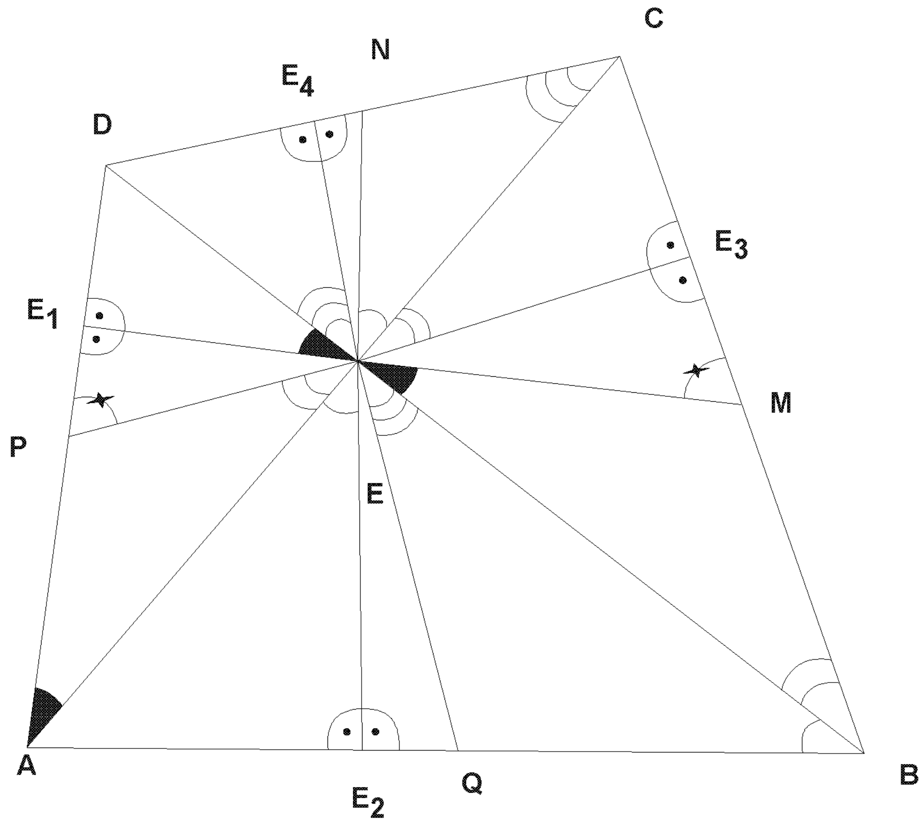
от където веднага следва $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2$.
Достатъчност. Нека за четириъгълника $ABCD$ е в сила равенството $a^2+c^2 = b^2 + d^2$. Да допуснем, че диагоналите AC и BD не са перпендикулярни. Нека $\angle DEA = \angle BEC < 90°$. Тогава $\angle BEA = \angle DEC > 90°$ и можем да запишем $a^2+c^2 < (AE^2+DE^2)+(CE^2+BE^2) = (AE^2+BE^2)+(CE^2+DE^2) < b^2+d^2$. Така полученото неравенство противоречи на зададеното условие $a^2+c^2 = b^2+d^2$. Следователно допускането не е вярно и тогава остава $AC \perp BD$.

Лема 2.4 *Ако четириъгълникът $ABCD$ има перпендикулярни диагонали и от пресечната им точка E са спуснати перпендикуляри към страните му, то продълженията им пресичат срещуположните им страни в точки, които са върхове на правоъгълник.*

Доказателство: Нека петите на перпендикулярите, спуснати от точка E към страните DA, AB, BC, CD са съответно E_1, E_2, E_3, E_4 и нека приемем още означенията :

$$EE_1 \cap BC = M,\ EE_1 \cap CD = N,\ EE_1 \cap DA = P,\ EE_1 \cap AB = Q$$

.



черт.6

Като се вземе предвид - ъглите с взаимно перпендикулярни рамене са равни , връхните ъгли са равни, сумата на острите ъгли в правоъгълния триъгълник е 90° - лесно се съобразява подобието на следните двойки триъгълници

(2.15)

$$APE \sim EMB \Rightarrow \ \frac{AP}{EM} = \frac{PE}{MB} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \ AP = \frac{AE.ME}{BE},\ BM = \frac{BE.PE}{AE};$$

$$BQE \sim ENC \Rightarrow \ \frac{BQ}{EN} = \frac{QE}{NC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \ BQ = \frac{BE.NE}{CE},\ CN = \frac{CE.QE}{BE};$$

$$DPE \sim EMC \Rightarrow \ \frac{DP}{EM} = \frac{PE}{MC} = \frac{DE}{EC} \Rightarrow \ DP = \frac{DE.ME}{CE},\ CM = \frac{CE.PE}{DE};$$

$$AQE \sim END \Rightarrow \ \frac{AQ}{EN} = \frac{QE}{ND} = \frac{AE}{ED} \Rightarrow \ AQ = \frac{AE.NE}{DE},\ DN = \frac{DE.QE}{AE};$$

Сега лесно се съобразява

$$\frac{AP}{DP} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{CM}{BM} = \frac{CN}{DN} = \frac{AE.CE}{BE.DE} \qquad (2.16)$$

От последните релации следва $PQ \| MN \| BD,\ QM \| NP \| AC$, поради което заключаваме, че четириъгълникът $MNPQ$ е успоредник. Но тъй като $AC \perp BD$, то и $PQ \perp QM$ или успоредникът $MNPQ$ е правоъгълник.

Характеристика 2.8 *Четириъгълникът $ABCD$ с перпендикулярни диагонали е вписан в окръжност, тогава и само тогава, когато продълженията на перпендикулярите от точка $E = AC \cap BD$ към страните му пресичат срещулежащите им страни в средите им.*

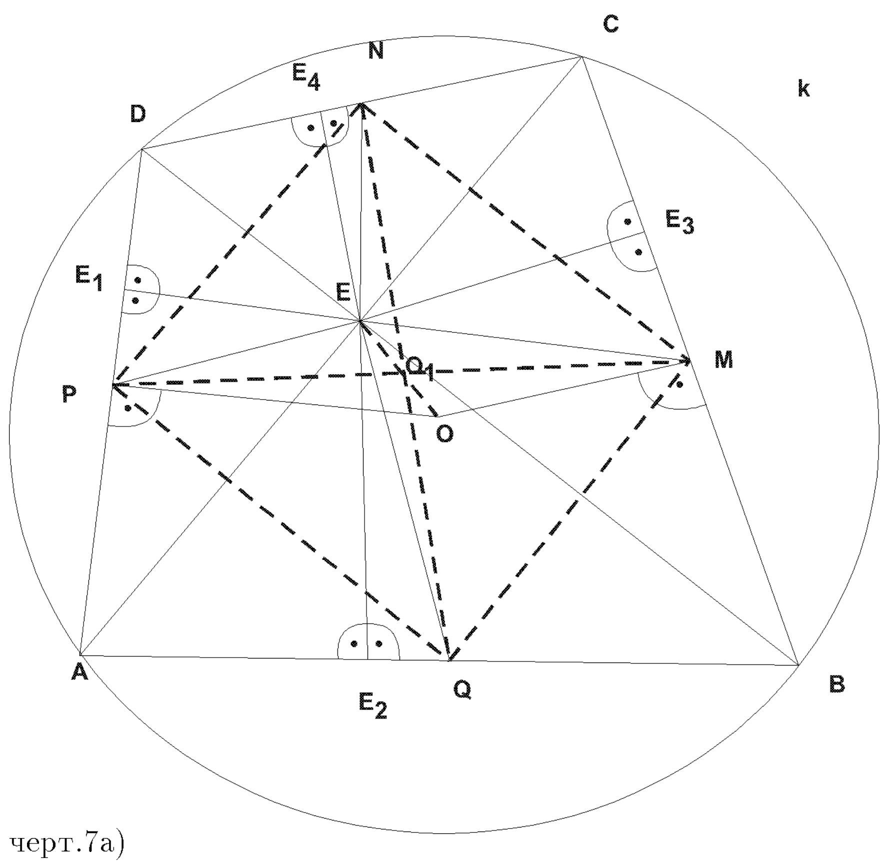
Доказателство: Ще приложим характеристика (2.4) за вписан четириъгълник и равенствата (2.16).

$ABCD$ е вписан $\iff AE.CE = BE.DE \iff \dfrac{AE.CE}{BE.DE} = 1 \iff \dfrac{AP}{DP} = \dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{CN}{DN} = 1 \iff$

$$AP = PD,\ AQ = BQ,\ BM = CM,\ CN = DN.$$

Теорема 2.1 *Нека четириъгълникът $ABCD$ с перпендикулярни диагонали е вписан в окръжност $k(O,R)$. Да се докаже, че средите на страните на $ABCD$ и петите на перпендикулярите, спуснати от точка $E = AC \cap BD$ към страните му, лежат на окръжност с център средата на отсечката OE и радиус $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OE^2}$.*

Доказателство: Нека четириъгълникът $ABCD$ с перпендикулярни диагонали е вписан в окръжност $k(O,R)$ черт.7а).

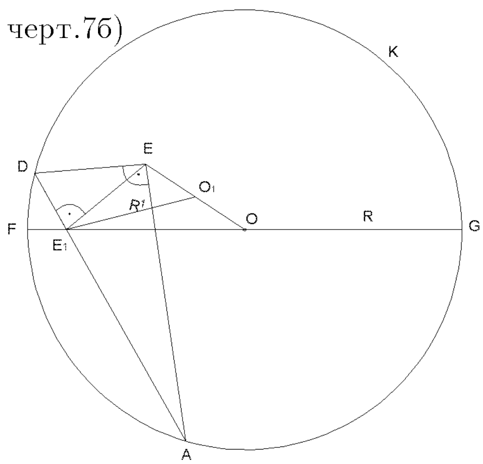


черт.7а)

Съгласно лема (2.4) и характеристика 2.8 средите на страните му са върхове на правоъгълник - или в параметрите на означенията на черт.6 както и на черт.7а) $MNPQ$ е правоъгълник. Около този правоъгълник може да се опише окръжност k_1 с център $O_1 = MP \cap NQ$ и радиус $R_1 = O_1M$. Тъй като $\angle ME_1P = \angle ME_3P = 90°$, то следва, че точките $E_1, E_3 \in k_1(d = MP)$. Аналогично се доказва, че $E_2, E_4 \in k_1(d = NQ)$.
Като отчетем, че O е пресечната точка на симетралите на страните на четириъгълника $ABCD$ и дефиниционното задаване на точките M, N, P, Q, заключаваме - $MOPE$ е успоредник. Следователно диагоналите му имат обща среда, т.е. средата O_1 на MP е среда и на EO.

Нека сега $OE_1 \cap k = \{F, G\}, (OF = OG = R)$(черт.7б)). Вече знаем $O_1E_1 = R_1$ и O_1E_1 е медиана в $\triangle OEE_1$. Следователно

черт.7б)

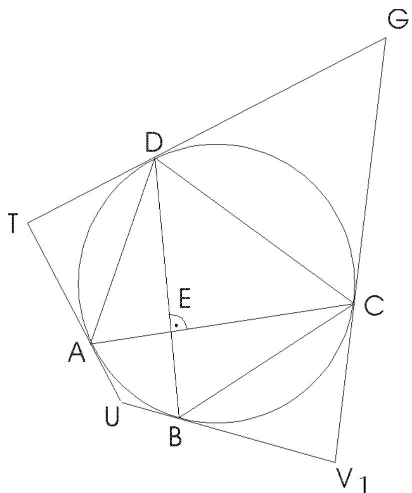


$4E_1O_1{}^2 = 2(OE_1{}^2 + EE_1{}^2) - OE^2$. Но EE_1 е височина в правоъгълния $\triangle ADE$ и тогава записваме
$EE_1{}^2 = AE_1.DE_1 = FE_1.GE_1 = (R - OE_1)(R + OE_1)$, използвайки свойството на вътрешната точка E_1 за окръжността k. Така получихме

$$4R_1{}^2 = 2(OE_1{}^2 + R^2 - OE_1{}^2) - OE^2 \Longrightarrow 4R_1{}^2 = 2R^2 - OE^2 \Longrightarrow$$
$$R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OE^2}.$$

Теорема 2.2 *Ако четириъгълникът $ABCD$ с перпендикулярни диагонали е вписан в окръжност k, то пресечните точки на допирателните към k, прекарани през върховете му, лежат на една окръжност.*

Доказателство: Нека допирателните във върховете на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точките G, T, U, V както е отбелязано на черт.8.



черт.8

Тогава

$$\angle TUV + \angle TGV = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADB} - \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DAC} - \overset{\frown}{CD}) =$$

(2.17) $$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DC}) =$$

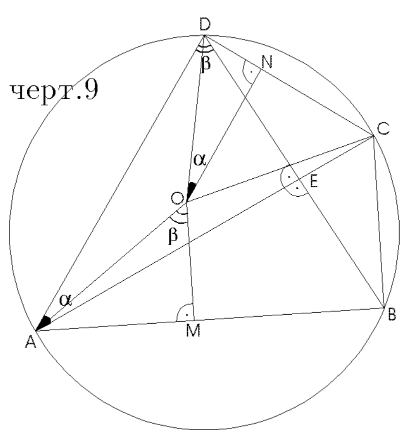
$$\frac{2(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD})}{2} = 2\angle BEC = 2.90^\circ = 180^\circ.$$

Съгласно последния резултат и характеристика 2.1 следва, че четириъгълникът $GTUV$ е вписан.

Теорема 2.3 *Ако четириъгълникът $ABCD$ с перпендикулярни диагонали е вписан в окръжност $k(O, R)$, то разстоянието от точка O до коя да е страна на $ABCD$ е равно на половината от дължината на срещулежащата ѝ страна.*

Доказателство: Да построим $OM \perp AB$ и $ON \perp CD$ (черт.9). От свойството на хордите и перпендикулярните им диаметри следва $AM = MB,\ \ CN = ND$.

черт.9



Нека $\angle DOC = \overset{\frown}{DC} = 2\angle DAC = 2\alpha$, $\angle AOB = \overset{\frown}{AB} = 2\angle ADB = 2\beta$. От $\triangle AED \Longrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$ (по условие $AE \perp DE$). Като отчетем и $OA = OD = R$ лесно съобразяваме еднаквостта на $\triangle AMO$ и $\triangle OND$, от където следват:

$$OM = DN = \frac{CD}{2},\ \ ON = AM = \frac{AB}{2}.$$

2.2 Описан четириъгълник

2.2.1 Характеристики на описания четириъгълник

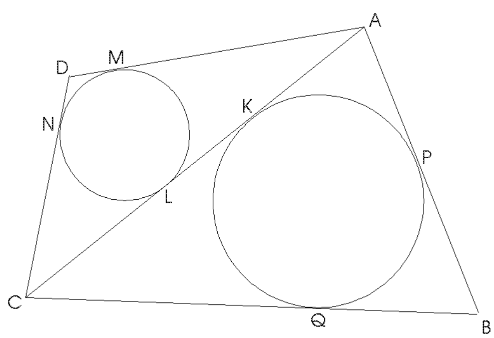
Характеристика 2.9 *Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност, тогава и само тогава, когато ъглополовящите на три негови вътрешни ъгъла се пресичат в една точка.*

Пресечната точка на ъглополовящите на неговите вътрешни ъгли е център на окръжността, вписана в четириъгълника $ABCD$.

