

НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛ ВЪВ ФИЗИКАТА

Татяна Маджарова^{1, *}, Нели Баева²

¹ Факултет Инженерен, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“,
гр. Варна, ул. „Васил Друмев“ № 73, tmadjarova@gmail.com

² Факултет Инженерен, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“,
гр. Варна, ул. „Васил Друмев“ № 73, n.baeva@nvna.eu

Резюме. Представено е приложение на определения интеграл. Показани са няколко задачи от физиката, в чиито решения съществено се използва определен интеграл.

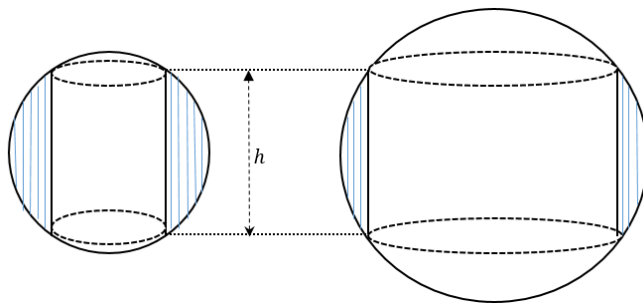
Ключови думи: *определен интеграл, приложения, обем, работа.*

В настоящата статия са разгледани някои приложения на определения интеграл. Тази тема се изучава от студентите във втория семестър на обучението им във ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“. Трудностите, с които се сблъскваме в процеса на обучение по предложената тема са: пропуски в знанията от средното училище и липсата на мотивация. Макс Ландсберг – автор на книги за лидерство, мотивация и коучинг казва, че „по-голямата част от мотивацията се състои в това да завладееш нечий ум с представата за успеха“ [1]. Мотивацията играе важна роля в учебния процес. Тя определя нивото на ангажираност и усилията, които студентите влагат в своето обучение. Когато са мотивирани, те са по-склонни да преодоляват трудностите и да постигат по-добри резултати. Във втория семестър от обучението си обучаемите все още нямат необходимите знания за избраната от тях морска професия. Затова примерите, които са дадени в тази статия са свързани с приложенията на определения интеграл във физиката, която се изучава паралелно с математиката [2].

Първото приложение на определен интеграл е една класическа задача за пресмятане на обем – задачата за салфетъчен пръстен.

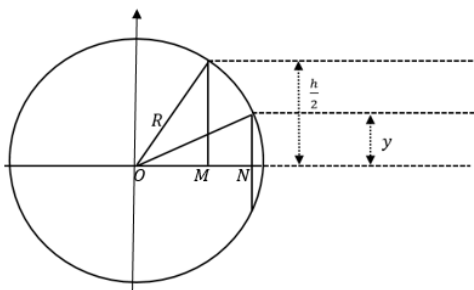
Задача 1. Да предположим, че се правят пръстени за салфетки чрез пробиване на дупки с различни диаметри през две дървени топки (които също имат различни диаметри). Двата пръстена за салфетки имат еднаква

височина h , както е показано на фигура 1. В кой пръстен има повече дърво? [3]



Фигура 1. Пръстени за салфетки с различни радиуси

Решение. Нека радиусът на сферата е R , а радиусът на цилиндричния отвор е OM .



Фигура 2. Сечение на сферата с равнина през центъра ѝ

По Питагорова теорема се определя, че радиусът на отвора е $OM = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$. Радиусът на хоризонталното сечение на сферата с височина y е $ON = \sqrt{R^2 - y^2}$. Обемът на оставащия пръстен е

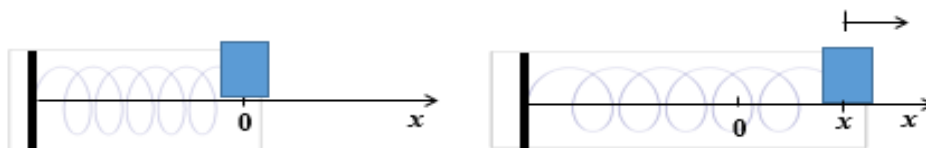
$$V = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sqrt{R^2 - y^2} \right)^2 dy - \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \right)^2 dy =$$

$$\pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = \pi \left(\frac{h^2}{4} y - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \pi \left(\frac{h^3}{4} - \frac{h^3}{12} \right) = \frac{\pi h^3}{6}.$$

Полученият резултат показва, че търсеният обем на всеки от двата пръстена с различни радиуси зависи само от височината на пръстена h .

