

## НЯКОЛКО ЗАДАЧИ ЗА ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Милен Найденов<sup>1</sup>, Веселин Ненков<sup>2,\*</sup>

<sup>1,2</sup> Факултет Инженерен, ВВМУ „Никола Вапцаров“,

ул. „Васил Друмев“ № 73, Варна

\* Автор за кореспонденция: v.nenkov@nvna.eu

**Резюме.** Разгледани са няколко задачи с обща идея. Целта на тези задачи е да предизвикат любопитство и интерес към идеята за геометрична вероятност.

**Ключови думи:** вероятност, случайно събитие.

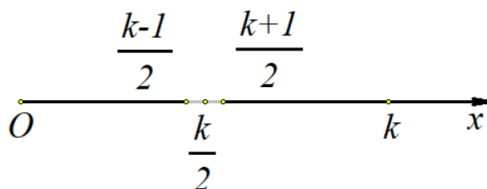
Всичко, което се случва около нас или с нас, се осъществява с по-голяма или по-малка степен на намесата на случайността под въздействието на различни причини [2, 5]. Това предполага изучаване на случайността във връзка с предполагащите я причини. Теория на вероятностите е математическа наука, която изучава строго научно случайните процеси. Характерът и очарованието на теория на вероятностите се проявява дълбоко в съвременната наука и в различните приложения. За да могат да бъдат оценени вероятностните идеи, е необходимо да се разгледат различни страни на случайността. Една от вероятностните идеи се изразява с геометричната вероятност [3, 4, 5]. Геометричната вероятност е дълбоко свързана с принципа за нагледност. Затова се надяваме с помощта на няколко задачи за геометрична вероятност да предизвикаме интерес към този вид вероятностни разсъждения [6].

Разгледаните задачи са сходни по начина на формулиране и решаване. В решенията им се разглеждат множества върху правата, равнината и в пространството [1].

Първата задача разглежда множество върху правата.

**Задача 1.** Пръчката  $l_1$  е  $k$  ( $k \geq 2$ ) пъти по-дълга от пръчката  $l_2$ . Пръчката  $l_1$  е счупена по случаен начин на две парчета. Каква е вероятността от двете парчета и  $l_2$  да не може да се построи триъгълник?

*Решение.* Нека пръчката  $l_2$  има дължина единица. Тогава дължината на  $l_1$  е  $k$ , а на двете парчета, получени от нея, имат дължини  $x$  и  $k-x$ . Да предположим, че пръчката  $l_1$  е счупена по такъв начин, че може да се образува триъгълник със страни 1,  $x$  и  $k-x$ . За да съществува този триъгълник, е необходимо да са изпълнени неравенствата  $1+k-x > k$  и  $1+x > k-x$ . Следователно  $\frac{k-1}{2} < x < \frac{k+1}{2}$ , т.е.  $x$  се съдържа в интервал с дължина единица. Затова благоприятните събития  $\delta$  за съществуване на триъгълник се описват с отсечка, дължината на която е равна на 1 (Фиг. 1). Тъй като това  $0 < x < k$ , пространството на елементарните събития  $\Omega$  е отсечка с дължина, равна на  $k$  (виж фигура 1). Следователно вероятността  $\bar{P}$  да съществува триъгълник е  $\bar{P} = \frac{\delta}{\Omega} = \frac{1}{k}$  [1, 3, 4]. Оттук получаваме, че вероятността да не съществува триъгълник е  $P = 1 - \bar{P} = \frac{k-1}{k}$ .



Фигура 1.

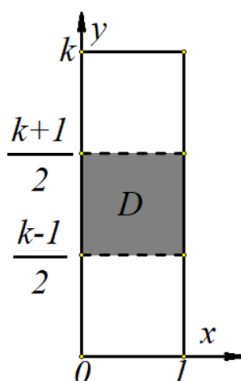
В следващата задача се разглежда двумерна област.

**Задача 2.** Пръчката  $l_1$  е  $k$  пъти по-дълга от пръчката  $l_2$ . Двете пръчки са счупени по случаен начин по на две парчета. Ако  $p$  е вероятността от получените четирите парчета да може да се построи четириъгълник, да се намерят стойностите на  $k$ , при които  $\frac{1}{p}$  е куб на естествено число.

*Решение:* Нека дължините на пръчките  $l_2$  и  $l_1$  са съответно 1 и  $k$ . Тогава получените четири парчета имат дължини  $x$ ,  $1-x$ ,  $y$  и  $k-y$ . Елементарното събитие се характеризира с два параметъра  $x$  и  $y$ , които може да се разглеждат като координати на точка в равнината.