Характеристика 2.10 *Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност, тогава и само тогава, когато $AB + CD = AD + BC$.*

Характеристика 2.11 *Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност, тогава и само тогава, когато окръжностите, вписани в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ се допират.*

Доказателство: Нека k_1 и k_2 са окръжностите, вписани съответно в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. Нека още K, P, Q и L, M, N са допирните точки на k_1 и k_2 със страните съответно на $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. (черт.10) При тези означения, прилагайки свойството за равенство на допирателните към окръжност от външна за нея, можем да запишем



черт.10

(2.18)

$$
\begin{aligned}
KL &= AL - AK = AM - AP \ , \\
KL &= CK - CL = CQ - CN \ , \\
2KL &= AM - CN + CQ - AP \ , \\
2KL &= (AM + MD) - (DN + NC) + (CQ + QB) - (BP + AP) \ , \\
KL &= \frac{(AD + BC) - (AB + CD)}{2} \ .
\end{aligned}
$$

От последното равенство и характеристика 2.10 следва:

$ABCD$ е описан $\iff AD + BC = AB + CD \iff KL = 0 \iff K = L$, което означава, че окръжностите k_1 и k_2 се допират като общата им допирателна е AC.

Характеристика 2.12 *Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност, тогава и само тогава, когато радиусите R_1, R_2, R_3, R_4 на окръжностите, описани съответно около триъгълниците ABE,*
BCE, CDE, DAE удовлетворяват условието $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

Доказателство: Нека означим $\angle BEA = \varphi$. Тогава синусовата теорема, приложена за триъгълниците ABE, BCE, CDE, DAE, дава следните резултати:

$$
\begin{aligned}
&AB = 2R_1 sin\varphi\ , \quad BC = 2R_2 sin(180^\circ - \varphi) = 2R_1 sin\varphi\ ,\\
&CD = 2R_3 sin\varphi\ , \quad DA = 2R_4 sin(180^\circ - \varphi) = 2R_4 sin\varphi\ .
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Тогава съгласно (2.19) и характеристика 2.10

$ABCD$ е описан $\iff AB + CD = BC + AD \iff R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

2.2.2 Свойства на описания четириъгълник

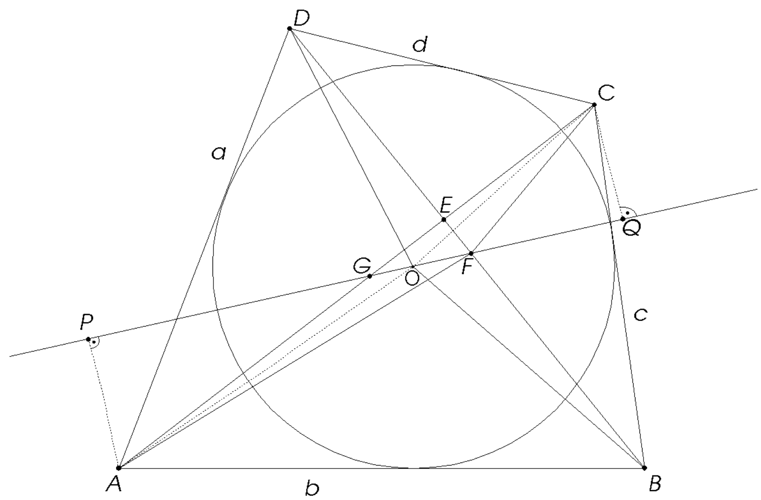
Свойство 2.6 *Теорема на Нютон. Средите на диагоналите на описания около окръжност четириъгълник и центърът на тази окръжност са колинеарни точки.*

Доказателство: Нека четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност $k(O, R)$ и F е средата на диагонала BD. Означаваме: $OF \cap AC = G$, $a+b+c+d = 2p$, $S_{ABCD} = S$ (черт.11).
Достатъчно е да докажем, че G е среда на диагонала AC.

За описания четириъгълник $ABCD$ е в сила $a + c = b + d$, от където следва $p = a + c = b + d$. Освен това $S = pR$.

Тъй като CF и AF са медиани съответно в $\triangle BCD$ и $\triangle ABD$, то
$S_{\triangle BCF} = S_{\triangle CDF}$ и $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ADF}$. Тогава можем да запишем:

$$
S_{\triangle ADF} + S_{\triangle BCF} - S_{\triangle ADO} - S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2}S - \frac{R}{2}(a+c) = 0.
\tag{2.20}
$$



черт.11

Следователно

(2.21)
$$\begin{gathered} S_{\triangle ADF} - S_{\triangle ADO} = S_{\triangle BCO} - S_{\triangle BCF} \\ \text{и тогава} \\ S_{\triangle AOF} + S_{\triangle DOF} = S_{\triangle BOF} + S_{\triangle COF} \ , \\ S_{\triangle AOF} = S_{\triangle COF} \ , \end{gathered}$$

или

$$\frac{1}{2} OF.AP = \frac{1}{2} OF.CQ \quad , \quad \text{където} \quad AP \perp OF \ , CQ \perp OF \ , \quad \text{т.е.} AP = CQ.$$

С помощта на последния резултат лесно се доказва еднаквостта на правоъгълните триъгълници APG и CQG, от където следва $AG = CG$.

Свойство 2.7 *Диагоналите на описания четириъгълник и отсечките, съединяващи допирните точки на срещулежащите му страни с вписаната окръжност, се пресичат в една точка.*

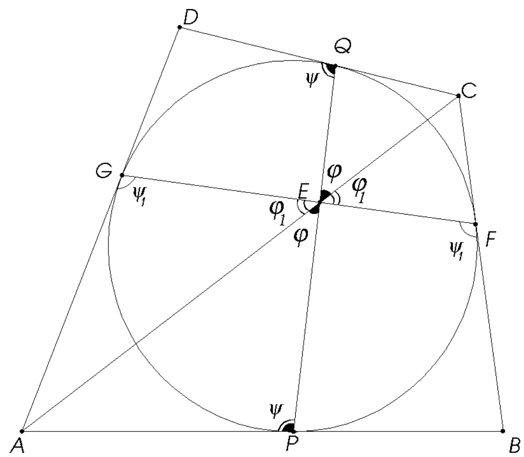
Доказателство: Нека окръжността k допира страните AB, BC, CD, DA на описания четириъгълник $ABCD$ съответно в точките P, L, Q, K (черт.12). Нека $AC \cap PQ = E$. Да означим връхните ъгли $\angle AEP = \angle CEQ = \varphi$ и периферните ъгли $\angle APE = \angle EQD = \psi$. Тъй като

(2.22)
$$2S_{AEP} = AE.PE sin\varphi = AP.EP sin\psi$$

$$2S_{CEQ} = CE.QE sin\varphi = CQ.EQ sin(180^\circ - \psi) = CQ.EQ sin\psi \ ,$$

то

(2.23)
$$\frac{S_{AEP}}{S_{CEQ}} = \frac{AE.PE}{CE.QE} = \frac{AP.EP}{CQ.EQ}$$



черт.12

от където следва

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AP}{CQ} \tag{2.24}$$

Нека $AC \cap KL = F$. Означаваме връхните ъгли $\angle AFK = \angle CFL = \varphi_1$ и периферните ъгли $\angle AKL = \angle BLK = \psi_1$. Тъй като

(2.25)

$$2S_{AEK} = AF.KFsin\varphi_1 = AK.FKsin\psi_1$$

$$2S_{CFL} = CF.LFsin\varphi_1 = CL.FLsin(180^\circ - \psi_1) = CL.FLsin\psi_1 \ ,$$

то

$$\frac{S_{AEK}}{S_{CFL}} = \frac{AF.KF}{CF.LF} = \frac{AK.FK}{CL.FL} \tag{2.26}$$

от където следва

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AK}{CL} \tag{2.27}$$

Поради $AK = AP,\ CL = CQ$, от (2.24) и (2.27) следва

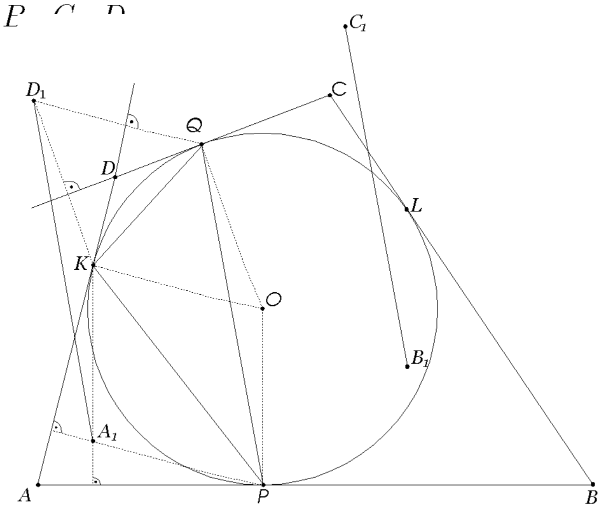
$$\frac{AF}{CF} = \frac{AE}{CE},$$

което означава $F = E$. Така доказахме $AC \cap KL \cap PQ = E$.

Аналогично се доказва, че и $BD \cap KL \cap PQ = E_1$. Очевидно
$E = KL \cap PQ = E_1$ или $AC \cap BD \cap KL \cap PQ = E$.

Свойство 2.8 *Всеки връх на описан четириъгълник и допирните точки на страните, минаващи през този връх, с вписаната окръжност образуват триъгълник. Да се докаже, че ортоцентровете на тези четири триъгълника, свързани с описания четириъгълник, са върхове на успоредник със страни, успоредни на отсечките, които съединяват допирните точки на срещуположните страни на четириъгълника с вписаната окръжност.*

Доказателство: Нека окръжността k допира страните AB, BC, CD, DA на описания четириъгълник $ABCD$ съответно в точките P, L, Q, K (черт.13). Да означим ортоцентровете на $\triangle AKP$, $\triangle BPL$, $\triangle CLQ$, $\triangle DQK$ съответно с A_1, B_1, C_1, D_1.



черт.13

От $OP \perp AB$ и $KA_1 \perp AB \Longrightarrow OP \| KA_1$.
От $OK \perp AD, PA_1 \perp AD$ и $QD_1 \perp AD \Longrightarrow PA_1 \| OK \| QD_1$.
Следователно : OPA_1K и OKD_1Q са успоредници и тогава $PA_1 = KO = QD_1$. Така получихме $PA_1 \| QD_1$ и $PA_1 = QD_1$, от където следва, че PA_1D_1Q е успоредник и тогава

$$A_1D_1 \| PQ \text{ и } A_1D_1 = PQ.$$

След аналогични разсъждения получаваме PB_1C_1Q е успоредник и следователно

$$B_1C_1 \| PQ \text{ и } B_1C_1 = PQ.$$

Така стигнахме до

$$B_1C_1 \| A_1D_1 \text{ и } B_1C_1 = A_1D_1,$$

което означава, че $A_1B_1C_1D_1$ е успоредник.

2.2.3 Описан четириъгълник с перпендикулярни диагонали

Теорема 2.4 *Ако за произволен четириъгълник $ABCD$ са в сила две от следните три условия:*

1. *Четириъгълник $ABCD$ има перпендикулярни диагонали;*
2. *Четириъгълник $ABCD$ е описан;*
3. *Страните на четириъгълника $ABCD$ удовлетворяват условието $ac = bd$,*

то в сила е и третото условие.

Доказателство: Тъй като условието 1. е еквивалентно на условието $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, а условието 2. е еквивалентно на условието $a + c = b + d$, то теоремата приема вида

Ако за страните на произволен четириъгълник $ABCD$ са в сила две от следните три условия:

1. $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$;
2. $a + c = b + d$;
3. $ac = bd$,

то в сила е и третото условие.

Сега доказателството се провежда леко само с подходящо прилагане на формулата $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$.

2.3 Външно описан четириъгълник

2.3.1 Определение и характеристики на външно описания четириъгълник

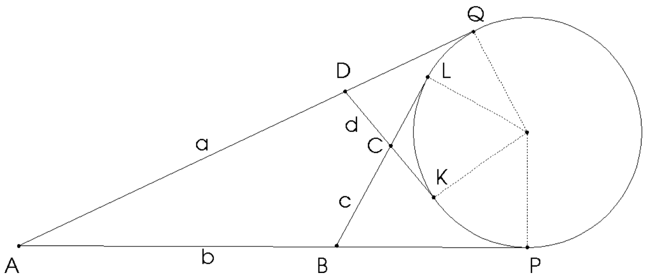
Определение 2.1 *Четириъгълник, продълженията на страните на който се допират до една окръжност, се нарича външно описан за тази окръжност, а окръжността се нарича външно вписана в четириъгълника.*

Характеристика 2.13 *Четириъгълникът $ABCD$ е външно описан тогава и само тогава, когато ъглополовящите на един негов вътрешен ъгъл и на двата външни ъгли на несъседните нему вътрешни ъгли, се пресичат в една точка.*

Общата точка на споменатите по-горе ъглополовящи е центърът на външно вписаната окръжност за четириъгълникът $ABCD$.

Характеристика 2.14 *Четириъгълникът $ABCD$ е външно описан тогава и само тогава, когато сумата на една двойка съседни страни е равна на сумата на другата двойка съседни страни.*

Доказателство: Необходимост. Нека четириъгълникът $ABCD$ е външно описан за окръжността k и допирните точки на k с продълженията на страните AB, BC, CD, DA са съответно P, L, K, Q (черт.14).



