

ИНВАРИАНТИ В 5. КЛАС

Милчо Иванов^{1,*}, Елена Маринова²

¹ 138 СУЗИЕ „Проф. В. Златарски“, София, ул. „Алфред Нобел“ № 3, 1113

² 22 СЕУ „Г. С. Раковски“, София, бул. „Витоша“ № 134, 1463 София

^{1,*} Автор за кореспонденция: m.ivanov@138suzie.com

² epmarinova@abv.bg

Резюме: Статията представя въвеждането на понятието инвариант за по-малки ученици. Разглеждат се няколко разнообразни задачи, в които се обосновава, че определена ситуация не може да се случи, но за пълното решаване е необходимо да се прави реализация за получаване на възможните стойности. Статията завършва със статистика за резултатите от решаване на задача с инвариант в лагер на Вонеща вода.

Ключови думи: инвариант, реализация

В класната стая има 3 редици. Броят на учениците, които са на първата редица е 9, на втората са 10, а на третата са 7. Тъй като $9+10+7=26$, то броят на всички ученици в класа е 26. Какво направихме? Събрахме броя на учениците от първата, от втората и от третата редица. Но бихме могли да вземем най-напред учениците от втората редица, към него да прибавим учениците от първата редица и накрая да прибавим учениците от третата редица, т.е. да съберем числата 10, 9 и 7. Имаме $10+9+7=26$. Общият брой на учениците в класа не се променя. Бихме могли да постъпим и по следния начин. В класната стая има 11 чина с по двама ученици и 4 чина с по един кученик. Тогава общият брой ученици в класа е $11 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 22 + 4 = 26$. Отново получаваме 26. Това, което не се променя, е общият брой ученици в класа независимо как извършваме броенето. На математически език казваме, че броят на учениците е *инвариантен* по отношение на начина на броене. Инвариантът е едно от важните понятия в математиката. [1]

Задача 1. Да запишем първите 6 естествени числа: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Да си изберем две от тях, например 2 и 5, да ги задраскаме и на тяхно място да запишем разликата, като от по-голямото вадим по-малкото. Броят на числата се намалява с едно. Те стават: 1, 3, 3, 4 и 6. Отново да си изберем

две числа, например 1 и 3, и на тяхно място да поставим разликата им 2. Числата, които остават, са: 2, 3, 4 и 6. Пак избираме две числа, например 2 и 4, и на тяхно място поставяме разликата им 2. Оставащите числа са 2, 3 и 6. От тях избираме две, например 3 и 6, и на тяхно място поставяме разликата 3. Оставащите числа са 2 и 3, заменяме ги с разликата 1. Играта завършва. Оставащото число е 1. Ако започнем отначало и променим изборите на двойките числа, можем да стигнем до друг резултат. Въпросът е обаче дали в края можем да получим числото 2. Отговорът е отрицателен. Защо? Разглеждаме как се изменя броят на нечетните числа при всяко задраскване. В началото имаме три нечетни числа: 1, 3 и 5. Наблюдението показва, че каквото и задраскване да направим, броят на нечетните числа или се запазва, или намалява с 2. Понеже накрая остава само едно число, то не може да е четно. В този случай показахме, че **четността на броя на нечетните числа** не се променя, т.е. той е **инвариантен** по отношение на задраскванията. Така с помощта на понятието инвариант доказахме, че при тази игра не е възможно накрая да получим четно число. С това задачата не е решена. За пълното решение показваме реализации за получаване на възможните стойности 1, 3 или 5. Ето как може да стане това:

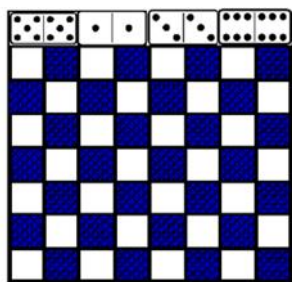
$(2,5) \rightarrow 1,3,3,4,6$ $(1,3) \rightarrow 2,3,4,6$ $(2,4) \rightarrow 2,3,6$ $(3,6) \rightarrow 2,3$ $(2,3) \rightarrow 1$
 $(2,5) \rightarrow 1,3,3,4,6$ $(1,4) \rightarrow 3,3,3,6$ $(3,3) \rightarrow 0,3,6$ $(3,6) \rightarrow 0,3$ $(0,3) \rightarrow 3$
 $(1,6) \rightarrow 2,3,4,5,5$ $(2,3) \rightarrow 1,4,5,5$ $(4,5) \rightarrow 1,1,5$ $(1,1) \rightarrow 0,5$ $(0,5) \rightarrow 5$

