НЕРАВЕНСТВО НА ТРИЪГЪЛНИКА В ЗАДАЧИ С КВАДРАТНИ КОРЕНИ

Даниела Цветкова, Марта Теофилова, Пенка Рангелова

Резюме. *В работата е даден пример за реализиране на вътрешнопредметни връзки в обучението по математика чрез използване на геометричен подход за решаване на задачи от алгебрата и анализа. Разгледано е едно приложение на неравенството на триъгълника за решаване на ирационални уравнения и неравенства, и намиране на най-малка и най-голяма стойност на функция (аналитичен израз). Използван е векторният апарат в декартова координатна система. Предложената система от задачи е подходяща за разширяване на знанията на учениците от профилираните паралелки по математика в 11. клас.*

Ключови думи: неравенство на триъгълника, ирационални уравнения, ирационални неравенства, вектори, координати.

1. Въведение

Учебният материал за 11. клас в профилираната подготовка [4] дава възможност за следващите разглеждания. Нека относно декартова координатна система в равнината са зададени векторите $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$. Дължината $|\vec{a}|$ на вектора $\vec{a}$ се пресмята съгласно формулата $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Координатите на сбора $\vec{a} + \vec{b}$ и разликата $\vec{a} - \vec{b}$ се намират съответно чрез $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$. Аналогично се пресмята за вектори, зададени в пространството с три координати: ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, имаме $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$.

Два ненулеви вектора се наричат *колинеарни*, ако лежат върху една права или са успоредни на една права. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, точно когато $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Известно е, че за всеки три точки A, B и C в пространството е изпълнено неравенството $AB + BC \geq AC$, като равенството се достига, точно когато трите точки лежат върху една права. Това неравенство е известно като *неравенство на триъгълника*. Ако означим насочените отсечки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, то съгласно правилото за намиране на сбор на два вектора имаме $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Тогава неравенството на триъгълника получава следния векторен запис

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|. \tag{1}$$

Ако в (1) заменим вектора $\vec{b}$ се неговия противоположен вектор $(-\vec{b})$, получаваме неравенството на триъгълника във вида

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|. \tag{2}$$

Равенството в (1) се достига, точно когато векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} > 0$, а равенството в (2) се достига, точно когато $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са разнопосочно колинеарни ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), т.е. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} < 0$. Неравенството на триъгълника (1) може да се обобщи за произволен краен брой вектори $n \geq 2$ във вида

$$|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + ... + |\vec{v}_n| \geq |\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + ... + \vec{v}_n|, \tag{3}$$

като равенството се достига при еднопосочна колинеарност на векторите. Ако в неравенството (1) заменим вектора $\vec{a}$ с $\vec{a} - \vec{b}$, а вектора $\vec{b}$ с $\vec{b} - \vec{a}$, то от получените две неравенства следва

$$\Big| |\vec{a}| - |\vec{b}| \Big| \leq |\vec{a} - \vec{b}|. \tag{4}$$

Равенството в (4) се достига, точно когато $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

2. Приложение на неравенството на триъгълника в алгебрични задачи

2.1. Решаване на ирационални уравнения и неравенства

Традиционният подход за решаване на такива задачи е свеждане до рационално уравнение (съотв. неравенство) чрез повдигане на двете страни във втора степен. Ние ще покажем друг метод – чрез използване на неравенството на триъгълника за подходящо избрани вектори. Този метод е удобен за прилагане, когато в едната страна на уравнението (неравенството) имаме сбор или разлика на квадратни корени и подкоренните величини могат да се представят като сума на квадрати.

