

ВЕКТОРНАТА АЛГЕБРА – НЕЗАМЕНИМ ИНСТРУМЕНТ НА ГЕОМЕТРИЯТА

Бойко Банчев

София 1750, ж.к. Младост-1, бл. 29 А, вх.1, boykobb@gmail.com

Резюме. Показват се примери на планиметрични задачи, които, макар да се формулират просто, имат ясен смисъл и предполагат също такива решения, не се срещат в материала по геометрия нито на училищните, нито на университетските учебници. Посочвайки, че причината за това е липсата на изразни средства за решаването, а понякога и за формулирането на такива задачи, представяме подходящ вариант на векторна алгебра за равнинни пресмятания и използването му на практика.

Ключови думи: планиметрия, векторна алгебра.

Увод

Върху всяка от три прави са дадени по две точки. Как чрез тях да изразим дали правите имат обща точка или дали са успоредни? А ако едната права пресича другите две и има посока, как чрез шестте точки да изразим в какъв ред спрямо посоката стават двете пресичания или дали те съвпадат? Колко голяма площ загражда затворената начупена линия с върхове четири произволно взети точки? Как чрез права с дадено направление да разрежем даден триъгълник на две части с равни лица? Как не само да докажем вярно, пълно и кратко теореми като тези на Менелай и Чева, но и всъщност да ги открием?

Тези и редица други задачи възникват съвсем естествено, имат ясен смисъл и като че предполагат достъпни и несложни решения. Със сигурност обаче няма да ги срещнем в материала по евклидова или афинна геометрия на никой училищен и дори университетски учебник. Причината за това е отсъствието или пренебрегването на изразни средства, подходящи за

поставянето на такива задачи, излагането на свързани с тях разсъждения и в крайна сметка решаването им.

Кои са тези изразни средства? Накратко – алгебрата на векторите. В училище понятието вектор и действията с вектори се въвеждат много ограничено и твърде често погрешно, използването им в геометрията отсъства почти напълно, а където го има, не става ясно защо. Във висшето училище понятието вектор се разглежда в курса по аналитична геометрия – тясно свързано с координатни представяния и по този начин без внимание към изразните възможности на алгебрата на самите вектори. В крайна сметка и тук векторният апарат се споменава само формално, без да се вижда полза от него.

Особено недоразвито е смятането с вектори в равнината. То не позволява изразяването дори на основни отношения. Например можем да разберем дали две отсечки или прави сключват прав, остър или тъп ъгъл – чрез знака на скаларното произведение на съответни вектори – но не и дали са успоредни! Тази рудиментарност на векторната алгебра прави невъзможна ползотворната ѝ употреба в геометрията и дори ограничава обхвата на това, което изобщо можем да разглеждаме – самото геометрично знание.

Цел на тази статия е да покаже как този съществен недостатък може да бъде преодолян. Всички разглеждания са в равнината.

Отначало сбито описваме необходимите нови понятия, свойствата им и основната им употреба. След това разглеждаме решаването с така обогатения алгебричен апарат на споменатите в началото и някои други задачи.

Векторна алгебра в равнината: основни сведения

В текста оттук нататък с получер шрифт означаваме вектори. Главна буква, например **P**, означава радиусвектора на точката с това име. Двойка главни букви задават разлика на радиусвектори, например $\mathbf{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ за кои да е точки P и Q . Малка буква отговаря на кой да е вектор. Вектор с дължина 1 означаваме с $\hat{}$, например $\hat{\mathbf{u}}$ има посоката на $\mathbf{u}$ и $|\hat{\mathbf{u}}|$ (дължината му) е 1. Нулевият вектор е **0**. В $\triangle ABC$ на места означаваме страните като вектори двойко: **AB** като **c**, **BC** като **a** и **CA** като **b**.

Събирането и изваждането на вектори, умножаването с число и свойствата на тези действия са добре познати и на тях няма да се спираме.

- Казваме, че дадена посока *предшества* друга, ако права с първата посока пресича права с втората посока от лявата към дясната полуравнина на втората. Предшестването отнасяме и към вектори предвид посоките им.

Действието $\times$ над два вектора наричаме *лицево произведение*. За неуспоредни вектори $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ числото $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ е ориентираното (т.е. със знак) лице на успоредника, образуван от отсечки-представители на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ с общо начало. Лицето е положително, точно когато $\mathbf{u}$ предшества $\mathbf{v}$. За успоредни или поне един нулев вектори $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$. Равенствата $(k \mathbf{u}_1 + l \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = k (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) + l (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v})$ и $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ са изпълнени тъждествено.

