

КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ В ИЗВЪНКЛАСНИ ФОРМИ НА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА

Даниела Георгиева^{1,*}, Дамяна Гандева², Марта Теофилова³

¹ ПМГ „Акад. Боян Петканчин“, Хасково

^{2,3} Факултет по математика и информатика,

ПУ „Паисий Хилендарски“, бул. „България“ № 236

* Автор за кореспонденция: danielatsvetkova17@gmail.com

Резюме. В работата са предложени две идеи за разширяване на знанията за конични сечения в извънкласни форми на работа с ученици от профилираната подготовка по математика. Разгледана е връзката между конични сечения и диофантови уравнения от втора степен чрез метода на Диофант на хордата и допирателната. Изследвани са инверсните образи на коничните сечения при инверсия относно окръжност за три различни положения на полюса на инверсията.

Ключови думи: конични сечения, диофантови уравнения, инверсия.

В профилираната подготовка по математика учениците изучават аналитичното задаване на коничните сечения (елипса, хипербола, парабола и окръжност) и техни основни свойства. В тази работа предлагаме идеи за разширяване на знанията за криви от втора степен в извънкласни форми на работа. Показваме една връзка между конични сечения и диофантови уравнения от втора степен и предлагаме запознаване на учениците с криви от трета и четвърта степен, които са инверсни образи на конични сечения.

Конични сечения и диофантови уравнения от втора степен

Уравнения за две или повече неизвестни с цели коефициенти, чиито решения се търсят в цели или рационални числа, се наричат диофантови уравнения. Сред класическите диофантови уравнения от втора степен, познати от античността, се открояват питагоровото уравнение и уравненията на Пел $x^2 - Dy^2 = n$, където $D > 0$ не е точен квадрат. Докато коничните сечения намират място в учебните програми по математика, на диофантовите уравнения не са посветени отделни урочни единици нито в общообразователната, нито в профилираната подготовка. Между двете теми могат да бъдат открити взаимовръзки – диофантово уравнение от втора

степен за неизвестните x и y може да се разглежда като крива от втора степен в декартова координатна система Oxy , а неговите решения – като точките върху кривата с координати цели или рационални числа. Така например уравненията на Пел задават хиперболи, а питагоровото уравнение може да се преобразува до уравнение на окръжност. Това ни мотивира да разгледаме една идея за обогатяване на знанията на учениците от профилираната подготовка в извънкласни форми на работа чрез решаване на диофантови уравнения от втора степен, използвайки геометричната им интерпретация като конични сечения. Методът, на който ще обърнем внимание, е известен като *метод на Диофант на хордата и допирателната*. Диофант Александрийски предлага този метод в алгебричен вид, а геометричната му интерпретация е дадена по-късно от Пиер дьо Ферма и Исак Нютон [5]. Методът може да се използва за намиране целочислените решения на хомогенно диофантово уравнение чрез намиране на рационалните решения на съответното му нехомогенно уравнение. За генериране на рационалните решения се използва геометрична конструкция на пресичане на права и крива от втора степен, като за целта е необходимо да се познава едно рационално решение на даденото уравнение. Запознаваме учениците с метода чрез класическата задача за намиране на целите ненулеви решения (a, b, c) на питагоровото уравнение $a^2 + b^2 = c^2$ [5]. Чрез разделяне на двете страни на $c^2 \neq 0$, то е еквивалентно на $x^2 + y^2 = 1$, където $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$. Последното уравнение задава единичната окръжност в равнината и задачата се свежда до намиране на точките $(x; y)$ с рационални координати върху окръжността. Очевидни цели решения на уравнението са $(\pm 1; 0)$ и $(0; \pm 1)$. Стъпвайки върху всяко едно от тях, можем да намерим представяне на рационалните точки върху окръжността. Нека изберем точка $M(-1; 0)$. Измежду правите през M , които съдържат само точки с координати рационални числа, една е допирателна към окръжността, а останалите са секущи. Можем да зададем аналитично секущите чрез декартовите им уравнения и да търсим втората им пресечна точка с окръжността, решавайки системата от уравненията $x^2 + y^2 = 1$ и $y = k(x + 1)$, където k е рационално число. Намираме второто решение на системата $x = \frac{1-k^2}{1+k^2}$, $y = \frac{2k}{1+k^2}$, т.е. точките с рационални координати върху единичната окръжност без $(-1; 0)$. Връщайки се в полагането, имаме $a = 1 - k^2$, $b = 2k$, $c = 1 + k^2$. Ако заместим $k = \frac{m}{n}$, където m, n са цели числа, от изразите за x и y се получават известните формули на Евклид за питагорови тройки.

