

## ШЕСТОЪГЪЛНИЦИ НА МАРИОН И ЕЛИПСИ

**Веселин Ненков**

*Факултет Инженерен, ВВМУ “Никола Вапцаров”,  
ул. „Васил Друмев“ № 73, 9002 Варна, v.nenkov@nvpa.eu*

**Резюме.** Разгледано е едно обобщение на теоремата на Марион, отнасяща се до специално конструиран шестоъгълник в равнината на даден триъгълник. Обобщението, както и оригиналът, е получено с помощта на програмата Geometer’s Sketchpad. Отбелязани са и две специални елипси, свързани с разглежданите шестоъгълници.

**Ключови думи:** *триъгълник, елипса, медицентър, GSP.*

### Формулировка на теоремата на Марион

Обикновено една наука се изучава като учебна дисциплина в определена последователност от строго следващи се стъпки. От друга страна тази наука първоначално се развива до известна степен хаотично, а след определен период от време, когато е натрупан съответният научен материал, тази наука се канонизира като се подредят основните ѝ структурни елементи в подходяща последователност. От своя страна изучаващите за първи път тази наука имат повече склонност да прилагат известна неподреденост в ученето. Затова при въвеждането в определен материал е по-добре без прилагане на научна строгост да се установят основните твърдения, а след това да се премине към тяхното строго обосноваване [1, 12].

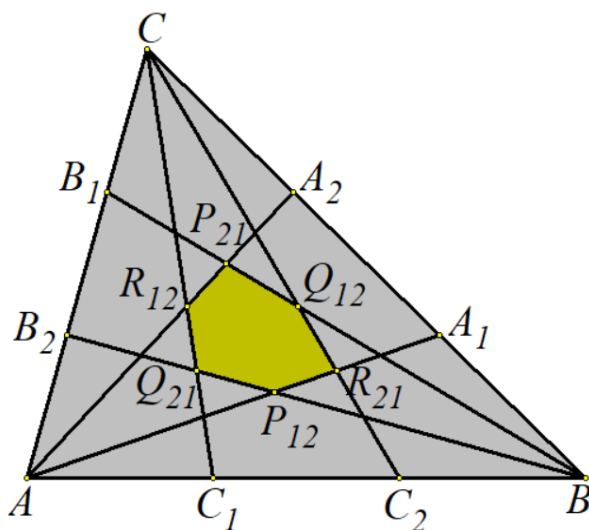
Такъв подход е изключително подходящ при изучаването на различни геометрични теми [2, 4]. Подходящ начин за въвеждане в такива теми и тяхното изследване е използването на компютърни програми, които имат геометрична насоченост. Такава е програмата Geometer’s Sketchpad (GSP) [3, 15, 19]. Използването на тази или друга програма предизвиква определено любопитство към разглежданата тема и въвежда малко ред в първоначалния хаос [1]. Любопитството премахва усещането за задължение

(защото в училище те учат, каквото те искат), а редът води до логика, която изисква известно съсредоточаване и постоянство [9, 18, 19].

Като пример, илюстриращ казаното, ще използваме едно твърдение, наречено теорема на Марион. След извършване на експерименти с помощта на Geometer's Sketchpad през 1993 г. американската математичка Марион Уолтър (Marion Walter) забелязва едно свойство на триъгълника, което е наречено теорема на Марион [21], [23]. За коректното формулиране на тази теорема ще са ни необходими следващите означения.

Нека  $ABC$  е произволен триъгълник с лице  $S$ . Двойките точки  $(A_1, A_2)$ ,  $(B_1, B_2)$  и  $(C_1, C_2)$  делят съответно страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  по на три равни части, като  $A_1$  е между  $B$  и  $A_2$ ,  $B_1$  е между  $C$  и  $B_2$  и  $C_1$  е между  $A$  и  $C_2$ . Въвеждаме още следните означения:  $AA_1 \cap BB_2 = P_{12}$ ,  $AA_2 \cap BB_1 = P_{21}$ ,  $BB_1 \cap CC_2 = Q_{12}$ ,  $BB_2 \cap CC_1 = Q_{21}$ ,  $CC_1 \cap AA_2 = R_{12}$ ,  $CC_2 \cap AA_1 = R_{21}$ . При така въведените означения е изпълнена следната

**Теорема на Марион.** *Лицето на шестоъгълника  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$  е равно на  $\frac{1}{10}S$ .*



Фигура 1.