Чрез знака си лицевото произведение е алгебричен критерий за ориентация на фигури, а чрез равенство на 0 – за успоредност.

За всеки два вектора $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$ кой да е вектор $\mathbf{p}$ се представя (разлага) по единствен начин като сбор от кратни на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ вектори. По-точно вярно е

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{v}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{p}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Всички решения на уравнението $\mathbf{u} \times \mathbf{p} = s$, където $\mathbf{u} \neq 0$, s е кое да е число, а $\mathbf{p}$ е векторът-променлива, имат вида

$$\mathbf{p} = k \mathbf{u} + \frac{s}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{v},$$

където k и $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{u}$ са произволно избрани число и вектор. В частност, ако променливата е радиусвектор, уравнението е на права, успоредна на $\mathbf{u}$, а решението му при фиксирано кое да е $\mathbf{v}$ е това, което обичайно наричаме параметрично уравнение на същата права – параметърът е k .

Двойката уравнения

$$\mathbf{u} \times \mathbf{p} = s, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{p} = t,$$

където $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$, има съвместно решение

$$\mathbf{p} = \frac{s \mathbf{v} - t \mathbf{u}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}.$$

В частност, ако променливата е радиусвектор, решението е пресечницата на правите, зададени с двете уравнения.

Ориентираното лице на $\triangle ABC$ може да се запише като $\frac{1}{2} \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$, $\frac{1}{2} \mathbf{AB} \times \mathbf{BC}$ и по други начини. За удобство, за *удвоеното* ориентирано лице използваме записа $[ABC]$, дори и когато точките A , B и C са сълинейни, така че лицето е 0. Такъв запис позволява да цитираме лицето като числова стойност без разлика как го пресмятаме. С това изпъква важността за геометричните пресмятания на понятието ориентирано лице само по себе си, отделно от векторната алгебра. Много резултати необходимо се получават чрез смятане с вектори, но веднъж получени, могат да бъдат изразени чрез ориентирани лица. В разглежданите по-нататък примери това се вижда.

От определението на записа $[ABC]$ и свойствата на действията с вектори следват някои полезни равенства. Например за всякакви точки A, B, C и D са налице тъждествата

$$\begin{aligned}[ABC] &= \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} \\ [ABC] &= [BCA] = [CAB] = -[BAC] = -[ACB] = -[CBA] \\ \mathbf{AB} \times \mathbf{CD} &= [ABD] - [ABC] = [ACD] - [BCD].\end{aligned}$$

Последното в частност показва, че всяко лицево произведение на образувани от отсечки вектори може да се представи като разлика на ориентирани лица на триъгълници.

По-общо, под $[P_1 P_2 \dots P_n]$ разбираме $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_3 + \dots + \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_1$. Ако $P_1 P_2 \dots P_n$ е многоъгълник, това е неговото удвоено ориентирано лице. За целите ни тук прибягваме до това обобщение само за четириъгълник и например за всеки четири точки A, B, C и D е вярно $[ABCD] = \mathbf{AC} \times \mathbf{BD}$.

За решаването на много задачи въведеното дотук е достатъчно – това са задачи с афинно съдържание, в тях отсъстват и пряко, и косвено метричните понятия разстояние и ъгъл. Такива сред разглежданите в следващия раздел примери са всички освен последния. Където все пак разстояния и ъгли са съществени, служим си също със скалярно произведение – означаваме го с $\cdot$ и понеже е добре познато, не се спираме на него повече.

Примери

В какъв ред е пресичането?

Известно е, че правата MN пресича всяка от правите AB и CD . В какъв ред става това от гледна точка на посоката върху правата от M към N ?