Задача 1. Намерете решенията на уравнението

$$\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+4}=2\sqrt{2} \quad [3].$$

Решение. За прилагане на неравенството на триъгълника (1), едната страна на уравнението трябва е сбор от дължините на два вектора, а другата – дължината на сбора на векторите. Затова първо отделяме точни квадрати в подкоренните величини

$$\sqrt{(x-1)^2+3}+\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+1}=2\sqrt{2}.$$

Вижда се, че дефиниционната област на уравнението е всяко $x \in \mathbb{R}$. Нека разгледаме векторите $\vec{a}(x-1,\sqrt{3})$ и $\vec{b}(\sqrt{3}-x,1)$. Тогава $\vec{a}+\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$. Освен това

$$|\vec{a}|=\sqrt{(x-1)^2+3},\quad |\vec{b}|=\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+1},\quad |\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{2}.$$

Отбелязваме, че тъй като $(a-b)^2=(b-a)^2$, то координатите на векторите можем да изберем така, че координати на сбора им да не зависят от x, тъй като в дясната страна на уравнението имаме константа. Съгласно неравенството на триъгълника (1) получаваме $\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+4}\geq 2\sqrt{2}$, като интересуващото ни равенство се достига, точно когато $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни, т.е. при $\frac{x-1}{\sqrt{3}-x}=\frac{\sqrt{3}}{1}$. Оттук намираме $x=2(\sqrt{3}-1)$.

Задача 2. Намерете решенията на уравнението

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4 \quad [6].$$

Решение. Уравнението е еквивалентно на

$$\sqrt{3(2-\cos x)^2+3\sin^2 x}+\sqrt{(2-\sqrt{3}\sin x)^2+3\cos^2 x}=4.$$

Нека $\vec{a}(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x,\sqrt{3}\sin x)$ и $\vec{b}(\sqrt{3}\cos x,2-\sqrt{3}\sin x)$. Пресмятаме $\vec{a}+\vec{b}=(2\sqrt{3},2)$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$. Тогава, съгласно (1), за $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаме

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}\geq 4,$$

като равенството е изпълнено, точно когато $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т.е.

$$\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x}{\sqrt{3}\cos x} = \frac{\sqrt{3}\sin x}{2 - \sqrt{3}\sin x} > 0.$$

Последните условия са еквивалентни на системата от двете условия: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1$, $\sin x > 0$. Решенията на уравнението са $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, които удовлетворяват и второто условие. Следователно те са корените на даденото уравнение.

Задача 3. Намерете решенията на уравнението

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 10x + 6y + 34} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} = \sqrt{13}.$$

Решение. Уравнението е еквивалентно на

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{13}.$$

Нека $\vec{a}(x+5, y+3)$, $\vec{b}(x+2, y+1)$. Разглеждаме разликата $\vec{a} - \vec{b} = (3, 2)$. Тъй като $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$, то съгласно (2) е изпълнено

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 10x + 6y + 34} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} \geq \sqrt{13},$$

като равенството се достига, точно когато $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, т.е. при $\frac{x+5}{x+2} = \frac{y+3}{y+1} < 0$. От последните две условия получаваме решенията на даденото уравнение $y = \frac{2x+1}{3}$, $x \in [-5, -2]$ (краищата на интервала се включват, тъй като също са решения на уравнението).

Задача 4. Намерете корените на уравнението

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x+y)^2 + (2x-y)^2 + 1} + \sqrt{(x-2y)^2 + (y+1)^2 + 9}\\ &= \sqrt{(2x+1)^2 + 9y^2 + 16} \quad [6].\end{aligned}$$

Решение. Тъй като аналитичните изрази под знака на квадратния корен са суми на три квадрата, тук ще работим с вектори в тримерното пространство. Нека $\vec{a}(x+y, 2x-y, 1)$ и $\vec{b}(2y-x, y+1, 3)$. Тогава $\vec{a} + \vec{b} = (3y, 2x+1, 4)$. Следователно даденото уравнение има вида $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, което е изпълнено, точно когато $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Необходимите и достатъчни условия за това са $\frac{x+y}{2y-x} = \frac{2x-y}{y+1} = \frac{1}{3}$. От тях получаваме системата от уравненията $4x + y = 0$, $6x - 4y = 1$ с единствено решение $x = \frac{1}{22}$, $y = -\frac{2}{11}$.

Задача 5. Намерете решенията на

$$\sqrt{(x+3)^2+4} - \sqrt{(x+1)^2+1} = \sqrt{5}.$$

Решение. Тъй като в лявата страна на уравнението имаме разлика, тук ще приложим неравенството (4). Избираме векторите $\vec{a}(x+3,2)$ и $\vec{b}(x+1,1)$ и намираме $\vec{a}-\vec{b} = (2,1)$, откъдето $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$. Следователно от (4) за всяко x имаме

$$\sqrt{(x+3)^2+4} - \sqrt{(x+1)^2+1} \leq \sqrt{5},$$

като равенството се достига, точно когато $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, т.е. $\frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{1}$. Така получаваме $x = 1$.