Формулата за геометрична вероятност е  $p = \frac{S_D}{S_\Omega}$  [1, 3, 4], където  $\Omega$  е правоъгълник, състоящ се от точките, за координатите на които са изпълнени неравенствата  $0 < x < 1$  и  $0 < y < k$ , а  $D$  (множеството на благоприятните събития) се състои от точките на  $\Omega$ , координатите на които удовлетворяват условията:  $x+1-x+y > k-y$  и  $x+1-x+k-y > y$ , т.е.  $\frac{k+1}{2} < y < \frac{k-1}{2}$  (виж фигура 2). Следователно  $S_\Omega = k$  и  $S_D = 1$ . Тогава  $p = \frac{1}{k}$

и  $k = \frac{1}{p}$ . Оттук се вижда, че  $\frac{1}{p}$  е куб на естествено число, когато  $k = 2^3, 3^3, 4^3, 5^3 \dots$



Фигура 2.

Следващите две задачи се решават с излизане в пространството.

**Задача 3.** Върху отсечката  $AB$  по произволен начин са избрани точките  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Каква е вероятността от отсечките  $AX$ ,  $XY$ ,  $YZ$  и  $ZB$  да е възможно да се построи четириъгълник?

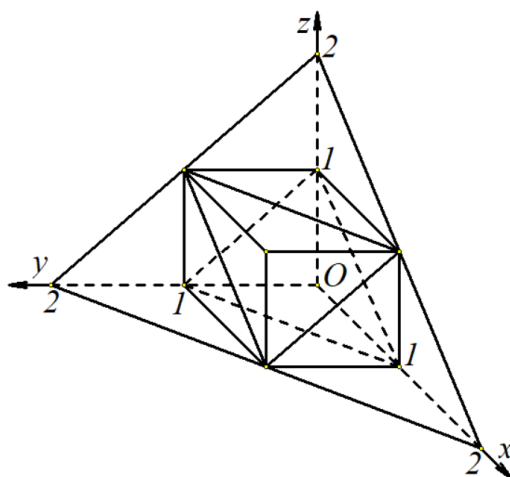
*Решение.* Нека отсечката  $AB$  има дължина 2, а дължините на отсечките  $AX$ ,  $XY$ ,  $YZ$  и  $ZB$  са  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Тогава  $x + y + z + t = 2$ . За числата  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  са изпълнени неравенствата  $0 < x < 2$ ,  $0 < y < 2$ ,  $0 < z < 2$  и  $0 < t < 2$ . От последните неравенства и  $x + y + z = 2 - t$  следва, че  $x + y + z < 2$ . Освен това, тъй като  $x + y + z = 2 - t$ , елементарното събитие се характеризира с три параметъра  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Следователно на всяко случайно събитие съответства точка в тримерното пространство с координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Затова ще използваме формулата за геометрична вероятност  $P = \frac{V_D}{V_\Omega}$  [1,

3, 4], където  $\Omega$  е пространството на всички събития, а  $D$  е множеството на благоприятните събития. От направения анализ следва, че  $\Omega = \{0 < x < 2, 0 < y < 2, 0 < z < 2, x + y + z < 2\}$ . Следователно  $\Omega$  е правоъгълен тетраедър с ръбове при правия тристенен ъгъл, равни на 2 (виж фигура 3).

Обемът на този тетраедър е  $V_\Omega = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$ . Благоприятните събития определяме по следния начин. За да съществува четириъгълникът, е изпълнено неравенството  $x + y + z > t$ . Затова от  $t = 2 - x - y - z$  следва, че  $x + y + z > 1$ . Освен това всяка от страните на четириъгълника е по-малка от полупериметъра му. Затова са изпълнени неравенствата  $x < 1$ ,  $y < 1$  и  $z < 1$ . Следователно  $D = \{x < 1, y < 1, z < 1, x + y + z > 1\}$ . Това е тялото, което се получава след отрязването от куб с ръб 1 на два правоъгълни тетраедъра с

ръбове при правия тристенен ъгъл, равни на 1 (виж фигура 3). Следователно обемът на  $D$  е  $V_D = 1^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ . Така получаваме, че търсената вероятност е

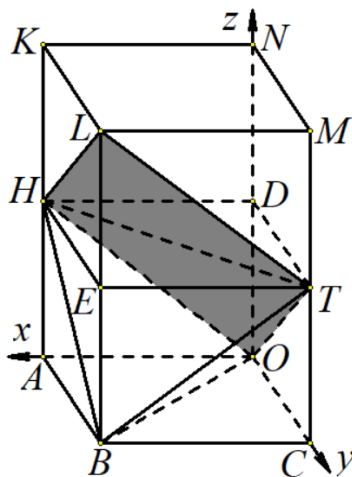
$$P = \frac{V_D}{V_\Omega} = \frac{1}{2}.$$



Фигура 3.