Ако $K = MN \cap AB$ и $L = MN \cap CD$, то AB бива пресечена преди CD , заедно с нея или след нея според това, дали векторът $\mathbf{KL}$ е едноразпосочен, нулев или разпосочен с $\mathbf{MN}$. За K е вярно $\mathbf{MN} \times \mathbf{MK} = 0$ и $\mathbf{AB} \times \mathbf{AK} = 0$, като второто, предвид $\mathbf{AK} = \mathbf{AM} + \mathbf{MK}$, записваме във вида $\mathbf{AB} \times \mathbf{MK} = -[\mathbf{MAB}]$. Решавайки съвместно двете уравнения за $\mathbf{MK}$ и записвайки $\mathbf{MN} \times \mathbf{AB}$ като $[\mathbf{MANB}]$, намираме $\mathbf{MK} = [\mathbf{MAB}][\mathbf{MANB}]^{-1}\mathbf{MN}$. Подобно от $\mathbf{MN} \times \mathbf{ML} = 0$ и $\mathbf{CD} \times \mathbf{CL} = 0$ намираме $\mathbf{ML} = [\mathbf{MCD}][\mathbf{MCND}]^{-1}\mathbf{MN}$. С това

$$\mathbf{KL} = \mathbf{ML} - \mathbf{MK} = \left(\frac{[\mathbf{MCD}]}{[\mathbf{MCND}]} - \frac{[\mathbf{MAB}]}{[\mathbf{MANB}]} \right) \mathbf{MN}$$

и значи $\mathbf{KL} \uparrow\uparrow \mathbf{MN}$, $\mathbf{KL} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{KL} \uparrow\downarrow \mathbf{MN}$, точно когато първата дроб в скобите е съответно по-голяма от, равна на или по-малка от втората: подреждането на правите по ред на пресичане се свежда до подреждане на числа.

При решаването на задачата не предполагаме нищо за взаимното разполагане на дадените точки, нито разглеждаме отделни случаи на разполагане – пресмятанията са напълно общи и заедно с това съвсем прости.

Съобщност на три прави. Лице на триъгълник, образуван от три прави

Под *съобщност* на прави разбираме наличието у тях на обща точка или общо направление. Ясно е, че всеки две прави в равнината са съобщни. Интересува ни случаят, когато правите са три – нека те са A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 . Намираме необходимо и достатъчно условие правите да са съобщни.

Нека някои две от правите, например A_1A_2 и B_1B_2 , се пресичат. Третата права има обща точка с тях, точно когато съдържа пресечницата на първите две (включително ако съвпада с някоя от тези прави).

Ако пресечницата е P , тя лежи на C_1C_2 , точно когато е изпълнено $C_1C_2 \times C_1P = 0$ или, предвид $C_1P = C_1A_1 + A_1P$:

$$[A_1C_1C_2] + C_1C_2 \times A_1P = 0.$$

Намирайки самата пресечница, за нея е вярно

$$A_1P = \frac{[A_1B_1B_2]}{[A_1B_1B_2] - [A_2B_1B_2]} A_1A_2,$$

а заместването на този израз за A_1P в предишното равенство го превръща в

$$(1) \quad \begin{vmatrix} [A_1B_1B_2] & [A_1C_1C_2] \\ [A_2B_1B_2] & [A_2C_1C_2] \end{vmatrix} = 0.$$

В условието (1) трите прави участват еднообразно, макар на пръв поглед да не е така. Следователно то е необходимо и достатъчно за наличие на обща точка на трите прави при пресичане на кои да е две от тях. То остава такова и ако някои две прави не се пресичат, защото тогава те имат общо направление (включително при съвпадане на две от тях или и трите) и значи са съобщни, а заедно с това (1) е вярно поради $[A_1B_1B_2] = [A_2B_1B_2]$ и $[A_1C_1C_2] = [A_2C_1C_2]$. И така, (1) е необходимо и достатъчно условие кои да е три прави A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 да са съобщни.

Да обърнем внимание и на следното. Ако $A_1 \equiv A_2$, правата A_1A_2 не е еднозначно определена; същото важи и за другите две прави. Тогава (1) има по-общ смисъл: то е необходимо и достатъчно условие да *съществуват* съобщни прави съответно през A_1 и A_2 , B_1 и B_2 и C_1 и C_2 .

Привеждаме и един по-общ резултат за кои да е три прави. Ориентираното лице на триъгълника, образуван от правите A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 , всеки две от които се пресичат, е

$$\frac{\begin{vmatrix} [A_1 B_1 B_2] & [A_1 C_1 C_2] \\ [A_2 B_1 B_2] & [A_2 C_1 C_2] \end{vmatrix}}{[A_1 B_1 A_2 B_2][B_1 C_1 B_2 C_2][C_1 A_1 C_2 A_2]}.$$

До този израз стигаме с очевидно, макар и малко трудоемко пресмятане: намираме пресечниците на правите – върхове на триъгълника – и чрез тях търсеното лице, което, разбира се, може да бъде и 0.