Задача 6. Намерете решенията на неравенството

$$\sqrt{(x-8)^2+4} + \sqrt{(x-3)^2+100} \leq 13.$$

Решение. Нека $\vec{a}(8-x,2)$ и $\vec{b}(x-3,10)$. Тогава $\vec{a}+\vec{b} = (5,12)$ и $|\vec{a}+\vec{b}| = 13$. Съгласно (1) за всяко реално x е изпълнено

$$\sqrt{(x-8)^2+4} + \sqrt{(x-3)^2+100} \geq 13.$$

Следователно в даденото нестрого неравенство може да бъде изпълнено само равенството, което се достига при $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т.е. точно когато $\frac{8-x}{x-3} = \frac{1}{5}$, откъдето намираме $x = \frac{43}{6}$.

Задача 7. Намерете решенията на

$$\sqrt{9\sin^4 x + 1} + 3\sqrt{\cos^4 x + 1} < 5.$$

Решение. Нека $\vec{a}(3\sin^2 x, 1)$, $\vec{b}(3\cos^2 x, 3)$, откъдето $\vec{a}+\vec{b} = (3,4)$. Следователно, съгласно (1), за тези вектори и за всяко $x \in \mathbb{R}$ е в сила неравенството $\sqrt{9\sin^4 x + 1} + 3\sqrt{\cos^4 x + 1} \geq 5$, което показва, че даденото неравенство няма решения.

Отбелязваме, че редица задачи за уравнения и неравенства, които могат да се решат с неравенството на триъгълника или с неравенството на Коши-Буняковски-Шварц, са разгледани в [5].

2.2. Решаване на системи уравнения и неравенства

Задача 8. Намерете решенията на системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=6\\ x^2+2y^2-9x+14=0.\end{array}\right.$$

Решение. Нека разгледаме първото уравнение от системата и векторите $\vec{a}(x+3,y)$, $\vec{b}(x-3,y)$. Пресмятаме $\vec{a}-\vec{b}=(6,0)$, $|\vec{a}-\vec{b}|=6$. Следователно първото уравнение има вида $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, което съгласно (2) е изпълнено, точно когато $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, т.е. при $\frac{x+3}{x-3}=\frac{y}{y}<0$. Ако $y\neq 0$, то за x получаваме уравнението $\frac{x+3}{x-3}=1$, което няма решения. Следователно $y=0$ и дадената система е еквивалентна на системата: $|x+3|+|x-3|=6$, $x^2-9x+14=0$. Корените на второто уравнение са $x=2$ и $x=7$, като само $x=2$ удовлетворява и първото уравнение заедно с условието $\frac{x+3}{x-3}<0$. Следователно решението на системата е $(2;0)$.

Задача 9. Намерете решенията на системата

$$\left|\begin{array}{l}x+y+z=6\\ \sqrt{4-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\sqrt{25-z^2}=8.\end{array}\right.$$

Решение. Допустимите стойности за трите неизвестни са: $x\in[-2,2]$, $y\in[-3,3]$, $z\in[-5,5]$. Нека разгледаме векторите

$$\vec{a}(x,\sqrt{4-x^2}),\quad \vec{b}(y,\sqrt{9-y^2})\ \text{ и }\ \vec{c}(z,\sqrt{25-z^2}).$$

Съгласно условието на задачата сумата им е $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(6,8)$. За дължините им е изпълнено $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=5$ и $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=10$. Тогава за тези вектори е в сила равенството $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$, което съгласно (3) е изпълнено, точно когато трите вектора са еднопосочно колинеарни. В такъв случай всеки от тях е еднопосочно колинеарен и на тяхната сума, т.е. са изпълнени условията

$$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}=\frac{z}{\sqrt{25-z^2}}=\frac{3}{4}.$$

Следователно $x,y,z>0$ и $4x=3\sqrt{4-x^2}$, $4y=3\sqrt{9-y^2}$, $4z=3\sqrt{25-z^2}$. Така установяваме, че $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{9}{5}$, $z=3$ е решението на дадената система.