За самостоятелна работа на учениците могат да се предложат аналогични уравнения от вида $a^2 + b^2 = \lambda c^2$, където λ е точен квадрат или рационално число, което не е точен квадрат, но за което лесно се открива едно рационално решение (например $\lambda = 2$), както и хомогенни диофантови

уравнения за три неизвестни, които се свеждат до уравнения на елипса или хипербола, например $a^2 \pm 2b^2 = c^2$. След това могат да се разгледат уравнения с полагане, например $2a^2 + 2ab + b^2 = 5c^2$. Съответното му нехомогенно уравнение е $2x^2 + 2xy + y^2 = 5$, което чрез полагането $z = x + y$ приема вида $x^2 + z^2 = 5$. Накрая с учениците може да се разгледа и най-общият вид на уравнение на крива от втора степен, т.е. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (поне един от коефициентите A, B или $C \neq 0$) и да се направи връзка с най-общия вид на диофантово уравнение от втора степен [3]. С метода на Диофант могат да се намерят точките с рационални координати върху конкретни криви от втора степен, например $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$. Важно е да се обърне внимание на учениците, че не всяка крива от втора степен съдържа рационални точки. Затова следва да се разгледат и диофантови уравнения, които нямат решения, като например: $x^2 + 2xy + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 3$. За първото уравнение това се установява директно чрез преобразуването му във вида $x + y = \pm\sqrt{2}$. За второто уравнение може да се използва обратният подход на разглеждания в началото – преобразуване в съответното му хомогенно уравнение $a^2 + b^2 = 3c^2$, след което с метода на безкрайното спускане на Ферма може да се докаже, че то няма ненулеви целочислени решения.

Преобразуване на конични сечения чрез инверсия

Чрез различни геометрични конструкции от криви от втора степен могат да бъдат получени криви от по-високи степени. Предлагаме запознаване с инверсните образи на коничните сечения, които са криви от трета или четвърта степен. Инверсията относно окръжност и останалите три конични сечения е дефинирана от Аполоний Пергски. Нека е дадена окръжност k с център O и радиус R . Ако $M \neq O$ е произволна точка от равнината на окръжността, то точката M' се нарича образ на M при *инверсия относно k* , ако O, M и M' са колинеарни и $OM \cdot OM' = R^2$. Тогава точка M е образът на M' относно същата инверсия. Точките M и M' съвпадат, точно когато лежат на окръжността k . Точката O се нарича полюс на инверсията. Нека окръжността, задаваща инверсията, се определя от $k: x^2 + y^2 = R^2$. Използвайки определението, предлагаме на учениците да изведат аналитичната зависимост между координатите на двойка съответни точки $M(x; y)$ и $M'(x'; y')$ при инверсия относно k :

$$x = \frac{R^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{R^2 y'}{x'^2 + y'^2}. \quad (1)$$

След това чрез (1) учениците могат да докажат, че при инверсия: а) права през полюса O се преобразува в себе си; б) права, неминаваща през O , се преобразува в окръжност през O ; в) окръжност през O се преобразува в права, неминаваща през O ; г) окръжност, неминаваща през O , се

преобразува в окръжност, неминаваща през O [2]. Ще разгледаме преобразуване на конични сечения при инверсия за три специални положения на полюса на инверсията спрямо коничното сечение – когато съвпада с неговия център (за елипса и хипербола), с връх или с фокус. За визуализиране на изучаваните криви се използва динамичен геометричен софтуер като GeoGebra, Desmos или AI Graphing Calculator.