Теорема на Чева. Перспективност на триъгълници

Нека точките A' , B' и C' лежат съответно на правите BC , CA и AB през страните на $\triangle ABC$. Това значи, че за някакви числа k , l и m е изпълнено $\mathbf{A}' = \mathbf{B} + k\mathbf{a}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{C} + l\mathbf{b}$ и $\mathbf{C}' = \mathbf{A} + m\mathbf{c}$. Теоремата на Чева гласи, че ако правите AA' , BB' и CC' са съобщни, числата k , l и m се намират в определена алгебрична зависимост и че тя не зависи от $\triangle ABC$. „Обратната“ теорема пък твърди, че ако тази зависимост е налице за k , l и m , трите прави са съобщни. Така двете теореми заедно посочват изразено чрез k , l и m алгебрично условие, необходимо и достатъчно за съобщност на правите AA' , BB' и CC' .

Във връзка с формулирането и доказването на двойката теореми практически във всеки наличен източник откриваме следните слабости. Алгебричното условие се привежда в самата формулировка, вместо да се извежда в хода на разсъжденията. Двете теореми се разглеждат отделно една от друга, вместо като едно твърдение за необходимо и достатъчно условие. Също поотделно, и то във всяка от теоремите, се разглеждат двата случая на съобщност – чрез обща точка и чрез общо направление. Във формулировките се налага ненужното, отслабващо теоремите ограничение никоя от точките A' , B' и C' да не съвпада с връх на триъгълника. В немалко училищни и университетски текстове изобщо се пропуска възможността трите прави да са съобщни чрез успоредност – така „правата“ теорема се формулира и доказва в ограничен вид, а „обратната“ – напълно погрешно.

Всички тези недостатъци лесно се избягват благодарение на това, че разглежданата в двойката теореми ситуация е частен случай на съотнасяне на три прави, за което вече имаме общо решение. Понеже (1) е необходимо и достатъчно условие, прилагането му установява ведно верността и на теоремата на Чева, и на нейната „обратна“ – съвсем кратко, просто, без ограничения и без разглеждане на отделни случаи. Алгебричното условие от теоремите възниква естествено – то е това, в което се превръща (1) и така фактически го *откриваме*. Именно, прилагайки (1) за правите AA' , BB' и CC' , то приема вида

$$k l m - (1 - k)(1 - l)(1 - m) = 0$$

и, наред с другото, показва, че съобщността на правите наистина зависи само от k , l и m , а не от триъгълника.

Общото условие (1) за съобщност е непосредствено свързано с отношението перспективност между триъгълници. Именно, ако $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са триъгълници, (1) е необходимо и достатъчно условие те да са *централноперспективни*, като центърът на перспективност е общата точка или общото направление („безкрайна точка“) на A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 . Благодарение на теоремата на Дезарг същото равенство е и условие за *осева перспективност* на двата триъгълника, което значи пресечниците на правите A_1B_1 и A_2B_2 , на B_1C_1 и B_2C_2 и на C_1A_1 и C_2A_2 да лежат на една права.

Теорема на Менелай

Точките A' , B' и C' и числата k , l и m са както в теоремата на Чева. Теоремата на Менелай установява необходимо и достатъчно условие A' , B' и C' да лежат на една права. Те са такива точно когато $[A'B'C']$, или все едно $A'B' \times B'C'$, е 0. Като заместим в това произведение двата множителя, изразени чрез A , B , C , k , l и m , намираме

$$[A'B'C'] = (k l m + (1 - k)(1 - l)(1 - m)) [ABC]$$

и значи търсеното условие е

$$k l m + (1 - k)(1 - l)(1 - m) = 0.$$

Така стигаме дори до малко по-общ резултат: как се съотнасят лицата на $\triangle ABC$ и вписания в него $\triangle A'B'C'$ според разполагането на точките A' , B' и C' . И както при теоремата на Чева, необходимостта и достатъчността на условието са доказани едновременно, а самото то не е нужно да се знае предварително – откриваме го, пресмятайки лицето на $\triangle A'B'C'$.

Лице на заградена област

Каква е големината на лицето на заградената от начупената линия $ABCD$ част от равнината, ако A , B , C и D са кои да е точки, не непременно различни? Произволният избор на точките означава, че начупената може да се пресича или да има други особености – така заградената област може да се окаже например един или два триъгълника или изобщо да не съществува като площна фигура, т.е. лицето ѝ да е 0.