Задача 10. Намерете решенията на системата неравенства

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \geq 2\sqrt{5} \\ \sqrt{x^2+(y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} \leq 6\sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Решение. Нека разгледаме първото неравенство и векторите $\vec{a}(x,y)$, $\vec{b}(x-4,y-2)$. Разликата им е $\vec{a}-\vec{b}=(4,2)$ с дължина $|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{5}$. Тогава, съгласно неравенството на триъгълника за разлика на два вектора (4), е изпълнено

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \leq 2\sqrt{5}.$$

Следователно в първото неравенство е възможно само равенството, което се достига, точно когато векторите са колинеарни, т.е. $\frac{x}{x-4}=\frac{y}{y-2}$, откъдето получаваме $x=2y$. За второто неравенство разглеждаме векторите $\vec{c}(x,8-y)$ и $\vec{d}(6-x,y-2)$. Сборът им е $\vec{c}+\vec{d}=(6,6)$ с дължина $|\vec{c}+\vec{d}|=6\sqrt{2}$. Следователно, съгласно (1), е изпълнено неравенството

$$\sqrt{x^2+(y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2} \geq 6\sqrt{2}.$$

Тогава и във второто неравенство от системата е възможно само равенството, което се достига, точно когато $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{d}$, т.е. при $\frac{x}{6-x}=\frac{8-y}{y-2}>0$, откъдето получаваме $x+y=8$ и $\frac{x}{6-x}>0$. Така достигаме до системата от условията: $x=2y$, $x+y=8$, $\frac{x}{6-x}>0$ с единствено решение $x=\frac{16}{3}$, $y=\frac{8}{3}$.

2.3. Доказване на ирационални неравенства

Задача 11. Нека $a,b,c>0$. Докажете неравенството

$$\sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} \geq \sqrt{a^2+ac+c^2} \quad [2].$$

Решение. Записваме неравенството в следния еквивалентен вид

$$\sqrt{(b-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}} + \sqrt{(b-\frac{c}{2})^2+\frac{3c^2}{4}} \geq \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

Нека разгледаме векторите $\vec{u}(\frac{a}{2}-b,\frac{a\sqrt{3}}{2})$ и $\vec{v}(b-\frac{c}{2},\frac{c\sqrt{3}}{2})$. Тогава $|\vec{u}|=\sqrt{a^2-ab+b^2}$ и $|\vec{v}|=\sqrt{b^2-bc+c^2}$. Пресмятаме $\vec{u}+\vec{v}=(\frac{a-c}{2},\frac{\sqrt{3}(a+c)}{2})$, откъдето $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{a^2+ac+c^2}$. Следователно, съгласно (1), за тези вектори е в сила желаното неравенство. Равенството се достига, точно когато $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$, от което получаваме $b = \frac{ac}{a+c}$.

Задача 12. Нека $a_1, a_2, ..., a_{2n} \in \mathbb{R}$. Докажете неравенството

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+...+\sqrt{a_{2n}^2+(1-a_1)^2} \geq n\sqrt{2} \quad [1].$$

Решение. Разглеждаме следните $2n$ на брой вектори:

$$\begin{aligned}&\vec{v}_1(a_1, 1-a_2),\ \ \vec{v}_2(1-a_3, a_2),\ \ \vec{v}_3(a_3, 1-a_4),\ \dots\ ,\\ &\vec{v}_{2n-1}(a_{2n-1}, 1-a_{2n}),\ \vec{v}_{2n}(1-a_1, a_{2n}).\end{aligned}$$

Тяхната сума е векторът $\vec{u} = \vec{v}_1+\vec{v}_2+...+\vec{v}_{2n} = (n, n)$, чиято дължина е $|\vec{u}| = n\sqrt{2}$. Тогава, съгласно (3), даденото неравенство е вярно.