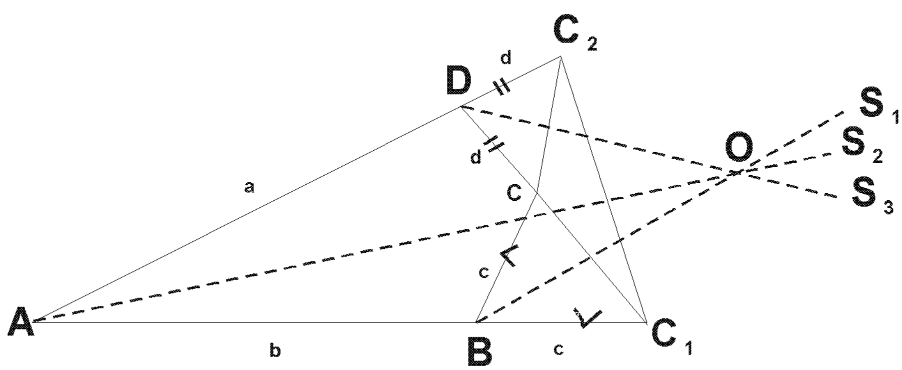
черт.14

Прилагаме няколко пъти свойството на допирателните от външна точка да са равни и записваме

$$\begin{aligned}
&AP = AB + BP = b + BL = b + BC + CL = b + c + CL\ ,\\
&AQ = AD + DQ = a + DK = a + DC + CK = a + d + CK\ ,\\
&\text{но}\ \ AP = AQ\ \ \text{и}\ \ CL = CK\ \Longrightarrow b + c = a + d.
\end{aligned}$$

Достатъчност. Нека дължините на страните на четириъгълника $ABCD$ удовлетворяват равенството $b + c = a + d$. Да въведем точките $C_1 \in AB$ и $C_2 \in AD$, така че $BC_1 = BC = c$ и $DC_2 = DC = d$. (черт.15).

Тогава $AC_1 = b + c = a + d = AC_2$ и триъгълниците C_1C_2A, C_1C_2B, C_1C_2D, са равнобедрени. Следователно симетралите s_1, s_2, s_3, съответно на отсечките CC_1, CC_2, C_1C_2 са и ъглополовящи на ъглите $\angle CBC_1$, $\angle CDC_2$, $\angle C_1AC_2$. Но в същото време $s_1 \cap s_2 \cap s_3 = O$, защото са симетрали на страните на $\triangle CC_1C_2$.



черт.15

Прилагаме характеристика 2.13 и заключаваме, че четириъгълникът $ABCD$ е външно описан за окръжността k с център точка O и радиус, равен на разстоянието от O до продълженията на страните на $ABCD$.

2.3.2 Свойство на външно описания четириъгълник

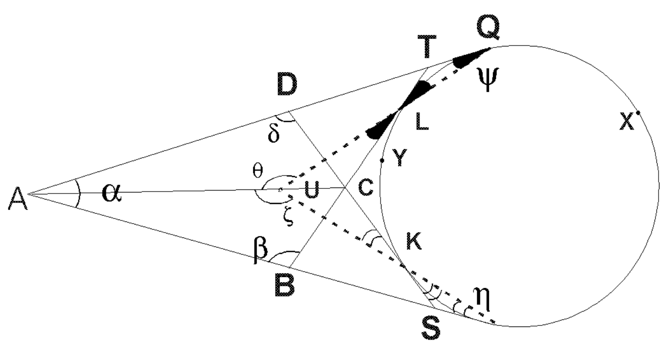
Свойство 2.9 *Диагоналите на външно описания четириъгълник и правите, съединяващи допирните точки на срещулежащите му страни с външно вписаната окръжност, се пресичат в една точка.*

Доказателство: Нека $AB \cap CD = S,\ BC \cap AD = T$,
$AC \cap QL = U,\ \angle AUQ = \theta$ (черт.16). Тогава
$\angle TQL = \angle TLQ = \angle ULC = \psi$ и

$$(2.28)\qquad \begin{aligned} 2S_{AUQ} &= AQ.UQ sin\psi = AU.QU sin\theta\ , \\ 2S_{CUL} &= CL.UL sin\psi = CU.LU sin(180^\circ - \theta)\ . \end{aligned}$$

Следователно

$$(2.29)\qquad \frac{S_{AUQ}}{S_{CUL}} = \frac{AQ.UQ}{CL.UL} = \frac{AU.QU}{CU.LU} \text{ или } \frac{AQ}{CL} = \frac{AU}{CU}\ .$$



черт.16

Нека $AC \cap KP = U_1,\ \angle AU_1P = \zeta$. Тогава
$\angle SPK = \angle SKP = \angle U_1KC = \eta$ и

$$(2.30)\qquad \begin{aligned} 2S_{AU_1P} &= AP.U_1P sin\eta = AU_1.PU_1\ sin\zeta\ , \\ 2S_{CU_1K} &= CK.U_1K sin\eta = CU_1.KU_1\ sin(180^\circ - \zeta)\ . \end{aligned}$$

Следователно

$$(2.31)\qquad \frac{S_{AU_1P}}{S_{CU_1K}} = \frac{AP.U_1P}{CK.U_1K} = \frac{AU_1.PU_1}{CU_1.KU_1} \text{ или } \frac{AP}{CK} = \frac{AU_1}{CU_1}\ .$$

Като отчетем, че $AP = AQ$ и $CL = CK$ от (2.29) (2.31) следва
$\dfrac{AU}{CU} = \dfrac{AU_1}{CU_1}$, което означава, че точките U и U_1 разделят отсечката AC в едно и също отношение , т.е. точките U и U_1 съвпадат и можем да запишем $AC \cap QL \cap PK = U$.

Повтаряме разглежданията за диагонала BD и правите QL и PK. След аналогични на горните разсъждения, заключаваме $BD \cap QL \cap PK = V$.

Като сравним двата резултата получаваме $U = V = E$ или $AC \cap BD \cap QL \cap PK = E$.

2.4 Ограден четириъгълник

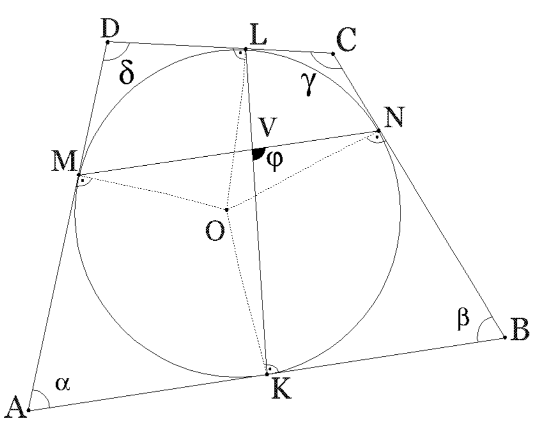
Определение и характеристики на оградения четириъгълник

Определение 2.2 *Четириъгълник, който едновременно е вписан и описан, се нарича ограден четириъгълник от първи род.*

Определение 2.3 *Четириъгълник, който едновременно е вписан и външно описан, се нарича ограден четириъгълник от втори род.*

Характеристика 2.15 *Описаният четириъгълник $ABCD$ е ограден от първи род, тогава и само тогава, когато отсечките, съединяващи допирните точки на вписаната окръжност с двойките срещуположни страни, са перпендикулярни.*

Доказателство: Нека $ABCD$ е описан четириъгълник и допирните точки на вписаната в него окръжност $k(O)$ със страните му са M, K, N, L (черт.17), а $\angle MVL = \varphi$. Като се използват представянията на вътрешните и централните ъгли, записваме



$\varphi = \frac{1}{2}(\widehat{ML} + \widehat{KN}) = \frac{1}{2}(\angle MOL + \angle KON) = \frac{1}{2}(180^\circ - \delta + 180^\circ - \beta) = 180^\circ - \dfrac{\beta + \delta}{2}$.

Така получихме: Описаният четириъгълник $ABCD$ е вписан $\iff \beta + \delta = 180^\circ \iff \varphi = 90^\circ$.

Характеристика 2.16 *Външно описаният четириъгълник $ABCD$ е ограден от втори род, тогава и само тогава, когато правите, съединяващи допирните точки на външно вписаната окръжност с двойките срещуположни страни са перпендикулярни.*

Доказателство: Нека $ABCD$ е външно описан четириъгълник и допирните точки на вписаната в него окръжност k с продълженията на страните му са P, Q, K, L (черт.16), а $\angle PEQ = \varphi$ (съгласно свойство 2.9 точка $AC \cap BD = E = U$). Като се използват представянията на външните и периферните ъгли, записваме

$$\varphi = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{QXP} - \overset{\frown}{LYK}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{QXP} - \overset{\frown}{LYK} + \overset{\frown}{QL} - \overset{\frown}{QL} + \overset{\frown}{PK} - \overset{\frown}{PK})$$
$$\varphi = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{QXP} - \overset{\frown}{QYP}) + \frac{1}{2}\overset{\frown}{QL} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{PK}$$
$$\varphi = \alpha + \frac{1}{2}\overset{\frown}{QL} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{PK} = \alpha + \angle TQL + \angle KPS = \alpha + \psi + \eta \ .$$

$\angle QTL$ е външен за $\triangle ABT$ и $\angle PSD$ е външен за $\triangle ASD$,
а $\triangle LQT$ и $\triangle KPS$ са равнобедрени, поради което

$$\angle TQL = \psi = \frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{QL}$$
$$\angle KPS = \eta = \frac{180^\circ - (\alpha + \delta)}{2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PK}.$$

Така получихме:

$$\varphi = \alpha + \frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{2} + \frac{180^\circ - (\alpha + \delta)}{2} = 180^\circ - \frac{\beta + \delta}{2}.$$

Следователно :
Външно описаният четириъгълник $ABCD$ е вписан
$\iff \beta + \delta = 180^\circ \iff \varphi = 90^\circ$.

2.5 Задачи

Задача 2.1 *Даден е равностранен* $\triangle ABC$ *и произволна точка* D *върху страната* AC. *Нека точка* K *е средата на отсечката* AD, *правата* l *минава през точка* D *и е перпендикулярна на правата* AB, *правата* m *минава през точка* C *и е перпендикулярна на правата* BC *и* $l \cap m = E$.
Да се определят ъглите на $\triangle BKE$.

Задача 2.2 *Две окръжностите* $k_1(O_1)$ *и* $k_2(O_2)$ *се пресичат в точките* A *и* B. *Ако* $O_1A \cap k_2 = L_2$, $O_2A \cap k_1 = L_1$, *да се докаже, че точките* O_1, O_2, L_1, L_2, B *лежат на една окръжност.*

Задача 2.3 *Триъгълникът* ABC *е тъпоъгълен* ($\angle ACB > 90^0$). *Точките* $P, Q \in AB$, $M \in AC$, $N \in BC$ *удовлетворяват условията:* $AP = AC, BQ = BC, AQ = AM, BP = BN$. *Да се докаже, че точките* P, Q, M, N, C *лежат на една окръжност.*

Задача 2.4 *В триъгълника* $ABC, \angle ABC = 50^0, \angle ACB = 70^0$. *Намерете ъглите на триъгълника* IHC , *където* H *е ортоцентърът на* $\triangle ABC$, *а* I *е центърът на вписаната в* $\triangle ABC$ *окръжност.*

Задача 2.5 *В окръжност с радиус* $2\sqrt{7}$ *е вписан трапец* $ABCD$ *като основата* AD *е диаметър, а* $\angle BAD = 60^0$. *Хордата* CE *пресича* AD *в точка* P, *така че* $AP : PD = 1 : 3$. *Намерете лицето на* $\triangle BPE$.

Задача 2.6 *Нека окръжност* $k(O, R)$ *е описана около трапец, като височината му се дели от точката* O *в отношение* $m : n$. *Намерете лицето на трапеца, ако височината и средната му основа са равни.*

Задача 2.7 *В равнобедрения трапец* $ABCD(AB \| CD, AB > CD)$ *е вписана окръжност, която се допира до страните* AB, BC, CD, DA *съответно в точките* K, L, M, N. *Отношението на лицата на четириъгълника* $KLMN$ *към лицето на трапеца* $ABCD$ *е равно на* $\frac{3}{8}$.
а) Да се намери мярката на $\angle BAD$.
б) Нека O_1 *и* O_2 *са центровете на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците* ABC *и* ACD. *Да се намери дължината на отсечката* O_1O_2, *ако* $BC = 2$. *(СУ-1996)*

Задача 2.8 *Четириъгълникът* $ABCD$ *със страна* $AB = 25$, *диагонал* $BD = 24$ *е вписан в окръжност с център точка* O *и диаметър страната* AB. *Лицето на триъгълника* BCD *е равно на 108;*
а) Да се намерят дължините на страните AD, BC, CD *и диагонала* AC.
б) Да се докаже, че диагоналът AC *е ъглополовяща на* $\angle BAD$ *и правата* CO *е перпендикулярна на* BD. *(ПУ-2001)*

Задача 2.9 *Трапец с остър ъгъл* φ *е ограден от първи род. Радиусите на описаната и вписаната окръжности са съответно* R *и* r.
а) Да се докаже, че $\dfrac{R}{r} = \dfrac{\sqrt{sin^2\varphi + 1}}{sin^2\varphi} > \sqrt{2}$;
б) Да се намери ъгълът φ, *когато* $\dfrac{R}{r} = \sqrt{6}$;
в) Нека φ_o *е този остър ъгъл, за който* $cos\varphi_o = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Да се докаже, че при* $\varphi < \varphi_o$, *центърът на описаната окръжност е вън от трапеца. (УАСГ-2004)*

Задача 2.10 *Даден е успоредник* $ABCD$ *с диагонали* $AC = 14$ *и* $BD = \sqrt{76}$. *Ъглополовящата на* $\angle ABC$ *пресича страната* CD *и продължението на страната* AD *съответно в точките* M *и* N. *Да се намери* S_{DMN}, *ако около* $ABMD$ *може да се опише окръжност. (ПУ - 2006)*

Задача 2.11 *В трапеца* $ABCD$ $(AB > CD)$ *точките* K *и* L *са среди съответно на основите* AB *и* CD , *точките* M *и* N *са среди съответно на бедрата* AD *и* BC $(AD > BC)$, *а точките* P *и* Q *са среди съответно на диагоналите* AC *и* BD. *Известно е, че в трапеца може да се впише окръжност. Ако* $KL = \sqrt{13}$, $MN = 5$ *и* $PQ = 4$, *да се намерят дължините на страните и лицето на трапеца. (ТУ - 2006)*

Задача 2.12 *В окръжност с радиус* $\frac{21\sqrt{5}}{10}$ *е вписан четириъгълник* $ABCD$ *с лице* $S = 18\sqrt{5}$. *Ако* $AB = 4$ *и* $\angle ABC = \beta$, $tg\beta = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$, *да се намерят страните и диагоналите на* $ABCD$. *(СУ - 2005)*

Задача 2.13 *В остроъгълен* $\triangle ABC$ *са прекарани височините* CD *и* AE *като* $AC = 8$.
а) Да се докаже, че $\triangle ABC \sim \triangle EBD$;
б) Ако $S_{ABC} = 18$ *и* $S_{BDE} = 2$, *да се намери радиусът на описаната около* $\triangle EBD$ *окръжност. (ЛТУ - 2003)*

Задача 2.14 *В* $\triangle ABC$ *ъглополовящите* AA_1 *и* BB_1 *се пресичат в точка* I *и около четириъгълника* A_1CB_1I *може да се опише окръжност с радиус* $2\sqrt{7}$. *Ако* $S_{A_1CB_1I} = 27\sqrt{3}$, *да се намерят дължините на страните на :*
а) четириъгълника A_1CB_1I;
б) $\triangle ABC$. *(СУ - 2002)*

Задача 2.15 *Нека* $ABCD$ *е ограден трапец от първи род и вписаната окръжност се допира до бедрото* BC *в точка* T. *Ако* $BT = 4$ *и* $CT = 1$ *да се намерят лицето на трапеца и* $cos\angle ACB$.