Определеният интеграл намира приложение за пресмятане на работата, която се извършва за преместването на частица по оста Ox от т. a до т. b под въздействието на сила $f(x)$. В следващия пример ще бъде използван законът на Хук от физиката. Той твърди, че силата, необходима

за поддържане на пружина разтегната на x единици над естествената ѝ дължина, е пропорционална на x , т.е. $f(x) = kx$, където k е положителна константа, наречена константа на пружината (фигура 3). Законът на Хук важи при условие, че x не е твърде голямо.



Фигура 3. Пружина в равновесно състояние и деформирана пружина

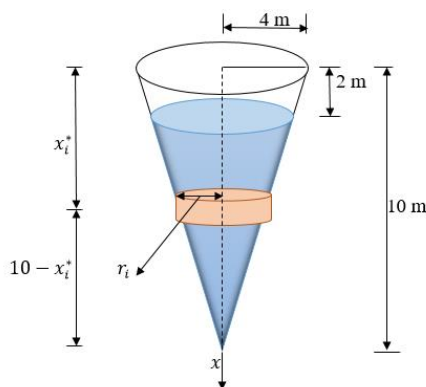
Задача 2. Необходима е сила от 40 N, за да се задържи пружина, която е разтегната от естествената ѝ дължина 5 cm до дължина 10 cm. Да се пресметне работата, която се извършва при разтягане на пружината от 10 cm до 13 cm. [3]

Решение. Според закона на Хук, силата, необходима за задържане на пружината разтегната с x метра над естествената ѝ дължина, е $f(x) = kx$. Когато пружината се разтегне от 5 cm до 10 cm, разтягането е 5 cm = 0,05 m. Това означава, че $f(0,05) = 40$, следователно $0,05k = 40$ и получаваме $k = 800$. Следователно $f(x) = 800x$ и работата, извършена при разтягане на пружината от 10 cm до 13 cm, е

$$A = \int_{0,05}^{0,08} 800x \, dx = 800 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,08} = 400 \cdot (0,08^2 - 0,05^2) = 1,56 \, J.$$

Задача 3. Резервоар има формата на обърнат кръгов конус с височина 10 м и радиус на основата 4 м. Той е запълнен с вода до височина 8 м. Да се пресметне работата, необходима за изпразването на резервоара чрез изпомпване на цялата вода до горната му част. (Плътноста на водата е 1000 кг/м³.) [3]

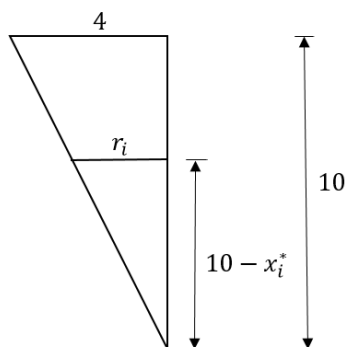
Решение. Нека да измерим дълбочините от горната част на резервоара като въведем вертикална координатна линия, както е показано на фигура 4.



Фигура 4.

Водата се намира от дълбочина 2 m до дълбочина 10 m. Затова разделяме интервала $[2,10]$ на n подинтервала с крайни точки $x_0, x_1, \dots, x_n$. Избираме точки x_i^* в i -тия подинтервал $i = 1, 2, \dots, n$. Това съответства на разделяне на водата на n слоя. Тъй като броят на интервалите n е достатъчно голям, то i -тият слой може да се апроксимира с прав кръгов цилиндър с радиус r_i и височина Δx . Можем да пресметнем r_i от подобните триъгълници на фиг. 5.

$$\frac{r_i}{10-x_i^*} = \frac{4}{10}, \quad r_i = \frac{2}{5}(10-x_i^*).$$



Фигура 5. Напречно сечение на резервоара

Следователно приблизителният обем на i -тия слой вода е $V_i = \pi r_i \Delta x = \frac{4\pi}{25}(10-x_i^*)^2 \Delta x$. Масата на i -тия слой вода е $m_i = \text{плътността. обема} = 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10-x_i^*)^2 \Delta x = 160\pi(10-x_i^*)^2 \Delta x$.

Силата, необходима за изпомпване на този слой вода, трябва да преодолее силата на гравитацията. Затова

$$F_i = m_i \cdot g = 9,8 \cdot 160\pi(10-x_i^*)^2 \Delta x = 1568\pi(10-x_i^*)^2 \Delta x.$$

Всяка частица в слоя трябва да измине разстояние x_i^* до горната част на конуса. Работата A_i , извършена при изпомпването на този слой е

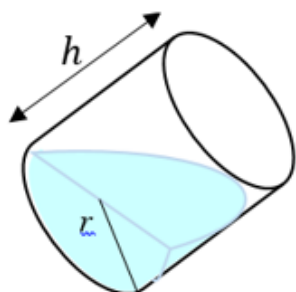
$$A_i \approx F_i \cdot x_i^* \approx 1568\pi x_i^*(10-x_i^*)^2 \Delta x.$$