1. Инверсия с полюс центъра на конично сечение. Поставяме задачата за намиране на уравненията на кривите, в които се преобразуват елипса и хипербола, зададени с $b^2x^2 + \varepsilon a^2y^2 = a^2b^2$ ($\varepsilon = 1$ за елипса, $\varepsilon = -1$ за хипербола), когато центърът на инверсната окръжност съвпада с центъра на елипсата или хиперболата и $R = \sqrt{ab}$. Чрез заместване на формулите (1) в уравненията на коничните сечения учениците получават кривите от четвърта степен $(x^2 + y^2)^2 = b^2x^2 + \varepsilon a^2y^2$, които се наричат *лемниски на Бут* по името на английския математик Джеймс Бут (1810–1878) или още *хипопеди на Прокъл*. Равнораменната хипербола $x^2 - y^2 = a^2$ ($a \neq 0$) се преобразува в кривата $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, известна като *лемниска на Бернули* (също така и частен случай на овали на Касини). С учениците може да се разгледа задаване на лемниската на Бернули като геометрично място на точки в равнината (ГМТ), по аналогия със задаването на коничните сечения, чрез задачата: Нека в равнината са дадени две фиксирани точки F_1 и F_2 на разстояние $2c$, $c = \text{const}$. Намерете ГМТ, за които произведението от разстоянията до F_1 и F_2 е c^2 [1]. Точките F_1 и F_2 се наричат фокуси на лемниската и са инверсните образи на фокусите на съответната ѝ равнораменна хипербола. Лемниската на Бернули може да се зададе и като ГМТ, които са симетрични на центъра на равнораменна хипербола относно нейните допирателни [1].

2. Инверсия с полюс връх на конично сечение. Първо с учениците разглеждаме задаване на елипса и хипербола с център, различен от координатното начало O , т.е. произволна точка $C(x_0; y_0)$. Тук може да се направи аналогия с уравнението на окръжност с център C или да се разгледа аналитично задаване на трансляция в равнината, определена от вектора $\overrightarrow{OC}$, за да се достигне до уравненията $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Нека разгледаме елипса и хипербола, единият връх на които е точка O и с център $C(a; 0)$, т.е. кривите, определени от уравненията $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($\varepsilon = \pm 1$). Тези уравнения могат да се преобразуват във вида

$$Ax^2 + \varepsilon By^2 = 2x. \quad (2)$$

Отбелязваме, че ако позволим $A = 0$, то при $B \neq 0$ уравнението (2) ще задава парабола с връх точката O . По този начин чрез уравненията (2) могат да бъдат изследвани едновременно и трите конични сечения. Ще разгледаме инверсия относно окръжност с център O и $R = 1$. Чрез заместване на (1) в

(2) учениците намират инверсните образи на коничните сечения, т.е. кривите от трета степен $Ax^2 + \varepsilon By^2 = 2x(x^2 + y^2)$, наречени *конхоиди на де Слуз* по името на нидерландския математик Рене Франсоа де Слуз (1622–1685). Инверсният образ на параболата $y^2 = 2x$ е кривата $y^2 = 2x(x^2 + y^2)$, наречена *цисоида на Диоклес*, която както и параболата е открита в търсене на решение на античната задача за удвояването на куба.