Геометрия на фигурите

Част III

3 Геометрия на триъгълника

3.1 Барицентрични координати на точка върху права

3.1.1 Определение и свойства на барицентричните координати на точка върху права , геометрична интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка върху права

Теорема 3.1 *Ако A_1, A_2 са различни точки, принадлежащи на правата g, то за всяка точка $M \in g$ съществува точно една наредена двойка реални числа (μ_1, μ_2), удовлетворяващи условията:*

$$
\begin{aligned}
&i)\ \mu_1 + \mu_2 = 1, \\
&ii) \overrightarrow{OM} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_2 \overrightarrow{OA_2},
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

където $O \in g$ е произволна точка.

Доказателство: Съществуване. Нека $M \in g$. Съществува точно едно реално число a, така че

$$
\overrightarrow{A_2M} = a\overrightarrow{A_2A_1}. \tag{3.33}
$$

от където следва

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_2} = a(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}) \\
&\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA_1} + (1-a)\overrightarrow{OA_2}.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Означаваме: $a = \mu_1,\ 1 - a = \mu_2$. Тогава $\mu_1 + \mu_2 = 1,\ \overrightarrow{OM} = \mu_1\overrightarrow{OA_1} + \mu_2\overrightarrow{OA_2}$.

Единственост. Нека (μ_1, μ_2) са наредена двойка реални числа , за които са в сила условията $i), ii)$. Тогава $\mu_2 = 1 - \mu_1$ и $\overrightarrow{OM} = \mu_1\overrightarrow{OA_1} + (1-\mu_1)\overrightarrow{OA_2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_2} = \mu_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{A_2M} = \mu_1\overrightarrow{A_2A_1}$.

Допускаме, че съществува втора наредена двойка реални числа (η_1, η_2), за които са в сила условията $i), ii)$. След аналогични действия получаваме $\overrightarrow{A_2M} = \eta_1\overrightarrow{A_2A_1}$. От $\overrightarrow{A_2M} = \eta_1\overrightarrow{A_2A_1}$ и $\overrightarrow{A_2M} = \mu_1\overrightarrow{A_2A_1}$ следва $\eta_1 = \mu_1,\ \eta_2 = 1 - \eta_1 = 1 - \mu_1 = \mu_2$, т.е. наредената двойка реални числа (μ_1, μ_2) е единствена.

Определение 3.1 *Всяка наредена двойка точки* $\{A_1, A_2\}(A_1 \neq A_2)$ *върху правата* g *се нарича барицентрична координатна система. Означаваме БКС* $\{A_1, A_2\}$.

Определение 3.2 *Наредената двойка реални числа* (μ_1, μ_2), *удовлетворяващи условията* $i), ii)$, *наричаме нормирани барицентрични координати (НБК) на точката* M *относно БКС* $\{A_1, A_2\}$ *и означаваме* $M(\mu_1, \mu_2)$.

Точките A_1, A_2 имат следните НБК относно БКС $\{A_1, A_2\}$:
$A_1(1, 0), A_2(0, 1)$.

Геометрична интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка върху права: $\mu_1 = \dfrac{\overline{MA_2}}{\overline{A_1A_2}}$, $\mu_2 = \dfrac{\overline{A_1M}}{\overline{A_1A_2}}$, където $\overline{A_1A_2}, \overline{MA_2}, \overline{A_1M}$ са алгебричните мярки на съответните отсечки.

Наистина, от (3.33) следва $\mu_1 = a = \dfrac{\overline{A_2M}}{\overline{A_2A_1}} = \dfrac{\overline{MA_2}}{\overline{A_1A_2}}$. Тогава

$$\mu_2 = 1 - \mu_1 = 1 - \frac{\overline{MA_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1A_2} - \overline{MA_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1A_2} + \overline{A_2M}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_1M}}{\overline{A_1A_2}}.$$

Определение 3.3 *Всяка наредена двойка реални числа* (m_1, m_2), *удовлетворяващи условията*

$$\begin{aligned} &j)\; m_1 + m_2 = m \neq 0, \\ &jj)\overrightarrow{OM} = \frac{m_1}{m}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{m}\overrightarrow{OA_2}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

където $O \in g$ *е произволна точка. наричаме барицентрични координати (БК) на точката* M *относно БКС* $\{A_1, A_2\}$ *и означаваме* $M(m_1, m_2)$.

От Определение 3.3 непосредствено следва, че **барицентричните координати на точка не се определят еднозначно.** Ако относно БКС $\{A_1, A_2\}$ точка M има барицентрични координати (m_1, m_2), то $(\lambda m_1, \lambda m_2)$ също са барицентрични координати на M.
Нормираните барицентрични координати са само една специална двойка барицентрични координати.

3.1.2 Преход от една барицентрична координатна система върху дадена права в друга барицентрична координатна система върху същата права.

Теорема 3.2 *Нека относно БКС* $\{A_1, A_2\}$ *точките* M_1, M_2, M_3 *имат съответно следните нормирани барицентрични координати:* $(\mu_1^1, \mu_2^1), (\mu_1^2, \mu_2^2), (\mu_1^3, \mu_2^3)$ *и*

$$(3.36) \qquad \triangle_1 = \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & 1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & 1 \\ \mu_1^3 & \mu_2^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

като III ред=α . I ред + β . II ред. Тогава (α, β) са НБК на точка M_3 относно БКС $\{M_1, M_2\}$.

Доказателство: Тъй като трети ред е линейна комбинация на първите два реда , можем да запишем

$$(3.37) \qquad \mu_1^3 = \alpha\mu_1^1 + \beta\mu_1^2, \quad 1 = \alpha + \beta,$$

от където следват $\alpha = 1-\beta$ и $\mu_1^3 = (1-\beta)\mu_1^1 + \beta\mu_1^2$. Така получаваме $\beta = \dfrac{\mu_1^3 - \mu_1^1}{\mu_1^2 - \mu_1^1}$. Сега, използвайки геометричната интерпретация на нормираните барицентрични координати, записваме

(3.38)

$$\beta = \frac{\dfrac{\overline{M_3A_2}}{\overline{A_1A_2}} - \dfrac{\overline{M_1A_2}}{\overline{A_1A_2}}}{\dfrac{\overline{M_2A_2}}{\overline{A_1A_2}} - \dfrac{\overline{M_1A_2}}{\overline{A_1A_2}}} = \frac{\overline{M_3A_2} + \overline{A_2M_1}}{\overline{M_2A_2} + \overline{A_2M_1}} = \frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_2M_1}} = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_2}},$$

$$\alpha = 1 - \beta = 1 - \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{\overline{M_1M_2} - \overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{\overline{M_3M_2}}{\overline{M_1M_2}}.$$

Съгласно геометричната интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка M_3 относно БКС $\{M_1, M_2\}$ имаме:
$M_3(\dfrac{\overline{M_3M_2}}{\overline{M_1M_2}}, \dfrac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_2}})$. Тогава, отчитайки представянето (3.38) на α и β заключаваме, че НБК на точка M_3 относно БКС $\{M_1, M_2\}$ са (α, β).

Теорема 3.3 *Ако точка M е среда на отсечката $\{M_1M_2\}$ и относно БКС $\{A_1, A_2\}$ точките M_1, M_2 имат следните нормирани барицентрични координати: $M_1(\mu_1^1, \mu_2^1)$, $M_2(\mu_1^2, \mu_2^2)$, то точка M има следните нормирани барицентрични координати: $M(\dfrac{\mu_1^1 + \mu_1^2}{2}, \dfrac{\mu_2^1 + \mu_2^2}{2})$ относно $\{A_1, A_2\}$ и $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ относно $\{M_1, M_2\}$.*

Доказателство: Съгласно Определение 3.2 и условието, че точка M е среда на отсечката $\{M_1M_2\}$, следва

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}) = \frac{1}{2}(\mu_1^1\overrightarrow{OA_1} + \mu_2^1\overrightarrow{OA_2} + \mu_1^2\overrightarrow{OA_1} + \mu_2^2\overrightarrow{OA_2}),$

$\overrightarrow{OM} = \dfrac{\mu_1^1 + \mu_1^2}{2}\overrightarrow{OA_1} + \dfrac{\mu_2^1 + \mu_2^2}{2}\overrightarrow{OA_2}.$

Освен това

$\dfrac{\mu_1^1 + \mu_1^2 + \mu_2^1 + \mu_2^2}{2} = \dfrac{(\mu_1^1 + \mu_2^1) + (\mu_1^2 + \mu_2^2)}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1.$

Следователно нормирани барицентрични координати на точка M относно БКС $\{A_1, A_2\}$ са $M(\dfrac{\mu_1^1 + \mu_1^2}{2}, \dfrac{\mu_2^1 + \mu_2^2}{2})$.

Да разгледаме детерминантата

$$(3.39)\qquad \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & 1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & 1 \\ \dfrac{\mu_1^1 + \mu_1^2}{2} & \dfrac{\mu_2^1 + \mu_2^2}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Тъй като IIIред $= \dfrac{1}{2}I$ред $+ \dfrac{1}{2}II$ред, то съгласно Теорема 3.2 нормирани барицентрични координати на точка M относно БКС $\{M_1, M_2\}$ са $M(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.

3.2 Барицентрични координати на точка в равнината

3.2.1 Определение и свойства на барицентричните координати на точка в равнината, геометрична интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка в равнината

Теорема 3.4 *Ако A_1, A_2, A_3 са различни, неколинеарни точки, принадлежащи на равнината α, то за всяка точка $M \in \alpha$ съществува точно една наредена тройка реални числа (μ_1, μ_2, μ_3), удовлетворяващи условията:*

$$(3.40)\qquad \begin{aligned} &k)\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \\ &kk)\overrightarrow{OM} = \mu_1\overrightarrow{OA_1} + \mu_2\overrightarrow{OA_2} + \mu_3\overrightarrow{OA_3}, \end{aligned}$$

където $O \in \alpha$ е произволна точка.

Доказателство: Съществуване. Нека $M \in \alpha$. Съществуват точно една наредена двойка реални числа μ_2, μ_3, така че

$$(3.41)\qquad \overrightarrow{A_1M} = \mu_2\overrightarrow{A_1A_2} + \mu_3\overrightarrow{A_1A_3}.$$

Нека O е произволна точка. Тогава

$$(3.42)\qquad \begin{aligned} \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_1} &= \mu_2(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + \mu_3(\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1}) \\ \overrightarrow{OM} &= (1-\mu_2-\mu_3)\overrightarrow{OA_1} + \mu_2\overrightarrow{OA_2} + \mu_3\overrightarrow{OA_3}. \end{aligned}$$

Означаваме $\mu_1 = 1-\mu_2-\mu_3$. Тогава $\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 1$ и $\overrightarrow{OM} = \mu_1\overrightarrow{OA_1} + \mu_2\overrightarrow{OA_2} + \mu_3\overrightarrow{OA_3}$, т.е. условията $k), kk)$ са в сила.

Единственост. Допускаме, че съществува втора наредена тройка реални числа (η_1, η_2, η_3), така че

$$(3.43)\qquad \begin{aligned} &k)\ \eta_1+\eta_2+\eta_3 = 1, \\ &kk)\ \overrightarrow{OM} = \eta_1\overrightarrow{OA_1} + \eta_2\overrightarrow{OA_2} + \eta_3\overrightarrow{OA_3}, \end{aligned}$$

Тогава $\eta_1 = 1-\eta_2-\eta_3$ и $\overrightarrow{OM} = (1-\eta_2-\eta_3)\overrightarrow{OA_1}+\eta_2\overrightarrow{OA_2}+\eta_3\overrightarrow{OA_3} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA_1} = \eta_2(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + \eta_3(\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1})$.

Следователно

$$(3.44)\qquad \overrightarrow{A_1M} = \eta_2\overrightarrow{A_1A_2} + \eta_3\overrightarrow{A_1A_3}.$$

От (3.41) и (3.44) следват $\mu_2 = \eta_2, \mu_3 = \eta_3$, а тогава и $\mu_1 = \eta_1$.

Определение 3.4 *Всяка наредена тройка неколинеарни точки* $\{A_1, A_2\, A_3\}$ *се нарича барицентрична координатна система. Означаваме БКС* $\{A_1, A_2\, A_3\}$.

Определение 3.5 *Наредената тройка реални числа* (μ_1, μ_2, μ_3), *удовлетворяващи условията* $k), kk)$, *наричаме нормирани барицентрични координати (НБК) на точката* M *относно БКС* $\{A_1, A_2\, A_3\}$ *и означаваме* $M(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Точките A_1, A_2, A_3 имат следните НБК относно БКС $\{A_1, A_2\, A_3\}$:
$A_1(1,0,0), A_2(0,1,0), A_3(0,0,1)$.

Геометрична интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка в равнина:

$$\mu_1 = \frac{MA_2A_3}{A_1A_2A_3},\ \ \mu_2 = \frac{A_1MA_3}{A_1A_2A_3},\ \ \mu_3 = \frac{A_1A_2M}{A_1A_2A_3},$$

където с ABC означаваме ориентираното лице на $\triangle ABC$, като
$ABC = \varepsilon S_{ABC}$ и $\varepsilon = +1$, когато $\triangle ABC$ е положително ориентиран, а $\varepsilon = -1$, когато $\triangle ABC$ е отрицателно ориентиран.

Определение 3.6 *Всяка наредена тройка реални числа (m_1, m_2, m_3), за която са в сила условията*

$$(3.45)\qquad \begin{aligned} &l)\ m_1 + m_2 + m_3 = m \neq 0,\\ &ll)\overrightarrow{OM} = \frac{m_1}{m}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{m}\overrightarrow{OA_2} + \frac{m_3}{m}\overrightarrow{OA_3}, \end{aligned}$$

където $O \in \alpha$ е произволна точка. наричаме барицентрични координати (БК) на точката M относно БКС $\{A_1, A_2, A_3\}$ и означаваме $M(m_1, m_2, m_3)$.

От Определение 3.6 непосредствено следва, че **барицентричните координати на точка в равнината не се определят еднозначно.** Ако относно БКС $\{A_1, A_2, A_3\}$ точка M има барицентрични координати (m_1, m_2, m_3), то $(\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda m_3)$ също са барицентрични координати на M.
Нормираните барицентрични координати са само една специална тройка барицентрични координати.