Задача 2. Възможно ли е да се покрие шахматната дъска с плочки от домино без препокриване, като всяка плочка покрива точно две полета от дъската?

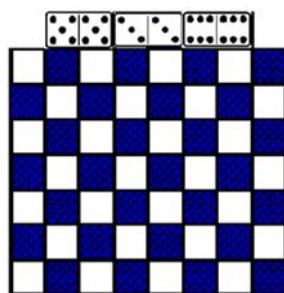
Отг. Възможно е. На фигура 1 е показано как се покрива първия ред на дъската, като по същия начин може да се покрие всеки следващ ред:

Задача 2*. Възможно ли е да се покрие шахматната дъска без две нейни полета от ъглите на една страна с плочки от домино без препокриване, така че всяка плочка да покрива точно две полета от изрязаната дъска?

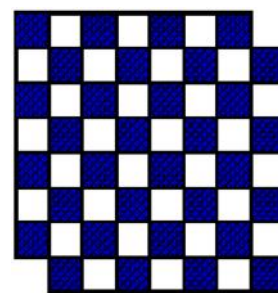
Отг. Възможно е. На фигура 2 е показано как се покрива първия ред на дъската, като следващите редове се покриват както в предната задача:



Фигура 1. Покриване на дъска



Фигура 2. Дъска без 2 полета



Фигура 3. Дъска без 2 диагонални полета

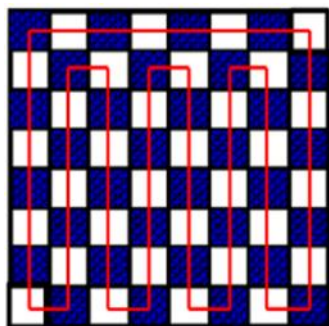
Задача 2.** Възможно ли е да се покрие шахматната дъска без две нейни полета от ъглите на един диагонал с плочки от домино без препокриване, така че всяка плочка да покрива точно две полета от изрязаната дъска?

Отг. Не е възможно. Двете крайни полета от един диагонал са с еднакъв цвят, а плочката покрива винаги две разноцветни полета. Използваме, че броят на полетата от единия цвят е винаги равен на броя на полетата от другия цвят.

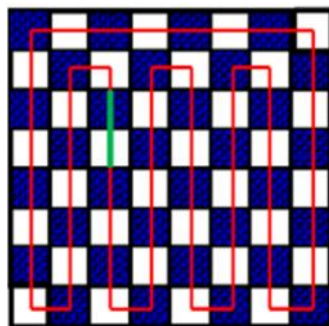
За пълнота ще разгледаме и следната задача:

Задача 3. Възможно ли е да се покрие шахматната дъска с плочки от домино, ако от дъската се премахнат две полета с различен цвят.

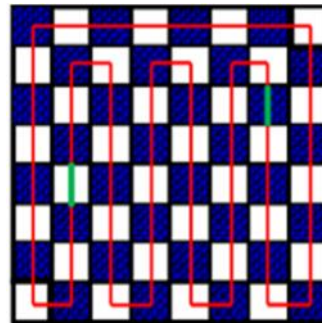
Отг. Възможно е.



Фигура 1. *Покриване на дъска*



Фигура 2. *Дъска без двойка съседни полета*



Фигура 3. *Дъска без двойка несъседни полета*

Задача 4. За един ход се избира произволен квадрат 2×2 на шахматната дъска и едновременно се променя цветът на четирите му полета – от бял в черен и обратно. Възможно ли е след няколко хода на дъската да остане само едно черно поле?