3. Намиране на най-голяма и най-малка стойност на функция и аналитичен израз

Задача 13. Намерете най-малката стойност на функцията

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}.$$

Решение. Дефиниционната област на $f(x)$ е всяко $x \in \mathbb{R}$. Преобразуваме $f(x)$ във вида

$$f(x) = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Разглеждаме векторите $\vec{a}(x+\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ и $\vec{b}(\frac{1}{2}-x, \frac{\sqrt{3}}{2})$ и пресмятаме $\vec{a}+\vec{b} = (1, \sqrt{3})$. Следователно $|\vec{a}+\vec{b}| = 2$ и съгласно неравенството (1) за всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено $f(x) \geq 2$. Остава да намерим стойност на аргумента $x = x_0$, за която $f(x_0) = 2$. Използваме, че равенството в неравенството на триъгълника (1) се достига, точно когато $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, т.е. при $\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Така намираме $x = 0$. Следователно $f_{\text{НМС}} = f(0) = 2$.

Задача 14. Намерете най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = \sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

Решение. Имаме $f(x) = \sqrt{x^2+9} - \sqrt{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}}$. Тогава нека $\vec{a}(x,3)$ и $\vec{b}(x-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$. Пресмятаме $\vec{a}-\vec{b} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2})$ и $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{7}$. Следователно, съгласно (4), за всяко $x \in \mathbb{R}$ е в сила неравенството $f(x) \leq \sqrt{7}$, като равенството се достига при $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, откъдето получаваме $x = \frac{3\sqrt{3}}{5}$. Така установихме, че $f_{\text{НГС}} = f(\frac{3\sqrt{3}}{5}) = \sqrt{7}$.

Задача 15. Намерете най-малката стойност на аналитичния израз

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+9} + \sqrt{z^2+16}, \text{ ако } x+y+z = 15 \quad [3].$$

Решение. Нека $\vec{a}(x,1)$, $\vec{b}(y,3)$, $\vec{c}(z,4)$. Тогава $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (x+y+z,8) = (15,8)$, откъдето $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = 17$. Следователно, съгласно (3), за всеки $x,y,z \in \mathbb{R}$ е в сила неравенството $F(x,y,z) \geq 17$. Равенството се достига, точно когато векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са еднопосочно колинеарни. В този случай те са еднопосочно колинеарни и на техния сбор, т.е. са в сила условията $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{15}{8}$. Оттук намираме $x = \frac{15}{8}$, $y = \frac{45}{8}$, $z = \frac{15}{2}$. Така получихме, че $F_{\text{НМС}} = F(\frac{15}{8},\frac{45}{8},\frac{15}{2}) = 17$.

Литература

[1] Н. Алфутова, А. Устинов, *Алгебра и теория чисел для математических школ*, МЦНМО, Москва, 2002.

[2] Е. Галкин, *Нестандартные задачи по математика – Алгебра*, 7–11 классов, Изд. Взгляд, Челябинск, 2004.

[3] Г. Генкин, *Геометрические решения негеометрических задач*, Издательство Просвещение, Москва, 2007.

[4] Д. Гълабова, М. Сидерова, *Математика 11. клас – Профилирана подготовка*, Веди, 2020, ISBN 978-954-8857-54-3.

[5] П. Рангелова, *Векторите при решаване на задачи с ирационални изрази*, Математика, бр. 1, 2013, 13–20, ISSN 0204–6881.

[6] В. Супрун, *Математика для старшеклассников – Нестандартные методи решения задач*, Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009, 272 с.

Даниела Цветкова[1], Марта Теофилова[2], Пенка Рангелова[3]
[1, 2, 3] Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика и информатика,
бул. „България“ № 236, Пловдив, България
Автор за кореспонденция: `marta@uni-plovdiv.bg`

TRIANGLE INEQUALITY IN SQUARE ROOT PROBLEMS

Daniela Cvetkova, Marta Teofilova, Penka Rangelova

Abstract. *In this work, an example of intrasubject connections in mathematics education is given by applying a geometric approach to solving algebra and calculus problems. An application of the triangle inequality to solving irrational equations and inequalities and to finding extreme values of functions of one or more arguments is considered. The vector apparatus in Cartesian coordinates is used. The presented system of problems is aimed at 11th grade students in profiled mathematics classes.*

Key words: Triangle inequality, Irrational equations, Irrational inequalities, Vectors, Coordinates.