3.2.2 Преход от барицентрична координатна система в равнината в барицентрична координатна система върху права от тази равнина

Теорема 3.5 *Нека в равнината α са дадени точките M_1, M_2, M_3 (като $M_1 \neq M_2$), които относно барицентричната координатна система $\{A_1, A_2, A_3\}$ в равнината α имат следните барицентрични координати:*

$$(3.46)\qquad \begin{aligned} &M_1(m_1^1, m_2^1, m_3^1), \quad m_1^1 + m_2^1 + m_3^1 = m^1;\\ &M_2(m_1^2, m_2^2, m_3^2), \quad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = m^2;\\ &M_3(m_1^3, m_2^3, m_3^3), \quad m_1^3 + m_2^3 + m_3^3 = m^3. \end{aligned}$$

Тогава в сила са твърденията:

$$(3.47)\qquad a)\quad M_3 \in M_1M_2 \iff \triangle_2 = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1\\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2\\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

б) Ако между редовете на детерминантата $\triangle_2$ съществува зависимостта

$$(3.48)\qquad III ред = \alpha.I ред + \beta.II ред,$$

то $(\alpha m^1, \beta m^2)$ са барицентричните координати на точка M_3 относно БКС $\{M_1, M_2\}$.

Доказателство: а) I. Нека M_1, M_2, M_3 са колинеарни точки. Тогава съществува реално число a, така че $\overrightarrow{M_2M_3} = a\overrightarrow{M_1M_2}$, поради което $\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2} = a(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})$ или $\overrightarrow{OM_3} = -a\overrightarrow{OM_1} + (1+a)\overrightarrow{OM_2}$.
Използвайки представянето ll) за векторите $\overrightarrow{OM_i}$ записваме $\overrightarrow{OM_3} =$
$-a(\frac{m_1^1}{m^1}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2^1}{m^1}\overrightarrow{OA_2} + \frac{m_3^1}{m^1}\overrightarrow{OA_3}) + (1+a)(\frac{m_1^2}{m^2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2^2}{m^2}\overrightarrow{OA_2} + \frac{m_3^2}{m^2}\overrightarrow{OA_3})$
или

(3.49)
$$\overrightarrow{OM_3} = [\frac{(1+a)m_1^2}{m^2} - \frac{am_1^1}{m^1}]\overrightarrow{OA_1} + [\frac{(1+a)m_2^2}{m^2} - \frac{am_2^1}{m^1}]\overrightarrow{OA_2} + [\frac{(1+a)m_3^2}{m^2} - \frac{am_3^1}{m^1}]\overrightarrow{OA_3}.$$

Тъй като

(3.50)
$$\frac{(1+a)m_1^2}{m^2} - \frac{am_1^1}{m^1} + \frac{(1+a)m_2^2}{m^2} - \frac{am_2^1}{m^1} + \frac{(1+a)m_3^2}{m^2} - \frac{am_3^1}{m^1} = \frac{(1+a)(m_1^2+m_2^2+m_3^2)}{m^2} - \frac{a(m_1^1+m_2^1+m_3^1)}{m^1} = 1 + a - a = 1,$$

то в представянето (3.49) фигурират нормираните барицентрични координати на точка M_3.

В същото време съгласно определението за НБК на M_3 имаме

$$\overrightarrow{OM_3} = \frac{m_1^3}{m^3}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2^3}{m^3}\overrightarrow{OA_2} + \frac{m_3^3}{m^3}\overrightarrow{OA_3}. \tag{3.51}$$

Съгласно Теорема 3.4 НБК са еднозначно определени, поради което са в сила равенствата

$$\begin{aligned} \frac{m_1^3}{m^3} &= \frac{(1+a)m_1^2}{m^2} - \frac{am_1^1}{m^1}\ , \\ \frac{m_2^3}{m^3} &= \frac{(1+a)m_2^2}{m^2} - \frac{am_2^1}{m^1}\ , \\ \frac{m_3^3}{m^3} &= \frac{(1+a)m_3^2}{m^2} - \frac{am_3^1}{m^1}\ . \end{aligned} \tag{3.52}$$

Да заместим елементите на третия ред на детерминантата $\triangle_2$ съобразявайки се с равенствата (3.52). Така получаваме

(3.53)

$$\triangle_2 = \frac{m^3(1+a)}{m^2}\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \end{vmatrix} - \frac{m^3 a}{m^1}\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \end{vmatrix} = 0.$$

II. Нека сега $\triangle_2 = 0$. Избираме точката N със следните НБК $N(\frac{m_1^3}{m^3}, y, 1 - \frac{m_1^3}{m^3} - y)$ относно $\{A_1, A_2, A_3\}$, които могат да се запишат още във вида $N(\frac{m_1^3}{m^3}, y, \frac{m_2^3 + m_3^3}{m^3} - y)$, поради (3.45).

Да определим неизвестната координата y, изисквайки $N \in M_1M_2$. Ще използваме доказаното в първата част на а), което означава

$$\triangle_2' = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ \frac{m_1^3}{m^3} & y & \frac{m_2^3+m_3^3}{m^3} - y \end{vmatrix} = 0. \tag{3.54}$$

Развиваме детерминантата по елементите на третия ѝ ред и получаваме

$$\frac{m_1^3}{m^3}P - yQ + (\frac{m_2^3+m_3^3}{m^3} - y)R = 0, \tag{3.55}$$

където поне един от коефициентите

$$P = \begin{vmatrix} m_2^1 & m_3^1 \\ m_2^2 & m_3^2 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_3^2 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{vmatrix} \tag{3.56}$$

е различен от нула, защото точките M_1 и M_2 са различни.

Поради условието $\triangle_2 = 0$ имаме и

$$\begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \\ \frac{m_1^3}{m^3} & \frac{m_2^3}{m^3} & \frac{m_3^3}{m^3} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.57}$$

от където следва

$$\frac{m_1^3}{m^3}P - \frac{m_2^3}{m^3}Q + \frac{m_2^3}{m^3}R = 0. \tag{3.58}$$

От (3.55) и (3.58) следва

$$\frac{m_1^3}{m^3}P = yQ - (\frac{m_2^3+m_3^3}{m^3} - y)R = \frac{m_2^3}{m^3}Q - \frac{m_3^3}{m^3}R, \tag{3.59}$$

от където получаваме $y(Q+R) = \dfrac{m_2^3}{m^3}(Q+R)$ или $y = \dfrac{m_2^3}{m^3}$. Тогава $1-\dfrac{m_2^3+m_3^3}{m^3}-y = \dfrac{m_3^3}{m^3}$. Така получихме, че точка N има следните НБК $N(\dfrac{m_1^3}{m^3}, \dfrac{m_2^3}{m^3}, \dfrac{m_3^3}{m^3})$ относно БКС $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Но по условие точка M_3 има БК (m_1^3, m_2^3, m_3^3) относно БКС $\{A_1, A_2, A_3\}$ като $\sum_{i=1}^3 m_i^3 = m^3$. Следователно $N = M_3$ и значи $M_3 \in M_1M_2$.

б) Нека между редовете на детерминантата $\triangle_2$ съществува зависимостта IIIред $=$ $\alpha.I$ред $+ \beta.II$ред или

$$\begin{aligned} m_1^3 &= \alpha m_1^1 + \beta m_1^2 \\ m_2^3 &= \alpha m_2^1 + \beta m_2^2 \\ m_3^3 &= \alpha m_3^1 + \beta m_3^2, \end{aligned} \tag{3.60}$$

от където следва, че $\triangle_2 = 0$, а тогава поради доказаното вече твърдение а) следва, че точките M_1, M_2, M_3 са колинеарни. Отчитайки (3.51) и условието на б) записваме

$m^3\overrightarrow{OM_3} = (\alpha m_1^1 + \beta m_1^2)\overrightarrow{OA_1} + (\alpha m_2^1 + \beta m_2^2)\overrightarrow{OA_2} + (\alpha m_3^1 + \beta m_3^2)\overrightarrow{OA_3}$

или след прегрупиране на събираемите имаме

$m^3\overrightarrow{OM_3} = \alpha(m_1^1\overrightarrow{OA_1} + m_2^1\overrightarrow{OA_2} + m_3^1\overrightarrow{OA_3}) + \beta(m_1^2\overrightarrow{OA_1} + m_2^2\overrightarrow{OA_2} + m_3^2\overrightarrow{OA_3}),$

т.е.

$m^3\overrightarrow{OM_3} = \alpha m^1\overrightarrow{OM_1} + \beta m^2\overrightarrow{OM_2}.$

Последният резултат означава, че $(\alpha m^1, \beta m^2)$ са двойка барицентрични координати на точка M_3 относно $\{M_1, M_2\}$.

Свойство б) осигурява прехода

$M_3(m_1^3, m_2^3, m_3^3)$**относно**$\{A_1, A_2, A_3\} \Longrightarrow M_3(\alpha m^1, \beta m^2)$**относно**$\{M_1, M_2\}$.

3.2.3 Преход от барицентрична координатна система в равнината в барицентрична координатна система в същата равнина

Теорема 3.6 *Нека в равнината α са дадени точките M_1, M_2, M_3, M_4 (като M_1, M_2, M_3 са неколинеарни точки), които относно барицентричната координатна система $\{A_1, A_2, A_3\}$ в равнината α имат следните барицентрични координати:*

$$
\begin{aligned}
&M_1(m_1^1, m_2^1, m_3^1), && m_1^1 + m_2^1 + m_3^1 = m^1;\\
&M_2(m_1^2, m_2^2, m_3^2,), && m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = m^2;\\
&M_3(m_1^3, m_2^3, m_3^3), && m_1^3 + m_2^3 + m_3^3 = m^3;\\
&M_4(m_1^4, m_2^4, m_3^4), && m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 = m^4.
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Тогава в сила са твърденията:

$$
a) \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 & m^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m^2 \\ m_1^3 & m_2^3 & m_3^3 & m^3 \\ m_1^4 & m_2^4 & m_3^4 & m^4 \end{vmatrix} = 0
\tag{3.62}
$$

б) Ако между редовете на детерминантата $\triangle_3$ съществува зависимостта

$$
IV ред = \alpha.I ред + \beta.II ред + \gamma.III ред,
\tag{3.63}
$$

то $(\alpha m^1, \beta m^2, \gamma m^3)$ са барицентричните координати на точка M_4 относно БКС $\{M_1, M_2\, M_3\}$.

Доказателство: а) Доказателството на твърдението следва непосредствено след заместване на елементите на четвъртия стълб в $\triangle_3$ със сумите им от (3.61) и отчитане на свойството на детерминатите със съвпадащи стълбове.

б) Нека между редовете на детерминантата $\triangle_3$ съществува зависимостта (3.63). Следователно $\triangle_3 = 0$. Отчитайки

$$
\overrightarrow{OM_4} = \frac{m_1^4}{m^4}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2^4}{m^4}\overrightarrow{OA_2} + \frac{m_3^4}{m^4}\overrightarrow{OA_3}
\tag{3.64}
$$

и условието на б) записваме

$m_4\overrightarrow{OM_4} = (\alpha m_1^1 + \beta m_1^2 + \gamma m_1^3)\overrightarrow{OA_1} + (\alpha m_2^1 + \beta m_2^2 + \gamma m_2^3)\overrightarrow{OA_2}$
$+(\alpha m_3^1 + \beta m_3^2 + \gamma m_3^3)\overrightarrow{OA_3}$,

или след прегрупиране на събираемите имаме

$m^4\overrightarrow{OM_4} = \alpha(m_1^1\overrightarrow{OA_1} + m_2^1\overrightarrow{OA_2} + m_3^1\overrightarrow{OA_3})+$

$\beta(m_1^2\overrightarrow{OA_1} + m_2^2\overrightarrow{OA_2} + m_3^2\overrightarrow{OA_3}) + \gamma(m_1^3\overrightarrow{OA_1} + m_2^3\overrightarrow{OA_2} + m_3^3\overrightarrow{OA_3}),$

т.е.

$$\overrightarrow{OM_4} = \frac{\alpha m^1\overrightarrow{OM_1} + \beta m^2\overrightarrow{OM_2} + \gamma m^3\overrightarrow{OM_3}}{m_4}.$$

Последният резултат означава, че $(\alpha m^1, \beta m^2, \gamma m_3)$ са тройка барицентрични координати на точка M_4 относно БКС $\{M_1, M_2, M_3\}$. Поради $\dfrac{\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3}{m_4} = \dfrac{m_4}{m_4} = 1$ следва, че $(\dfrac{\alpha m_1}{m_4}, \dfrac{\beta m_2}{m_4}, \dfrac{\gamma m_3}{m_4})$ са нормираните барицентрични координати на M_4 относно БКС $\{M_1, M_2, M_3\}$.

3.3 Уравнение на права относно барицентрична координатна система в равнината

Определение 3.7 *Нека в равнината α са дадени различните точки M_1 и M_2, които относно барицентричната координатна система $\{A_1, A_2, A_3\}$ в равнината α имат следните барицентрични координати:*

$M_1(m_1^1, m_2^1, m_3^1), M_2(m_1^2, m_2^2, m_3^2,)$

като $m_1^1 + m_2^1 + m_3^1 = m^1$, $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = m^2$. Равенството

$$a) \quad \triangle_4 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ m_1^1 & m_2^1 & m_3^1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.65}$$

където $M(x, y, z)$ е произволна точка от правата $p = M_1M_2$ се нарича уравнение на правата p .

Уравнението (3.65) може да се запише и във вида

$$\begin{aligned} & p : u_1x + u_2y + u_3z = 0\ , \quad \text{където} \\ & u_1 = m_2^1m_3^2 - m_2^2m_3^1, \\ & u_2 = m_3^1m_1^2 - m_1^1m_3^2, \\ & u_3 = m_1^1m_2^2 - m_1^2m_2^1. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Наредената тройка числа (u_1, u_2, u_3) се наричат барицентрични координати на правата p.

Свойства на координатите на права

1. Поне един от коефициентите (u_1, u_2, u_3) е различен от нула.

Наистина, от допускането $u_1 = u_2 = u_3 = 0 \Longrightarrow$
$\dfrac{m_2^1}{m_2^2} = \dfrac{m_3^1}{m_3^2} = \dfrac{m_1^1}{m_1^2} \Longrightarrow M_1 = M_2$, което противоречи на условието.

2. Ако $p(u_1, u_2, u_3)$, то и $p(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

3. Точка $M(x, y, z) \in p = M_1M_2 \Longleftrightarrow \triangle_4 = 0$.

4. $p : u_1x + u_2y + u_3z = 0$ е уравнение на права в барицентрични координати, когато $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1$.

Наистина, допускането $u_1 = u_2 = u_3$ води до уравнението $x + y + z = 0$. Но за барицентричните координати на всяка точка $P(x, y, z)$ е в сила $x + y + z \neq 0$.