Решение: Ситуацията изглежда много сложна. Всеки избор на квадрат 2×2 може да се осъществи по $7 \cdot 7 = 49$ различни начина. Това прави процеса на оцветяване практически необозрим. Попадаме в изпитанието на приказния герой, на когото е заръчано да намери игла в купа сено за една нощ. Ако отговорът на формулирания въпрос е положителен, ще трябва да посочим редица от последователни избори на квадрати 2×2 , които след съответните промени на цвета на полетата ще направят цялата дъска бяла с изключение на точно едно поле. Но ако отговорът е отрицателен? Тогава трябва да обхванем и преценим всички възможни редици от последователни избори. А те са много. В този случай е за препоръчване да намерим подходящ инвариант.

Да разгледаме произволна редица от последователни избори на квадрати 2×2 , в резултат на които се променя цветът на полетата. Всъщност е важно да разберем как се променя броят само на черните полета на

дъската. В началото те са 32, а в края броят им трябва да стане равен на 1. Нека означим с x броя на черните полета на дъската в даден момент. Ще разгледаме как се променя x при избор на квадрат 2×2 . За броя на черните и белите полета в избрания квадрат има 5 възможности:

Таблица 1. Брой бели и черни полета

Стойност на x = брой черни полета	Брой бели полета	Нова стойност на x
4	0	$x - 4$
3	1	$x - 2$
2	2	x
1	3	$x + 2$
0	4	$x + 4$

Сега забелязваме, че бройката x запазва четността си, т.е. четността на бройката x е **инвариантна** при произволен избор на квадрата 2×2 . Ясно е, че от четното число $x = 32$ не може да се получи нечетното число $x = 1$.

Задача 5. Числата от 1 до 99 са написани в редичка, като първо са написани последователно нечетните числа от 1 до 99, а след тях четните от 2 до 98. Разрешено е да се разменят местата на кои да е две числа, между които има точно едно число. Може ли по този начин да се получи редицката 1, 2, 3,, 97, 98, 99?

Решение: Да запишем част от редицката: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 и да разгледаме например числото 3. При извършване на размяна числото 3 може да отиде от второ място на четвърто, после на шесто и т.н. Мястото, където може да отиде числото 3, е винаги четно, т.е. мястото е с четен номер. Това е така, защото числото 3 може да заема мястото само на число, което е през едно от него. Но в редицката 1, 2, 3,, 97, 98, 99, която искаме да получим, числото 3 е на трето място, което е нечетно. Следователно тази редичка не може да се получи

Тройката не е единственото число, с което можем да обосновем невъзможността да се получи исканата редичка. Числата 7 или 11, или 13 също биха ни помогнали, защото и те от четна позиция при размяната отиват на четна позиция, но за да се получи исканата редичка, те трябва да заемат нечетни позиции. **При размяната числата не променят четността на позицията си.** В разгледаните примери инвариантите бяха свързани с понятието *четност*. Възможни са инварианти от друг вид.

Задача 6. Учителят написал на лист числото 72. Няколко ученици последователно си предават листа, като прибавят към написаното число 5 или изваждат от написаното число 5. Може ли в резултат да се получи числото 99?

Решение: Да разделим 72 на 5. Получаваме частно 14 и остатък 2. Като разделим 99 на 5, получаваме частно 19 и остатък 4. Остатъците са различни. От друга страна, **когато прибавяме или изваждаме 5 от едно число, то частното на числото при деление с 5 се променя, но остатъкът му остава същият.** Остатъкът е инвариант. Вземете няколко примера, за да се убедите, че е така. Както видяхме, в нашия случай имаме: $72 = 14 \cdot 5 + 2$ и $99 = 19 \cdot 5 + 4$. Досетихте се, че отново отговорът на поставения въпрос е отрицателен и причината е в това, **че остатъкът се променя.** В случая числото 5 е избрано произволно. По същия начин може да ес постъпи и с произволно друго число, например с 6.

В разгледаните задачи търсим какво **не се променя**. В математиката обектите или свойствата, които не се променят, се наричат *инвариантни*. Те помагат да се обоснове кога дадена ситуация не може да се случи.