Полагаме $a_1 = [DAB]$, $a_2 = [ABC]$, $a_3 = [BCD]$, $a_4 = [CDA]$ и $n_i = \text{sign } a_i$ за $i = 1, 2, 3, 4$. За четирите лица е изпълнено $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$: всяко от тях се намира чрез другите три. Ако $ABCD$ не се самопресича, търсеното лице е например $\frac{1}{2}|a_1 + a_3|$: лице на четириъгълник като сбор от лицата, възможно с различни знаци или равни на 0, на два триъгълника. Самопресичане има, когато никое от n_1 , n_2 , n_3 и n_4 не е 0 (никои три точки не са на една права) и n_1 е равно на точно едно от n_2 , n_3 и n_4 . Тогава се пресичат или DA и BC (при $n_1 \neq n_4$), или AB и CD (при $n_1 = n_4$).

Намирайки пресечницата, чрез нея намираме и търсеното лице като сбор от лицата на двата образувани с нейно участие триъгълника. Ако се пресичат DA и BC , този сбор се оказва $\frac{1}{2}|a_1a_2 + a_3a_4||a_1 - a_4|^{-1}$. Ако пък се пресичат AB и CD , сборът е $\frac{1}{2}|a_1a_4 + a_2a_3||a_1 - a_2|^{-1}$, но същото се получава и ако в първата формула разменим a_1 и a_3 или a_2 и a_4 .

Разполовяване на триъгълник

Да се намерят върху страните на $\triangle ABC$, включително върховете на триъгълника, такива точки K и L , че правата KL да е успоредна на даден вектор $\mathbf{u}$ и да разрязва триъгълника на части с равни лица.

Разглеждаме трите успоредни на $\mathbf{u}$ прави през върховете A , B и C . Засега приемаме, че никоя от тях не минава през повече от един връх, а това значи, че трите прави са различни. Точно едната от тях се намира между другите две, а коя именно е тя показват аритметичните знаци на произведенията $\mathbf{u} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{u} \times \mathbf{c}$. (Тези произведения са различни от нула, защото никоя от трите прави не съдържа два върха на триъгълника.) Правата, която е между другите две, пресича срещулежащата страна на триъгълника. Ще стане ясно, че търсената в задачата права KL също пресича тази страна.

Например правата през C е между другите две, точно когато $\mathbf{u} \times \mathbf{a}$ и $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$ имат еднакви знаци, т.е. вярно е $(\mathbf{u} \times \mathbf{a})(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) > 0$. Геометричният смисъл на последното е, че посоките на $\mathbf{CA}$ и $\mathbf{CB}$ са в различни полуравнини спрямо тази на $\mathbf{u}$. Нататък смятаме, че случаят е именно този; ако по начало не е, той се получава чрез размяна на подходящи два върха на триъгълника.

Нека D е пресечницата на правата през C и правата AB . Тогава D изпълнява уравненията на тези прави, именно $\mathbf{u} \times \mathbf{CD} = 0$ и $\mathbf{c} \times \mathbf{AD} = 0$. Записвайки първото във вида $\mathbf{u} \times \mathbf{AD} = \mathbf{u} \times \mathbf{AC}$ и решавайки съвместно двете уравнения за $\mathbf{AD}$, намираме

$$(2) \quad \mathbf{AD} = k \mathbf{c}, \quad \text{където } k = (\mathbf{b} \times \mathbf{u})(\mathbf{u} \times \mathbf{c})^{-1}.$$

По построение точката D е вътрешна за отсечката AB . Разполовяващата $\triangle ABC$ права, да я наречем m , е успоредна на CD и трябва да пресича AB също в нейна вътрешна точка K . При това:

- ако $k \geq 1/2$, което значи $|AD| \geq |DB|$ и следователно $||[CAD]|| \geq ||[CDB]||$, m трябва да пресича страната CA или (съвпадайки с CD) да минава през C ;
- ако $k < 1/2$, значи $|AD| < |DB|$, така че е вярно $||[CAD]|| < ||[CDB]||$ – тогава m трябва да пресича BC .

С евентуална размяна на A и B можем да осигурим да е налице именно първият случай. Нататък смятаме, че това е така и нека $L = m \cap CA$.