Теорема 3.7 *Правите* $p^i : u_1^ix + u_2^iy + u_3^iz = 0, \ i = 1, 2, 3$ *имат точно една обща точка тогава и само тогава, когато*

$$\triangle_5 = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.67}$$

Доказателство:

$$p_1 \cap p_2 \cap p_3 = M \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u_1^1x + u_2^1y + u_3^1z = 0 \\ u_1^2x + u_2^2y + u_3^2z = 0 \\ u_1^3x + u_2^3y + u_3^3z = 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \triangle_5 = 0 \ ,$$

тъй като системата е хомогенна.

Уравнения на координатните прави на барицентричната координатна система $\{A_1, A_2, A_3\}$

Напомняме координатите на координатните върхове $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$ и прилагаме определение 3.7.

$$A_1A_2 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1A_2 : z = 0 \ ; \tag{3.68}$$

$$A_2A_3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_2A_3 : x = 0 \ ; \tag{3.69}$$

$$A_3A_1 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_3A_1 : y = 0 \ ; \tag{3.70}$$

Нека $M(m_1, m_2, m_3) \in \alpha$. Тогава уравненията на правите A_1M, A_2M, A_3M са следните:

(3.71)

$$A_1M : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1M : m_3y - m_2z = 0 \ ;$$

(3.72)

$$A_2M : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_2M : m_3x - m_1z = 0 \ ;$$

(3.73)

$$A_3M : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_3M : m_2x - m_1y = 0 \ ;$$

Теорема 3.8 *Нека $\{A_1, A_2, A_3\}$ е барицентрична координатна система в равнината α и точка $M(m_1, m_2, m_3) \in \alpha$. Тогава:*

I.

$$\begin{aligned} A_1M \cap A_2A_3 &= M_1(0, m_2, m_3) \ , \\ A_2M \cap A_3A_1 &= M_2(m_1, 0, m_3) \ , \\ A_3M \cap A_1A_2 &= M_3(m_1, m_2, 0) \ . \end{aligned} \tag{3.74}$$

II. Ако точките $M_1 \in A_2A_3$, $M_2 \in A_1A_3$, $M_3 \in A_1A_2$ имат относно БКС $\{A, B, C\}$ барицентрични координати $M_1(0, m_2, m_3)$, $M_2(m_1, 0, m_3)$, $M_3(m_1, m_2, 0)$, то правите A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 се пресичат в точката $M(m_1, m_2, m_3)$.

Доказателство: *I*. Тъй като точката $M_1 \in A_1M$, $M_1 \in A_2A_3$, то нейните координати, определени с точност до общ множител, трябва да удовлетворяват едновременно уравненията на двете прави, т.е. те ще са решение на системата

$$M_1 : \left| \begin{array}{l} m_3y - m_2z = 0 \\ \\ x = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad M_1(0, m_2, m_3) \ \ ;$$

На същите основания определяме и координатите на точките M_2 и M_3.

$$M_2 : \left| \begin{array}{l} m_3x - m_1z = 0 \\ \\ y = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad M_2(m_1, 0, m_3) \ \ ;$$

$$M_3 : \left| \begin{array}{l} m_2x - m_1y = 0 \\ \\ z = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad M_3(m_1, m_2, 0) \ \ .$$

II. Правите A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 имат следните уравнения $A_1M_1 : m_3y - m_2z = 0$, $A_2M_2 : m_3x - m_1z = 0$, $A_3M_3 : m_2x - m_1y = 0$, което означава, че барицентричните координати на тези прави са съответно $(0, m_3, -m_2)$, $(m_3, 0, m_1)$, $(m_2, -m_1, 0)$.

Установяваме $\qquad \triangle = \begin{vmatrix} 0 & m_3 & -m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ m_2 & -m_1 & 0 \end{vmatrix} = m_1m_2m_3 - m_1m_2m_3 = 0$.

Прилагайки Теорема 3.7, заключаваме, че правите A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 имат точно една обща точка, която да означим с $M(x, y, z)$. За да определим координатите ѝ е достатъчно да я разглеждаме като пресечна точка на първите две прави, т.е. достатъчно е да решим системата

$$M : \left| \begin{array}{l} m_3y = m_2z \\ \\ m_3x = m_1z \end{array} \right. \quad \Longrightarrow x = \frac{m_1}{m_3}z, \quad y = \frac{m_2}{m_3}z, \quad \Longrightarrow$$

$$M(x = \frac{m_1}{m_3},\ y = \frac{m_2}{m_3},\ 1) \quad \Longrightarrow \quad M(m_1, m_2, m_3).$$

3.4 Барицентрични координати на забележителните точки на триъгълника

Лема 3.1 *Ако ABC е триъгълник и точките $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, то те имат следните барицентрични координати относно БКС $\{A, B, C\}$:*

$$A_1(0,\ \overline{A_1C},\ \overline{BA_1}),\ B_1(\overline{B_1C},\ 0\ ,\overline{AB_1}),\ C_1(\overline{C_1B},\ \overline{AC_1},\ 0).$$

Доказателство: Съгласно геометричната интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка относно барицентрична координатна система върху права, точките $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, имат следните барицентрични координати:

$A_1(\overline{A_1C},\ \overline{BA_1})$, относно БКС $\{B, C\}$,

$B_1(\overline{B_1C},\ \overline{AB_1})$, относно БКС $\{A, C\}$,

$C_1(\overline{C_1B},\ \overline{AC_1})$, относно БКС $\{A, B\}$.

1. Да разгледаме точката $\overset{*}{A} \in BC$ с координати $(0,\ \overline{A_1C},\ \overline{BA_1})$, относно БКС $\{A, B, C\}$, Очевидно

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overline{A_1C} & \overline{BA_1} \end{vmatrix} = 0 \text{ и } III\text{ред} = \overline{A_1C}.I\text{ред} + \overline{BA_1}.II\text{ред},$$

Съгласно твърдение б) на Теорема 3.5 следва, че двойка барицентрични координати на $\overset{*}{A}$ относно БКС $\{B, C\}$, са $(\overline{A_1C},\ \overline{BA_1})$. Следователно точките $\overset{*}{A}$ и A_1 съвпадат.

2. Да разгледаме точката $\overset{*}{B} \in AC$ с координати $(\overline{B_1C},\ 0,\ \overline{AB_1})$, относно БКС $\{A, B, C\}$, Очевидно

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \overline{B_1C} & 0 & \overline{AB_1} \end{vmatrix} = 0 \text{ и } III\text{ред} = \overline{B_1C}.I\text{ред} + \overline{AB_1}.II\text{ред},$$

Съгласно твърдение б) на Теорема 3.5 следва, че двойка барицентрични координати на $\overset{*}{B}$ относно БКС $\{A, C\}$, са $(\overline{B_1C},\ \overline{AB_1})$. Следователно точките $\overset{*}{B}$ и B_1 съвпадат.

3. Да разгледаме точката $\overset{*}{C} \in AB$ с координати $(\overline{C_1B},\ \overline{AC_1},\ 0)$, относно БКС $\{A, B, C\}$, Очевидно

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \overline{C_1B} & \overline{AC_1} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } III\text{ред} = \overline{C_1B}.I\text{ред} + \overline{AC_1}.II\text{ред},$$

Съгласно твърдение б) на Теорема 3.5 следва, че двойка барицентрични координати на $\overset{*}{C}$ относно БКС $\{A, B\}$, са $(\overline{C_1B},\ \overline{AC_1})$. Следователно точките $\overset{*}{C}$ и C_1 съвпадат.

Когато се решават множество задачи, касаещи точки и прави, свързани с триъгълник, е удобно да се избере този триъгълник като барицентрична координатна система, да се определят барицентричните координати на разглежданите точки и с тяхна помощ да се разреши поставения проблем.

Във всички разглеждания нататък ще приемем за $\triangle ABC$ стандартните означения за: дължините на страните - $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$; за ъглите - $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$; за полупериметъра - p; за радиусите на вписаната, описаната и външно вписаните окръжности съответно - r, R, r_a, r_b, r_c.

1. M е медицентърът на $\triangle ABC$

Нека точките A_1, B_1, C_1 са среди съответно на страните на $\triangle ABC$. Следователно за барицентричните им координати можем да запишем:

относно					относно	
$\{B, C\}$	$A_1(\overline{A_1C}, \overline{BA_1})$	$\Longrightarrow$	$A_1(1,1)$	$\Longrightarrow$	$\{A, B, C\}$	$A_1(0,1,1)$
$\{A, C\}$	$B_1(\overline{B_1C}, \overline{AB_1})$	$\Longrightarrow$	$B_1(1,1)$	$\Longrightarrow$	$\{A, B, C\}$	$B_1(1,0,1)$
$\{A, B\}$	$C_1(\overline{C_1B}, \overline{AC_1})$	$\Longrightarrow$	$C_1(1,1)$	$\Longrightarrow$	$\{A, B, C\}$	$C_1(1,1,0)$

Резултатите в последната колона на горната таблица позволяват да приложим Теорема 3.8, от където следва:

Медианите в триъгълника се пресичат в една точка M, наречена медицентър, с барицентрични координати $M(1,1,1)$ относно БКС $\{A, B, C\}$.

1. I е центърът на окръжността, вписана в $\triangle ABC$

Нека A_1, B_1, C_1 са пресечните точки на ъглополовящите на вътрешните ъгли на $\triangle ABC$ със срещулежащите им страни съответно BC, AC, AB . Като отчетем свойството на ъглополовящата да дели срещуположната страна на части, чието отношение е равно на отношението на прилежащите им страни и свойството на барицентричните координати да се определят с точност до общ множител, за барицентричните координати на точките A_1, B_1, C_1 можем да запишем:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{относно} & & & & & \text{относно} & \\
\{B,C\} & A_1(\overline{A_1C},\overline{BA_1}) & \Longrightarrow & A_1(b,c) & \Longrightarrow & \{A,B,C\} & A_1(0,b,c) \\
\{A,C\} & B_1(\overline{B_1C},\overline{AB_1}) & \Longrightarrow & B_1(a,c) & \Longrightarrow & \{A,B,C\} & B_1(a,0,c) \\
\{A,B\} & C_1(\overline{C_1B},\overline{AC_1}) & \Longrightarrow & C_1(a,b) & \Longrightarrow & \{A,B,C\} & C_1(a,b,0)
\end{array}$$

Резултатите в последната колона на горната таблица позволяват да приложим Теорема 3.8, от където следва:

Ъглополовящите в триъгълника се пресичат в една точка I, явяваща се център на вписаната окръжност, с барицентрични координати $I(a,b,c)$ относно БКС $\{A,B,C\}$.

3. I_a е центърът на окръжността, външно вписана в $\triangle ABC$, която се допира до страната BC и до продълженията на AB и AC.

Нека A_1, B_1, C_1 са пресечните точки съответно на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A и на ъглополовящите на външните ъгли при върховете B и C на $\triangle ABC$ със срещулежащата им страна и продълженията на другите две срещулежащи страни.
Като отчетем свойствата на тези ъглополовящи записваме:

$$\frac{\overline{A_1C}}{\overline{BA_1}} = \frac{b}{c}\ ,\quad \frac{\overline{B_1C}}{\overline{AB_1}} = -\frac{a}{c}\ ,\quad \frac{\overline{C_1B}}{\overline{AC_1}} = -\frac{a}{b}\ .$$

Но барицентричните координати се определят с точност до общ множител и тогава за барицентричните координати на точките A_1, B_1, C_1 имаме:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{относно} & & & & & \text{относно} & \\
\{B,C\} & A_1(\overline{A_1C},\overline{BA_1}) & \Longrightarrow & A_1(b,c) & \Longrightarrow & \{A,B,C\} & A_1(\ 0,\ b,c) \\
\{A,C\} & B_1(\overline{B_1C},\overline{AB_1}) & \Longrightarrow & B_1(-a,c) & \Longrightarrow & \{A,B,C\} & B_1(-a,0,c) \\
\{A,B\} & C_1(\overline{C_1B},\overline{AC_1}) & \Longrightarrow & C_1(-a,b) & \Longrightarrow & \{A,B,C\} & C_1(-a,b,0)
\end{array}$$

Резултатите в последната колона на горната таблица позволяват да приложим Теорема 3.8, от където следва:

Ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A и ъглополовящите на външните ъгли при върховете B и C на $\triangle ABC$ се пресичат в една точка I_a, явяваща се център на външно вписаната окръжност k_a, с барицентрични координати $I_a(-a,b,c)$ относно БКС $\{A,B,C\}$.

След аналогични розсъждения се получават и следните резултати:

Ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха B и ъглополовящите на външните ъгли при върховете A и C на $\triangle ABC$ се пресичат в една точка I_b, явяваща се център на външно вписаната окръжност k_b, с

барицентрични координати $I_b(a, -b, c)$ относно БКС $\{A, B, C\}$.

Ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха C и ъглополовящите на външните ъгли при върховете A и B на $\triangle ABC$ се пресичат в една точка I_c, явяваща се център на външно вписаната окръжност k_c, с барицентрични координати $I_c(a, b, -c)$ относно БКС $\{A, B, C\}$.

4.H е ортоцентърът на $\triangle ABC$

Нека точките A_1, B_1, C_1 са пети на височините съответно към страните BC, AC, AB на $\triangle ABC$.

$A_1C = AA_1 cotg\gamma$, $BA_1 = AA_1 cotg\beta$. Следователно барицентричните координати на точка A_1 относно БКС $\{B, C\}$ са $A_1(cotg\gamma, cotg\beta)$ или $A_1(\frac{1}{tg\gamma}, \frac{1}{tg\beta})$, или $A_1(tg\beta, tg\gamma)$. Знакът, произхождащ от алгебричните мерки на отсечките се съдържа във функцията $cotg$.

Аналогично за точка B_1 получаваме: $B_1C = BB_1 cotg\gamma$, $AB_1 = BB_1 cotg\alpha$. Следователно барицентричните координати на точка B_1 относно БКС $\{A, C\}$ са $B_1(cotg\gamma, cotg\alpha)$ или $B_1(\frac{1}{tg\gamma}, \frac{1}{tg\alpha})$, или $B_1(tg\alpha, tg\gamma)$.

Аналогично за точка C_1 получаваме: $C_1B = CC_1 cotg\beta$, $AC_1 = CC_1 cotg\alpha$. Следователно барицентричните координати на точка C_1 относно БКС $\{A, B\}$ са $C_1(cotg\beta, cotg\alpha)$ или $C_1(\frac{1}{tg\beta}, \frac{1}{tg\alpha})$, или $C_1(tg\alpha, tg\beta)$.

Да попълним таблицата.