**Задача 4.** Дадени са три пръчки. Две от тези пръчки имат еднаква дължина, а дължината на третата е равна на сумата от дължините на първите две. От всяка пръчка по случаен начин е отчупено по едно парче. Каква е вероятността от трите парчета да е възможно да се построи триъгълник?

*Решение:* Нека дадените пръчки имат дължини 1, 1 и 2, а дължините на отчупените от тях парчета са съответно  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Елементарното събитие се характеризира с наредената тройка  $(x, y, z)$ , за която са изпълнени неравенствата  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  и  $0 < z < 2$ . Затова разглеждаме  $(x, y, z)$  като точка в пространството и получаваме, че множеството на всички изходи се състои от точките, лежащи в паралелепипеда  $OABCKLM$ , който има за основа квадрат  $OABC$  със страна 1 и височина с дължина 2 (виж фигура 4).



Фигура 4.

Обемът на  $OABCKLM$  е  $V_{OABCKLM} = 2$ . Благоприятните събития удовлетворяват условията  $y+z > x$ ,  $z+x > y$  и  $x+y > z$ . Ако  $D$ ,  $E$ ,  $H$  и  $T$  са средите съответно на околните ръбове  $ON$ ,  $BL$ ,  $AK$  и  $CM$ , точките  $O$ ,  $B$  и  $H$  лежат в равнина с уравнение  $-x+y+z=0$ , точките  $O$ ,  $B$  и  $T$  лежат в равнина с уравнение  $x-y+z=0$  и точките  $O$ ,  $T$ ,  $L$  и  $H$  лежат в равнина с уравнение  $x+y-z=0$  (виж фигура 4). Следователно благоприятните събития се характеризират с точките в четириъгълната пирамида  $OTLHB$  основа  $OTLH$  и връх  $B$  (виж фигура 4). За обема ѝ намираме

$$\begin{aligned} V_{OTLHB} &= V_{HETL} + V_{HETOB} = V_{HETL} + V_{OABCDHET} - (V_{BOHA} + V_{BOTC} + V_{HTLD}) = \\ &= \frac{1}{6} + 1 - \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Следователно търсената вероятност е равна на  $\frac{V_{OTLHB}}{V_{OABCKLM}} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$  [1, 3, 4].

В заключение ще изразим надеждата, че случайната среща с разгледаните задачи е предизвикала закономерен интерес към разгледаната вероятностна идея. Надяваме се по този начин да сме насочили любопитството към стихията на случайността да прерасне в търсене на закономерности дълбоко в недрата на скритата предопределеност.

## Литература

- [1] Вентцел, Е., Л. Овчаров, *Прикладные задачи теории вероятностей*, Радио и связь, Москва, 1983
- [2] Кордемски, Б., *Математиката изучава случайността*, Народна просвета, София, 1978
- [3] Маджарова, Т., *Теория на вероятностите и математическа статистика*, ВВМУ „Никола Вапцаров“, Варна, 2016, ISBN: 978-954-8991-87-2
- [4] Миразчийски, Й., И. Стоянов, *Задачи по вероятности*, Народна просвета, София, 1979
- [5] Фелър, У., *Увод в теория на вероятностите и нейните приложения*, 1 част, Наука и изкуство, София, 1986,
- [6] Grozdev, S., *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*, ADE, Sofia, 2007, ISBN: 978-954-92139-1-1

## SOME PROBLEMS ON GEOMETRIC PROBABILITY

Milen Naydenov<sup>1</sup>, Veselin Nenkov<sup>2, \*</sup>

<sup>1, 2</sup> *Department of Mechatronics, Faculty of Engineering,  
Nikola Vaptsarov Naval Academy, 73 Vasil Drumev St., Varna, Bulgaria*

<sup>\*</sup> *Corresponding author: v.nenkov@nvna.eu*

**Abstract.** Several problems with a common idea are examined. The purpose of these problems is to arouse curiosity and interest in the idea of geometric probability.