Понеже $KL \parallel DC$, вярно е $AK : AD = AL : AC$, значи за някое $s \in (0,1)$ е изпълнено

$$(3) \quad AK = s AD, \quad AL = s AC.$$

За да бъде KL разполовяваща права, трябва да е вярно $AK \times AL = [AKL] = 1/2 [ABC]$. Замествайки в последното AK и AL от (3) и AD от (2), намираме $s = 1/\sqrt{2k}$ и с това, отново от (3):

$$AK = \sqrt{k/2} AB, \quad AL = 1/\sqrt{2k} AC.$$

Ако измежду успоредните на u прави през A , B и C има две съвпадащи, условно приемаме, че те са различни. По този начин едната от тях и в този случай е „между“ останалите две, като всъщност тя минава през два върха. При правеното по-горе привеждане чрез евентуални размени на върхове тези, които лежат на правата, се оказват B и C . Пресмятанията остават в сила, като в този случай $D \equiv B$ и $s = 1/\sqrt{2}$.

Ъглополовящо направление

Нека u и v са кои да е неуспоредни вектори. Тъй като $|v|u$ и $|u|v$ имат равни дължини, а посоките им са тези на u и v , посоката на всеки вектор $p \parallel |v|u \pm |u|v$ е ъглополовяща на посоките на някоя от двойките u и v , u и $-v$, $-u$ и v или $-u$ и $-v$. В този смисъл направлението на такъв вектор p е ъглополовящо на направленията на u и v . Така „ъглоразполовяването“ е отношение не само между посоки, а и между направления.

Ясно е, че ъглополовящите на две направления са две – за u и v както по-горе те са съответните на $\pm$ в израза за p – и са отвесни едно на друго (например защото $(|v|u + |u|v) \cdot (|v|u - |u|v) = 0$).

Разглеждайки равенството

$$(4) \quad (u \times p)(v \cdot p) + (u \cdot p)(v \times p) = 0,$$

от разлагането $p = k u + l v$ следва, че (4) се изпълнява за онези и само онези p , за които е вярно $|k||u| = |l||v|$. Последното означава p да има точно посочения по-горе вид и значи направлението му да е ъглополовящо – кое да е от двете възможни – на тези на u и v . Така (4) е удобно необходимо и достатъчно условие за разглежданото отношение между направления.

При $u \parallel v$ равенството (4) се свежда до $(u \times p)(u \cdot p) = 0$, така че се изпълнява за $p \parallel u$, $p \perp u$ и само за такива p . Смисълът на равенството като необходимо и достатъчно условие е налице и в този случай, като приемем, че „ъглополовящи“ тогава са направлението на u и отвесното нему.

Като пример за използване на условието (4) разглеждаме следната задача. M и N са средите на отсечките AB и CD и всичките шест споменати точки са различни. Какво трябва да е изпълнено за дадените точки A, B, C и D , че правата MN да сключва равни ъгли с правите BC и DA ?

Сключването на равни ъгли означава направлението на правата MN да е ъглополовящо на направленията на BC и DA . Затова за решаване на задачата заместваме в (4) $\mathbf{u} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{v} = \mathbf{DA}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{BC} - \mathbf{DA})$. Така (4) се превръща в

$$(\mathbf{BC} \times \mathbf{DA})(\mathbf{BC}^2 - \mathbf{DA}^2) = 0$$

и очевидно е изпълнено, точно когато е вярно $BC \parallel DA$, $|BC| = |DA|$ или и двете. В случая $BC \parallel DA$ не е възможно MN да е отвесното на BC ъглополовящо направление, защото от $MN \perp BC \parallel DA$ следва $\mathbf{MN} = \mathbf{0}$, което условието на задачата не допуска. Значи в този случай правата MN е успоредна на BC и DA .

Така стигаме до следния отговор на поставения въпрос. Ако $BC \parallel DA$, MN сключва равни ъгли с тях точно когато също е успоредна на тях, а ако $BC \nparallel DA$, равни ъгли са налице, когато и само когато $|BC| = |DA|$.

VECTOR ALGEBRA – AN INDISPENSABLE TOOL FOR GEOMETRY

Boyko Bantchev

1750 Sofia, Mladost-1, bl. 29A, vh. 1, boykobb@gmail.com

Abstract. Shown are examples of planar geometry problems which, although easily formulated and possessing a clear meaning, and thus expected to admit simple and straightforward solutions, are not to be found in the geometry textbooks of any kind. We point out that the reason for this is the absence of a relevant language in which to state such problems and work on them. For the role of such a language we present a vector algebra for planar geometry and demonstrate its use in practice.