относно					относно	
$\{B, C\}$	$A_1(\overline{A_1C}, \overline{BA_1})$	$\Longrightarrow$	$A_1(tg\beta, tg\gamma)$	$\Longrightarrow$	$\{A, B, C\}$	$A_1(0, tg\beta, tg\gamma)$
$\{A, C\}$	$B_1(\overline{B_1C}, \overline{AB_1})$	$\Longrightarrow$	$B_1(tg\alpha, tg\gamma)$	$\Longrightarrow$	$\{A, B, C\}$	$B_1(tg\alpha, 0, tg\gamma)$
$\{A, B\}$	$C_1(\overline{C_1B}, \overline{AC_1})$	$\Longrightarrow$	$C_1(tg\alpha, tg\beta)$	$\Longrightarrow$	$\{A, B, C\}$	$C_1(tg\alpha, tg\beta, 0)$

Резултатите в последната колона на горната таблица позволяват да приложим Теорема 3.8, от където следва:

Височините в триъгълника се пресичат в една точка H, наречена ортоцентър, с барицентрични координати $H(tg\alpha, tg\beta, tg\gamma)$ относно БКС $\{A, B, C\}$.

5. G е точката на Жергон за $\triangle ABC$

Нека точките A_1, B_1, C_1 са допирните точки на вписаната в триъгълника окръжност k съответно до страните BC, AC, AB на $\triangle ABC$.

Известно е, че $CA_1 = CB_1 = p - c$, $BA_1 = BC_1 = p - b$, $AB_1 = AC_1 = p - a$. Следователно:

БК на A_1 относно БКС $\{B,C\}$ са $A_1(p-c,p-b)$ или след умножаване с множителя $\dfrac{1}{(p-b)(p-c)}$ са $A_1(\dfrac{1}{p-b},\dfrac{1}{p-c})$;
БК на B_1 относно БКС $\{A,C\}$ са $B_1(p-c,p-a)$ или след умножаване с множителя $\dfrac{1}{(p-a)(p-c)}$ са $B_1(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{1}{p-c})$;
БК на C_1 относно БКС $\{A,B\}$ са $C_1(p-b,p-a)$ или след умножаване с множителя $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$ са $C_1(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{1}{p-b})$.

Да попълним таблицата.

относно					относно	
$\{B,C\}$	$A_1(\overline{A_1C},\overline{BA_1})$	$\Rightarrow$	$A_1(\dfrac{1}{p-b},\dfrac{1}{p-c})$	$\Rightarrow$	$\{A,B,C\}$	$A_1(0,\dfrac{1}{p-b},\dfrac{1}{p-c})$
$\{A,C\}$	$B_1(\overline{B_1C},\overline{AB_1})$	$\Rightarrow$	$B_1(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{1}{p-c})$	$\Rightarrow$	$\{A,B,C\}$	$B_1(\dfrac{1}{p-a},0,\dfrac{1}{p-c})$
$\{A,B\}$	$C_1(\overline{C_1B},\overline{AC_1})$	$\Rightarrow$	$C_1(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{1}{p-b})$	$\Rightarrow$	$\{A,B,C\}$	$C_1(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{1}{p-b},0)$

Резултатите в последната колона на горната таблица позволяват да приложим Теорема 3.8, от където следва:

Съединителните отсечки на върховете на триъгълника с допирните точки на срещулежащите им страни с вписаната в триъгълника окръжност k се пресичат в една точка G, наречена точка на Жергон, с барицентрични координати
$G(\dfrac{1}{p-a},\dfrac{1}{p-b},\dfrac{1}{p-c})$ **относно БКС $\{A,B,C\}$.**

6. N е точката на Нагел за $\triangle ABC$

Нека точките A_1, B_1, C_1 са допирните точки на външно вписаната в триъгълника окръжност k_a, допираща се съответно до страната BC и до продълженията на страните AC, AB на $\triangle ABC$.

Нека точката B_2 е допирната точка на външно вписаната в триъгълника окръжност k_b, допираща се до страната AC и до продълженията на страните AB, BC на $\triangle ABC$.

Нека точката C_3 е допирната точка на външно вписаната в триъгълника окръжност k_c, допираща се до страната AB и до продълженията на страните AC, BC на $\triangle ABC$.

Ако $CA_1 = CB_1 = x$, то $BA_1 = BC_1 = a - x$, и $AB_1 = b + x = AC_1 = c + a - x$, от където получаваме $x = p - b = CA_1$ и $a - x = p - c = BA_1$. Следователно:

БК на A_1 относно БКС $\{B,C\}$ са $A_1(p-b,p-c)$

Аналогично получаваме: БК на B_2 относно БКС $\{A,C\}$ са $B_2(p-a,p-c)$,
БК на C_3 относно БКС $\{A,B\}$ са $C_3(p-a,p-b)$

Да попълним таблицата.

относно					относно	
$\{B,C\}$	$A_1(\overline{A_1C},\overline{BA_1})$	$\Rightarrow$	$A_1(p-b,p-c)$	$\Rightarrow$	$\{A,B,C\}$	$A_1(0,p-b,p-c)$
$\{A,C\}$	$B_2(\overline{B_2C},\overline{AB_2})$	$\Rightarrow$	$B_2(p-a,p-c)$	$\Rightarrow$	$\{A,B,C\}$	$B_2(p-a,0,p-c)$
$\{A,B\}$	$C_3(\overline{C_3B},\overline{AC_3})$	$\Rightarrow$	$C_3(p-a,p-b)$	$\Rightarrow$	$\{A,B,C\}$	$C_3(p-a,p-b,0)$

Резултатите в последната колона на горната таблица позволяват да приложим Теорема 3.8, от където следва:

Съединителните отсечки на върховете на триъгълника с допирните точки на срещулежащите им страни с външно вписаните в триъгълника окръжности k_a,k_b,k_c се пресичат в една точка N, наречена точка на Нагел, с барицентрични координати $N(p-a,p-b,p-c)$ относно БКС $\{A,B,C\}$.

7. L е точката на Лемоан за $\triangle ABC$

Определение 3.8 *Правата, минаваща през връх на триъгълника и симетрична на медианата му през същия връх относно ъглополовящата отново през този връх, се нарича симедиана на триъгълника.*

Нека AA_1, AK и AA_2 са съответно медиана, ъглополовяща и симедиана за $\triangle ABC$. Тогава означаваме $\angle BAA_1=\angle CAA_2=\delta$,
$\angle KAA_1=\angle KAA_2=\varphi$ и следват равенствата :

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_2}}=\frac{AB.AA_1.sin\delta}{AC.AA_2.sin\delta}=\frac{c.AA_1}{b.AA_2}=\frac{BA_1.h_a}{CA_2.h_a}=\frac{BA_1}{CA_2}$$

или

$$\frac{BA_1}{CA_2}=\frac{c.AA_1}{b.AA_2}\ ; \tag{3.75}$$

$$\frac{S_{ABA_2}}{S_{ACA_1}}=\frac{AB.AA_2.sin(\delta+2\varphi)}{AC.AA_1.sin(\delta+2\varphi)}=\frac{c.AA_2}{b.AA_1}=\frac{BA_2.h_a}{CA_1.h_a}=\frac{BA_2}{CA_1}$$

или

$$\frac{BA_2}{CA_1}=\frac{c.AA_2}{b.AA_1}\ ; \tag{3.76}$$

Умножаваме почленно (3.75) и (3.76), отчитаме $BA_1=CA_1$ и получаваме

$$\frac{BA_1.BA_2}{CA_2.CA_1}=\frac{c^2.AA_1.AA_2}{b^2.AA_2.AA_1} \quad \text{или} \quad \frac{A_2C}{BA_2}=\frac{b^2}{c^2}\ , \tag{3.77}$$

което означава, че БК на точката A_2 относно БКС $\{B, C\}$ са $A_2(b^2, c^2)$.

Аналогично получаваме, че БК на B_2 относно БКС $\{A, C\}$ са $B_2(a^2, c^2)$, а БК на C_3 относно БКС $\{A, B\}$ са $C_2(a^2, b^2)$.

Да попълним таблицата.

относно					относно	
$\{B, C\}$	$A_2(\overline{A_2C}, \overline{BA_2})$	$\Rightarrow$	$A_2(b^2, c^2)$	$\Rightarrow$	$\{A, B, C\}$	$A_1(0, b^2, c^2)$
$\{A, C\}$	$B_2(\overline{B_2C}, \overline{AB_2})$	$\Rightarrow$	$B_2(a^2, c^2)$	$\Rightarrow$	$\{A, B, C\}$	$B_2(a^2, 0, c^2)$
$\{A, B\}$	$C_2(\overline{C_2B}, \overline{AC_2})$	$\Rightarrow$	$C_2(a^2, b^2)$	$\Rightarrow$	$\{A, B, C\}$	$C_2(a^2, b^2, 0)$

Резултатите в последната колона на горната таблица позволяват да приложим Теорема 3.8, от където следва:

Симедианите на триъгълника се пресичат в една точка L, наречена точка на Лемоан, с барицентрични координати $L(a^2, b^2, c^2)$ относно БКС $\{A, B, C\}$.

8. O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност

Нека точка O е пресечната точка на симетралите на страните на $\triangle ABC$. Следователно O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и $OA = OB = OC = R$, $\angle AOB = 2\gamma$, $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle COA = 2\beta$. Съгласно геометричната интерпретация на барицентричните координати в равнината, за БК на точка O относно БКС $\{A, B, C\}$ имаме $O(OBC, AOC, ABO)$, където OBC, AOC, ABO са ориентираните лица на посочените триъгълници. Тъй като $OBC = \frac{1}{2}R^2 sin2\alpha$, $AOC = \frac{1}{2}R^2 sin2\beta$, $ABO = \frac{1}{2}R^2 sin2\gamma$, то една тройка барицентрични координати на точка O са $O(sin2\alpha, sin2\beta, sin2\gamma)$.

Центърът O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност има барицентрични координати $O(sin2\alpha, sin2\beta, sin2\gamma)$ относно БКС $\{A, B, C\}$.

9. P е центърът на тежестта на периметъра на $\triangle ABC$

Нека точките A_1, B_1, C_1 са средите съответно на страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ и точка P е центърът на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност. Известно е, че $A_1B_1 = \dfrac{c}{2}$, $B_1C_1 = \dfrac{a}{2}$, $A_1C_1 = \dfrac{b}{2}$. Вече знаем, че барицентрични координати на P относно БКС $\{A_1, B_1, C_1\}$ са $P(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}, \dfrac{c}{2})$ или можем да изберем и тройката $P(a, b, c)$.

Следователно нормираните барицентрични координати на P относно БКС $\{A_1, B_1, C_1\}$ са $P(\dfrac{a}{a+b+c}, \dfrac{b}{a+b+c}, \dfrac{c}{a+b+c})$ и ако T е произволна точка, то записваме

$$\overrightarrow{TP} = \frac{a\overrightarrow{TA_1} + b\overrightarrow{TB_1} + c\overrightarrow{TC_1}}{a+b+c},$$

$$\overrightarrow{TP} = \frac{a.\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}) + b.\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TC}) + c.\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB})}{a+b+c},$$

$$\overrightarrow{TP} = \frac{(b+c)\overrightarrow{TA} + (a+c)\overrightarrow{TB} + (a+b)\overrightarrow{TC}}{2(a+b+c)}.$$

От последното равенство следва:

Центърът P на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност, наречен център на тежестта на периметъра на $\triangle ABC$, има барицентрични координати $P(b+c,\ a+c,\ a+b)$ относно БКС $\{A, B, C\}$.

3.5 Задачи

Определение 3.9 *Трите прави, всяка от които минава точно през един от върховете на даден триъгълник и се пресичат в една точка, се наричат чевиани или прави на Чева за този триъгълник.*

Така например медианите, височините или ъглополовящите на триъгълника са негови три специални тройки чевиани.

Задача 3.1 *Да се намерят отношенията на отсечките, на които се разделят чевианите на триъгълника от забележителните му точки.*

Решение. Нека разглежданият триъгълник ABC е избран за БКС т.е. $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $m^A = 1$, $m^B = 1$, $m^C = 1$ и AA_1, BB_1, CC_1 където $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, са чевиани. Нека $X(m_1, m_2, m_3)$ е пресечната точка на чевианите. Следователно точките A_1, B_1, C_1 имат координати $A_1(0, m_2, m_3)$, $B_1(m_1, 0, m_3)$, $C_1(m_1, m_2, 0)$ като
$m^{A_1} = m_2 + m_3$, $m^{B_1} = m_1 + m_3$, $m^{C_1} = m_1 + m_2$.

Тъй като тройките точки AA_1X, BB_1X, CC_1X са колинеарни, то от Теорема 3.5 следват

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & m^3 \\ m^1 & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow III p. = m_1 I p. + II p. \Rightarrow X(m_1, m_2 + m_3) \text{относно} \{AA_1\};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m_1 & 0 & m^3 \\ m^1 & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow III p. = m_2 I p. + II p. \Rightarrow X(m_2, m_1 + m_3) \text{относно} \{BB_1\};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m_1 & m_2 & 0 \\ m^1 & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow III p. = m_3 I p. + II p. \Rightarrow X(m_3, m_1 + m_2) \text{относно} \{CC_1\};$$

Съгласно получените резултати и геометричната интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка върху права можем да запишем:

$$\begin{aligned} \overline{AX} : \overline{XA_1} &= (m_2 + m_3) : m_1; \\ \overline{BX} : \overline{XB_1} &= (m_1 + m_3) : m_2; \\ \overline{CX} : \overline{XC_1} &= (m_1 + m_2) : m_3. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Следователно за конкретните забележителни точки на триъгълника са в сила:

$$X = M(1,1,1) \Longrightarrow \overline{AM} : \overline{MA_1} = \overline{BM} : \overline{MB_1} = \overline{CM} : \overline{MC_1} = 2 : 1;$$

$$X = I(a,b,c) \Longrightarrow \frac{\overline{AI}}{\overline{IA_1}} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{\overline{BI}}{\overline{IB_1}} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{\overline{CI}}{\overline{IC_1}} = \frac{a+b}{c};$$

$$X = I_a(-a,b,c) \Longrightarrow \frac{\overline{AI_a}}{\overline{I_aA_1}} = -\frac{b+c}{a}, \ \frac{\overline{BI_a}}{\overline{I_aB_1}} = \frac{c-a}{b}, \ \frac{\overline{C_aI}}{\overline{I_aC_1}} = \frac{b-a}{c};$$

$$X = H(tg\alpha, tg\beta, tg\gamma) \Longrightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}} = \frac{tg\beta + tg\gamma}{tg\alpha} = \frac{sin(\beta+\gamma).cos\alpha}{cos\beta.cos\gamma.sin\alpha} = \frac{cos\alpha}{cos\beta.cos\gamma},$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}} = \frac{cos\beta}{cos\alpha.cos\gamma}, \quad \frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}} = \frac{cos\gamma}{cos\alpha.cos\beta};$$

$$X = N(p-a, p-b, p-c) \Longrightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{NA_1}} = \frac{2p-(b+c)}{p-a} = \frac{a}{p-a},$$

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NB_1}} = \frac{b}{p-b}, \quad \frac{\overline{CN}}{\overline{NC_1}} = \frac{c}{p-c};$$

$$X = G(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}) \Longrightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{GA_1}} = \frac{p-c+p-b}{(p-b)(p-c)(\frac{1}{p-a})} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)},$$