Тогава общата работа, извършена при изпомпването на целия резервоар е

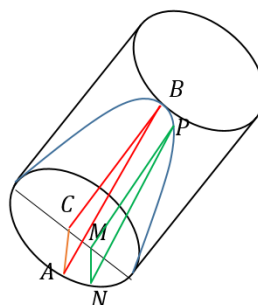
$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 1568\pi x_i^*(10-x_i^*)^2 \Delta x = \int_2^{10} 1568\pi x(10-x)^2 dx = \\ &= 1568\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3) dx = 1568\pi \left(50x^2 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_2^{10} = \\ &= 1568\pi \cdot \frac{2048}{3} \approx 3,4 \cdot 10^6 J. \end{aligned}$$

Задача 4. Цилиндрична чаша с радиус r и височина h се пълни с вода и след това се накланя, докато останалата в чашата вода покрие точно половината от дъното ѝ. Да се намери обемът на водата в чашата. [3]

Решение. Търсеният обем на водата в чашата има вида показан на фигура 6.



Фигура 6.

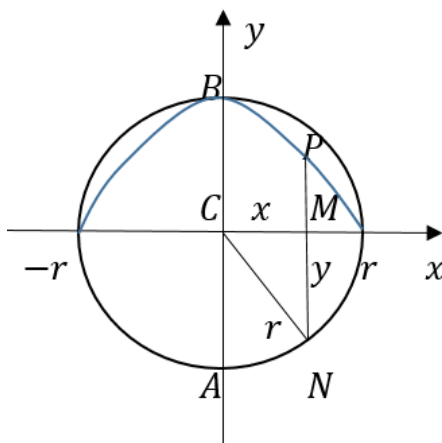


Фигура 7. Напречни сечения на водата в наклонената чаша

За определянето на търсения обем разрязваме водата на успоредни напречни сечения, както е показано на фигура 7.

Триъгълниците ABC и MNP са правоъгълни съответно с прави ъгли при върховете A и N . Лесно се съобразява, че двата триъгълника са подобни. Следователно $\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{AB}$, т.е. $\frac{MN}{r} = \frac{NP}{h}$, откъдето $NP = \frac{h}{r}MN$.

Така за лицето на триъгълник MNP се получава $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2}MN \cdot NP = \frac{h}{2r}MN^2$. Сега да разгледаме проекциите на сеченията в равнината на основата (фиг. 8). Равнините на двата триъгълника са перпендикулярни на основата на чашата и затова те се проектират в отсечки. В равнината на основата въвеждаме координатна система с абсциса Cx , определена от правата, минаваща през точките C и M и ордината Cy , минаваща през точките C и B . Означаваме $x = |\overrightarrow{CM}|$, $y = |\overrightarrow{MN}|$.



Фигура 8.

Очевидно $x^2 + y^2 = r^2$, $MN^2 = r^2 - x^2$. Тогава $S_{\Delta MNP} = \frac{h}{2r}(r^2 - x^2)$. Следователно лицето на всяко правоъгълно напречно сечение се пресмята по формулата $S(x) = \frac{h}{2r}(r^2 - x^2)$. За обема на водата в чашата се намира

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b S(x) dx = \int_{-r}^r \frac{h}{2r}(r^2 - x^2) dx = 2 \int_0^r \frac{h}{2r}(r^2 - x^2) dx = \\ &= \frac{h}{r} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{h}{r} \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{h}{r} \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{2}{3} r^2 h. \end{aligned}$$

Разгледаните задачи могат да се използват при практическите занятия със студентите или като подготовка за студентска олимпиада. Моделирането на реални процеси в различни области на човешката дейност засилва интереса на студентите при изучаването на определените интеграли.

Литература

- [1] Ландсбърг, М., *Първичната сила на мотивацията*, Издателство „Класика и Стил“ ООД, София, 2002, ISBN: 954-9964-29-9
- [2] Grozdev, S., *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*, ADE, Sofia, 2007, ISBN: 978-954-92139-1-1
- [3] Stewart, J., *Calculus (Metric version)*, 8 edition, Cengage Learning, USA, 2015, ISBN: 978-1-305-26672-8

SOME APPLICATIONS OF THE DEFINITE INTEGRAL IN PHYSICS

Tatyana Madzharova^{1,*}, Nely Baeva²

¹ Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy,
Varna, 73 Vasil Drumev Str., tmadjarova@gmail.com

² Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy,
Varna, 73 Vasil Drumev Str., n.baeva@nvna.eu

Abstract. An application of the definite integral is presented. Several physics problems are shown, in the solutions of which the definite integral is essentially used.