На ученически лагер във Вонеща вода беше зададена следната задача:

Задача 7. Записани са числата от 1 до 8. За един ход се избират две от тях, изтриват се и на тяхно място се записва абсолютната стойност на тяхната разлика. Кое е най-голямото число, което може да остане неизтрито? [1].

Решение: Ето няколко примерни хода, като изтриваните числа при всеки ход са подчертани:

1	<u>2</u>	3	4	<u>5</u>	6	7	8
	1	<u>3</u>	3	4	6	<u>7</u>	8
		1	<u>3</u>	4	4	<u>6</u>	8
			<u>1</u>	3	4	4	<u>8</u>
				3	<u>4</u>	<u>4</u>	7
					<u>0</u>	3	<u>7</u>
						<u>3</u>	<u>7</u>
							4

Тази задача прилича на задача 1. Използваният инвариант е от същия вид. По-трудна е реализацията на оставащото число. Примерни реализации са следните:

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (2, 2, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (2, 2, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (2, 2, 2, 6, 8) \rightarrow$
 $\rightarrow (2, 2, 2, 2) \rightarrow (0, 2, 2) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (0)$
 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (2, 3, 4, 5, 6, 7, 7) \rightarrow (2, 3, 4, 5, 6, 0) \rightarrow (2, 3, 4, 1, 0) \rightarrow$
 $\rightarrow (2, 1, 1, 0) \rightarrow (2, 0, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2)$
 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (2, 2, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (0, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (0, 1, 6, 7, 8) \rightarrow$
 $\rightarrow (0, 1, 6, 1) \rightarrow (0, 0, 6) \rightarrow (0, 6) \rightarrow (6)$
 $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (2, 2, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (0, 4, 5, 6, 7, 8) \rightarrow (0, 1, 6, 7, 8) \rightarrow$
 $\rightarrow (0, 1, 1, 8) \rightarrow (0, 0, 8) \rightarrow (0, 8) \rightarrow (8)$

Учениците се справиха по различен начин. Ето статистика на техните отговори:

Отлични резултати: 29 ученици (51.8%) са направили пълно решение с инвариант и всички реализации. 18 ученици (32,1%) са решили задачата с обосновка и реализации, но без реализация за „0“. Само 9 ученици (16.1%) не са решавали тази задача.

Подробности: Учениците лесно откриват инварианта, четността на броя на нечетните числа. Това означава, че в момента в който, останат две нечетни числа, то тяхната разлика се заменя с четно число, т. е. последното число, което остава при посоченото действие е четно. За пълното решение на задачата е необходимо да се покаже реализация за получаване на всеки един от възможните отговори – 0, 2, 4, 6 и 8. Измежду възможните отговори, най-голямото е 8, което е верният отговор.

В някои решения не е използвано понятието „инвариант“, но вярно е открито свойството, което не се променя и че последното число, не може да бъде нечетно.

На лице е оптимизация при решаването – спазване на два етапа откриване на зависимост (инвариант) и показване реализация на възможните числа. [1]

Литература

- [1] Гроздев, С., *Задачите на Ръ 5. – 6. клас*, Изд. „Архимед 2“ ЕООД, 2013, ISBN: 978-954-779-173-2

INVARIANTS IN 5TH GRADE

Milcho Ivanov^{1, *}, Elena Marinova²

¹ 138 SUZIE “Prof. V. Zlatarski”, Sofia, 3 Alfred Nobel Str., 1113

² 22 SEU “G. S. Rakovski”, Sofia, 134 Vitosha Blvd., 1463 Sofia

^{1, *} Corresponding author: m.ivanov@138suzie.com

² epmarinova@abv.bg

Abstract: The article presents the introduction of the concept of invariant for younger students. Using an example with different ways of counting students in a classroom, it shows that the total number does not change and introduces the concept of invariant. Several diverse problems are examined in which it is justified that a certain situation cannot occur, but for complete solution it is necessary to provide realization to obtain the possible values. The article concludes with statistics on the results from solving an invariant problem at the Voneshta Voda camp.