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GB_1}} = \frac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)}, \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{GC_1}} = \frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)};$$

$$X = L(a^2,b^2,c^2) \Longrightarrow \frac{\overline{AL}}{\overline{LA_1}} = \frac{b^2+c^2}{a^2}, \ \frac{\overline{BL}}{\overline{LB_1}} = \frac{a^2+c^2}{b^2}, \ \frac{\overline{CL}}{\overline{LC_1}} = \frac{a^2+b^2}{c^2};$$

$$X = O(sin2\alpha, sin2\beta, sin2\gamma) \Longrightarrow$$

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} = \frac{sin2\beta + sin2\gamma}{sin2\alpha} = \frac{2sin(\beta+\gamma)(cos(\beta-\gamma)}{2sin\alpha\ cos\alpha} = \frac{cos(\beta-\gamma)}{cos\alpha},$$

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{OB_1}} = \frac{cos(\gamma-\alpha)}{cos\beta}, \quad \frac{\overline{CO}}{\overline{OC_1}} = \frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\gamma};$$

$$X = P(b+c, a+c, a+b) \Longrightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PA_1}} = \frac{b+c+2a}{b+c} = \frac{2p+a}{2p-a},$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PB_1}} = \frac{2p+b}{2p-b}, \quad \frac{\overline{CP}}{\overline{PC_1}} = \frac{2p+c}{2p-c};$$

Задача 3.2 *Да се докаже, че пресечните точки на трите външни ъглополовящи на триъгълника с продълженията на страните му, лежат на една права.*

Решение. Центровете I_a, I_b, I_c на всяка от външно вписаните окръжности лежат върху ъглополовящите на вътрешните ъгли съответно през върховете A, B, C. Следователно тези ъглополовящи имат следните уравнения:

$$AI_b : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & -b & c \end{vmatrix} = cy + bz = 0$$

$$BI_a : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & b & c \end{vmatrix} = cx + az = 0$$

$$CI_a : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & b & c \end{vmatrix} = bx + ay = 0$$

Да означим : $A_2 = AI_b \cap BC,\ B_2 = BI_a \cap AC,\ C_2 = CI_a \cap AB$. Като припомним, че $BC : x = 0,\ CA : y = 0,\ AB : z = 0$, то получаваме следните координати за точките $A_2(0, b, -c), B_2(-a, 0, c), C_2(-a, b, 0)$. Сега от

$$\triangle : \begin{vmatrix} 0 & b & -c \\ -a & 0 & c \\ -a & b & 0 \end{vmatrix} = abc - abc = 0$$

и Теорема 3.5 следва колинеарността на точките A_2, B_2, C_2.

Задача 3.3 *В $\triangle ABC$ е вписана окръжност k и са избрани две негови страни . Да се докаже, че следните тройки прави минават през една точка:*
1. правата, съединяваща пресечните точки на избраните страни, с ъглополовящите на противоположните им ъгли;
2. правата, съединяваща петите на височините към избраните страни;
3. правата, съединяваща допирните точки на избраните страни, с вписаната окръжност.

Решение. Да изберем страните AB и BC.
Тъй като центърът I на вписаната окръжност k има относно БКС $\{A, B, C\}$

барицентрични координати $I(a,b,c)$, то съгласно Теорема 3.8 следва : $AB \cap CI = I_3(a,b,0)$, $BC \cap AI = I_1(0,b,c)$. Тогава за уравнението на първата права получаваме

$$I_1I_3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & b & c \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = acy - abz - bcx = 0.$$

След умножаване с $\dfrac{1}{abc}$, намираме следната тройка барицентрични координати на правата $I_1I_3(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c})$.

Тъй като ортоцентърът H има относно БКС $\{A,B,C\}$ барицентрични координати $H(tg\alpha, tg\beta, tg\gamma)$, то съгласно Теорема 3.8 следва : $AB \cap CH = H_3(tg\alpha, tg\beta, 0)$, $BC \cap AH = H_1(0, tg\beta, tg\gamma)$. Тогава за уравнението на втората права получаваме

$$H_1H_3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & tg\beta & tg\gamma \\ tg\alpha & tg\beta & 0 \end{vmatrix} = -tg\beta tg\gamma.x - -tg\alpha tg\gamma.y - -tg\alpha tg\beta.z = 0.$$

След умножаване с $\dfrac{1}{tg\alpha\ tg\beta\ tg\gamma}$, намираме следната тройка барицентрични координати на правата $H_1H_3(\dfrac{1}{tg\alpha}, -\dfrac{1}{tg\beta}, \dfrac{1}{tg\gamma})$ или
$H_1H_3(cotg\alpha, -cotg\beta, cotg\gamma)$.

Тъй като точката на Жергон G има относно БКС $\{A,B,C\}$ барицентрични координати $G(\dfrac{1}{p-a}, \dfrac{1}{p-b}, \dfrac{1}{p-c}).)$, то съгласно Теорема 3.8 следва : $AB \cap CG = G_3(\dfrac{1}{p-a}, \dfrac{1}{p-b}, 0)$, $BC \cap AG = G_1(0, \dfrac{1}{p-b}, \dfrac{1}{p-c})$. Тогава за уравнението на третата права получаваме

$$G_1G_3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & \dfrac{1}{p-b} & \dfrac{1}{p-c} \\ \dfrac{1}{p-a} & \dfrac{1}{p-b} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{x}{(p-b)(p-c)} + \frac{y}{(p-a)(p-c)} - \frac{z}{(p-a)(p-b)} = 0.$$

След умножаване с $(p-a)(p-b)(p-c)$, намираме следната тройка барицентрични координати на правата $G_1G_3(p-a, -(p-b), p-c)$.

Сега да разгледаме детерминантата, чиито редове са барицентричните координати на правите $I_1I_3,\ H_1H_3,\ G_1G_3$.

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ cotg\alpha & -cotg\beta & cotg\gamma \\ p-a & -(p-b) & p-c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ cotg\alpha & cotg\beta & cotg\gamma \\ p-a & p-b & p-c \end{vmatrix}$$

Прилагайки косинусова и синусова теореми, изразяваме съответно $cos\alpha$ и $sin\alpha$ и получаваме следното представяне на $cotg\alpha$:

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\frac{\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2}{2\mathrm{bc}}}{\frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{R}}} = \frac{2\mathrm{R}}{2\mathrm{abc}}(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2).$$

По аналогичен начин намираме и

$$\mathrm{cotg}\beta = \frac{2\mathrm{R}}{2\mathrm{abc}}(\mathrm{a}^2+\mathrm{c}^2-\mathrm{b}^2), \quad \mathrm{cotg}\gamma = \frac{2\mathrm{R}}{2\mathrm{abc}}(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2).$$

От друга страна

$$p(p-a) = \frac{a+b+c}{2}.\frac{b+c-a}{2} = \frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc-a^2) = \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2) + \frac{abc}{2a},$$

от където следва

$$b^2+c^2-a^2 = 4p(p-a) - 2abc\frac{1}{a}\ .$$

Тогава

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{abc}}[4\mathrm{p}(\mathrm{p}-\mathrm{a}) - 2\mathrm{abc}\frac{1}{\mathrm{a}}] = \frac{4\mathrm{pR}}{\mathrm{abc}}(\mathrm{p}-\mathrm{a}) - 2\mathrm{R}\frac{1}{\mathrm{a}}.$$

Но знаем, че $S_{ABC} = S = \dfrac{abc}{4R}$.

Следователно

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{S}}(\mathrm{p}-\mathrm{a}) - 2\mathrm{R}\frac{1}{\mathrm{a}}\ .$$

Аналогично получаваме

$$\mathrm{cotg}\beta = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{S}}(\mathrm{p}-\mathrm{b}) - 2\mathrm{R}\frac{1}{\mathrm{b}}\ ,\ \mathrm{cotg}\gamma = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{S}}(\mathrm{p}-\mathrm{c}) - 2\mathrm{R}\frac{1}{\mathrm{c}}\ ,$$

Последните резултати показват, че вторият ред на $\triangle_1$ е линейна комбинация на първи и втори редове или по-точно

$$II\text{ред} = \frac{p}{S}.III\text{ред} - 2R.I\text{ред}\ ,$$

от където следва $\triangle_1 = 0$. Съгласно Теорема 3.7 правите $I_1I_3,\ H_1H_3,\ G_1G_3$ минават през една точка.

Задача 3.4 *Точка I е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, точка B_1 е среда на страната AC, а A_2 е допирната точка на външно вписаната окръжност до страната BC. Да се докаже, че $\angle ACB = 90^0$ тогава и само тогава, когато точките I, B_1, A_2 са колинеарни.*

Решение. Относно БКС $\{A, B, C\}$ трите точки I, B_1, A_2 имат барицентрични координати $I(a, b, c)$, $B_1(1, 0, 1)$, $A_2(0, p-b, p-c)$. Съгласно Теорема 3.5 точките I, B_1, A_2 са колинеарни тогава и само тогава, когато

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & p-b & p-c \end{vmatrix} = p(c-a-b) - bc + ab + bc = \frac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

Съгласно Питагоровата теорема $c^2 = a^2 + b^2 \Longleftrightarrow \angle ACB = 90^0$.

Задача 3.5 *Във всеки триъгълник точката на Нагел (N), центърът на тежестта на периметъра (P), медицентърът (M) и центърът на вписаната окръжност (I) лежат на една права (права на Нагел), при което: $\overline{NP} : \overline{PM} : \overline{MI} = 3 : 1 : 2$.*

Решение. Да запишем барицентричните координати на забележителните точки от условието на задачата: $N(p-a, p-b, p-c)$, $P(b+c, a+c, a+b)$, $M(1, 1, 1)$, $I(a, b, c)$. Разглеждаме детерминантите:

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} p-a & p-b & p-c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} p-a & p-b & p-c \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

Тъй като за $\triangle_1$ е в сила $III\text{ред} = \frac{1}{p}I\text{ред} + \frac{1}{p}II\text{ред}$, а за $\triangle_2$ е в сила $III\text{ред} = 2I\text{ред} + II\text{ред}$, то $\triangle_1 = 0$ и $\triangle_2 = 0$, т.е. тройките точки N, I, M и N, I, P са колинеарни, при което точките M и P имат следните барицентрични координати :

$M(\frac{1}{p}m^N, \frac{1}{p}m^I)$, относно $\{N, I\}$ и $P(2m^N, m^I)$, относно $\{N, I\}$.

Като отчетем, че $m^N = p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p$, $m^I = a + b + c = 2p$, получаваме следните БК относно БКС $\{N, I\}$: $M(1, 2)$, $P(2p, 2p)$ или $P(1, 1)$.

Следователно нормираните барицентрични координати относно БКС $\{N, I\}$ са :

$M(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Съгласно геометричната интерпретация на нормираните барицентрични координати на точките относно барицентрична координатна система върху права имаме

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{NM}} = \frac{1}{2}\ ; \quad \frac{\overline{PI}}{\overline{NP}} = \frac{1}{1}\ . \tag{3.79}$$

Последните равенства означават, че точка P е среда на отсечката NI, а $NM = \frac{2}{3}NI$. Тогава, ако условно означим $NI = 3x$, то

$\overline{NP} : \overline{PM} : \overline{MI} = \frac{3}{2}x : \frac{1}{2}x : x = 3 : 1 : 2.$

Задача 3.6 *Да се докаже, че пресечните точки на две вътрешни ъглополовящи на триъгълника съответно със срещулежащите им страни и пресечната точка на външната ъглополовяща на третия ъгъл на триъгълника с продължението на срещулежащата страна лежат на една права.*

Задача 3.7 *Допирните точки на страните BC, AC, AB на $\triangle ABC$ с вписаната в него окръжност са съответно M, N, P, а симетричните им точки относно центъра на вписаната окръжност са съответно M_1, N_1, P_1. Да се докаже, че правите AM_1, BN_1, CP_1 минават през една точка .*

Задача 3.8 *Нека в равнината е въведена барицентрична координатна система, относно която произволна точка I има барицентрични координати $I(x, y, z)$. Съответствието между точките на тази равнина, при което на точка $I(x, y, z)$ се съпоставя точката $I^*(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ се нарича изотомично.*

Точката $I^*(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$, която е изотомична на центъра $I(a, b, c)$ на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, се нарича център на антибисектрисите.

Точката $H^*(\mathrm{cotg}\alpha, \mathrm{cotg}\beta, \mathrm{cotg}\gamma)$, която е изотомична на ортоцентъра $H(tg\alpha, tg\beta, tg\gamma)$ на $\triangle ABC$, се нарича негов антиортоцентър.

Да се докаже, че за всеки триъгълник центърът на антибисектрисите, антиортоцентърът и точката на Нагел са колинеарни, като

$$\overline{NH^*} : \overline{H^*I^*} = -(ab + bc + ca) : 2p^2.$$

Съдържание

1 Псевдоквадрат и трибедреник **3**

1.1 Псевдоквадрат 3

1.1.1 Определение и характеристика на псевдоквадрата 3

1.1.2 Задачи 5

1.2 Трибедреник 6

1.2.1 Определение и свойства на трибедреника 6

1.2.2 Задачи 11

2 Вписани, описани, външно описани и оградени четириъгълници **14**

2.1 Вписан четириъгълник 15

2.1.1 Характеристики на вписания четириъгълник 15

2.1.2 Свойства на вписания четириъгълник 17

2.1.3 Вписан четириъгълник с перпендикулярни диагонали . . . 21

2.2 Описан четириъгълник 26

2.2.1 Характеристики на описания четириъгълник 26

2.2.2 Свойства на описания четириъгълник 27

2.2.3 Описан четириъгълник с перпендикулярни диагонали . . . 31

2.3 Външно описан четириъгълник 31

2.3.1 Определение и характеристики на външно описания четириъгълник 31

2.3.2 Свойство на външно описания четириъгълник 33

2.4 Ограден четириъгълник 34

2.5 Задачи 36

3 Геометрия на триъгълника **38**

3.1 Барицентрични координати на точка върху права 38

3.1.1 Определение и свойства на барицентричните координати на точка върху права , геометрична интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка върху права 38

3.1.2 Преход от една барицентрична координатна система върху дадена права в друга барицентрична координатна система върху същата права. 39

3.2 Барицентрични координати на точка в равнината 41

3.2.1 Определение и свойства на барицентричните координати на точка в равнината, геометрична интерпретация на нормираните барицентрични координати на точка в равнината 41

3.2.2 Преход от барицентрична координатна система в равнината в барицентрична координатна система върху права от тази равнина 43

3.2.3 Преход от барицентрична координатна система в равнината в барицентрична координатна система в същата равнина 47

3.3 Уравнение на права относно барицентрична координатна система в равнината 48

3.4 Барицентрични координати на забележителните точки на триъгълника 52

3.5 Задачи 60