3. *Инверсия с полюс във фокус на конично сечение.* Тук е по-удобно да се използва полярна координатна система. Тя се определя от точка O , наречена полюс, лъч $l^{\rightarrow}$ с начало O , наречен полярна ос, и посока на въртене. Ако точка $M \neq O$ е произволна точка в равнината, нейните координати в полярна координатна система са $M(r; \varphi)$, където $r = |\overrightarrow{OM}|$, $\varphi = \angle(l^{\rightarrow}, \overrightarrow{OM}) \in [0, 2\pi)$. Нека $M(x; y)$ в декартова координатна система Oxy и да разгледаме полярна координатна система, за която O е полюс, а положителната посока на Ox определя полярната ос. Тогава $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Известно е следното определение [2]: конично сечение е ГМТ в равнината, за които отношението от разстоянията до фиксирана точка F (фокус) и фиксирана права g , неминаваща през F (директриса, съответна на фокуса), е постоянна положителна величина e (числен ексцентрицитет). Това определение е обобщение на определението на парабола ($e = 1$). При $0 < e < 1$ коничното сечение е елипса, а при $e > 1$ – хипербола. Директрисите на елипса и хипербола могат да се въведат и като геометричното място на пресечните точки на перпендикулярите през фокус на кривата към допирателните в произволна нейна точка и правите, съединяващи центъра на кривата с точките на допиране. Така може да се достигне до уравненията на двете директриси $g: x = \pm \frac{a^2}{c}$, съответни на фокусите $F(\pm c; 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ за елипса и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ за хипербола. От горното определение за конично сечение извеждаме уравненията на трите криви в полярни координати относно координатна система с полюс $O \equiv F$ и полярна ос $DF^{\rightarrow}$, където $DF \perp g$, $D \in g$. Нека M е произволна точка от коничното сечение. Тогава $d(M, F) = r$. Ако $d(F, g) = p > 0$, то $d(M, g) = p + r \cos \varphi$. Така достигаем до следните уравнения в полярни координати, които задават конично сечение с ексцентрицитет e

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \varphi}. \quad (3)$$

Уравненията (3) са относно координатна система, чийто полюс съвпада с десния фокус на коничното сечение в случай на елипса или хипербола. В частност параболата $y^2 = 2px$ се задава в полярни координати с уравнението $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$. Нека разгледаме инверсия относно окръжност с център полюса на полярна координатна система и $R = 1$. От определението следва, че точките $M(r; \varphi)$ и $M'(r'; \varphi')$ са съответни при такава инверсия,

точно когато $rr' = 1$, $\varphi' = \varphi$. Тогава кривата с уравнение (3) се преобразува в кривата с уравнение $r = \frac{1-e \cos \varphi}{e\rho}$ или по-общо $r = a \cos \varphi + b$ ($a, b = \text{const.}$), наречена *охлюв на Паскал*, дефинирана от Етиен Паскал. След преход в декартови координати се установява, че това е крива от четвърта степен. Инверсният образ на параболата $y^2 = 2x$ е кривата с полярно уравнение $r = 1 - \cos \varphi$, наречена *кардиоида*. Тя е траекторията на фиксирана точка от окръжност с радиус R , търкаляща се без плъзгане по неподвижна окръжност със същия радиус. С учениците, проявяващи интерес, може да се продължи с аналогични разглеждания за инверсия относно елипса, хипербола и парабола, следвайки идеите в [4].

Благодарности

Работата е подкрепена от проект МУПД25-ФМИ-015, финансиран от ФНИ на ПУ. Авторите изказват благодарност към проф. д-р Пенка Рангелова за нейните ценни препоръки, напътствия и съвети.

Литература

- [1] Савелов, А., *Плоские кривые*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 1960
- [2] Станилов, Г., *Аналитична геометрия*, Наука и изкуство, София, 1974
- [3] Andreescu, T., D. Andric, *Quadratic Diophantine equations*, Springer, 2015, ISBN: 978-0-387-35156-8
- [4] Ramirez, J., G. Rubiano, Elliptic inversion of two-dimensional objects, *International Journal of Geometry*, 2014, vol. 3, no. 1, pp. 12–27, ISSN-L 2734-8202
- [5] Stillwell, J., *Mathematics and its History*, Springer, 2010, ISBN: 978-1-4419-6052-8

CONIC SECTIONS IN EXTRACURRICULAR ACTIVITIES IN MATHEMATICS

Daniela Georgieva^{1,*}, Damyana Gandeva², Marta Teofilova³

¹ *High School of Science and Mathematics “Acad. Boyan Petkanchin”, Haskovo*

^{2,3} *Faculty of Mathematics and Informatics, Paisii Hilendarski University of Plovdiv*

^{*} *Corresponding author: danielatsvetkova17@gmail.com*

Abstract. In this work, two ideas for expanding the knowledge of conic sections in extracurricular forms of activities with high school students from the profiled training in mathematics are proposed. The relationship between conic sections and second degree Diophantine equations is examined through the chord and tangent method. Inverse images of conics by inversion about a circle at three different pole positions are investigated.