По-нататък чрез използване на експерименти с GSP ще получим едно обобщение на теоремата на Марион.

### Обобщение на теоремата на Марион

Известни са някои обобщения на теоремата на Марион. Едно от тях е на Luca Goldoni [22]. В него се използва разделяне на страните на триъгълника на четири равни части и полученият резултат е  $\frac{8}{35}S$  [22]. В

друго обобщение, наречено теорема на Морган (Morgan), се разглежда разделяне на страните на  $n$  равни части, където  $n$  е нечетно число.

Полученият резултат е  $\frac{8}{(3n+1)(3n-1)} \cdot S$  [20, 21].

Тук ще разгледаме друг вид обобщение на теоремата на Марион. За целта двойките точки  $(A_1, A_2)$ ,  $(B_1, B_2)$  и  $(C_1, C_2)$  делят съответно страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  по следния начин:

$$\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{n} \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CA_2} = \frac{1}{n} \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{n} \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AB_2} = \frac{1}{n} \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{n} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BC_2} = \frac{1}{n} \overrightarrow{BA}$$

където  $n$  е произволно реално положително число.

Шестоъгълниците  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$  се конструират за всяко  $n$  по същия начин, както по-горе. Затова за всяко  $n$  съответният шестоъгълник  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$  ще наричаме *шестоъгълник на Марион*. Ако  $n=3$ , получаваме оригиналният шестоъгълник на Марион.

След извършване на известни експерименти с GSP установяваме, че лицето  $\bar{S}$  на шестоъгълника  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$  и лицето  $S$  на  $\triangle ABC$  са свързани с равенство, което формулираме чрез следващата

**Теорема 1.**  $\bar{S} = \frac{2(n-2)^2}{(n+1)(2n-1)} \cdot S$ .

Ако въведем и означенията  $AA_1 \cap BB_1 = P_1$ ,  $AA_2 \cap BB_2 = P_2$ ,  $BB_1 \cap CC_1 = Q_1$ ,  $BB_2 \cap CC_2 = Q_2$ ,  $CC_1 \cap AA_1 = R_1$ ,  $CC_2 \cap AA_2 = R_2$ , за лицето  $S$  на звездовидния шестоъгълник на Марион  $P_{12}Q_{12}R_{21}P_{21}Q_{21}R_{12}P_{12}Q_{21}R_{21}$  получаваме

**Теорема 2.**  $S = \frac{2(n-2)^2(n^2+2n-2)}{(n^3+1)(2n-1)} \cdot S$ .

## Доказателства на теорема 1 и теорема 2

Строгото обосноваване на един геометричен факт може да се извърши по различни начини [7, 8, 10, 11, 12, 16]. Тук ще използваме барицентрични координати спрямо  $\triangle ABC$ , като  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$  и  $C(0,0,1)$  [14]. От условията, на които са подчинени двойките точки  $(A_1, A_2)$ ,  $(B_1, B_2)$  и  $(C_1, C_2)$ , получаваме координатните представяния:

$$A_1\left(0, \frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}\right), A_2\left(0, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right), B_1\left(\frac{1}{n}, 0, \frac{n-1}{n}\right),$$

$$B_2\left(\frac{n-1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right), C_1\left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}, 0\right), C_2\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, 0\right).$$

От тези координати определяме параметричните уравнения на правите  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$ , от които намираме следващите координатни представяния:

$$P_{12}\left(\frac{n-1}{2n-1}, \frac{n-1}{2n-1}, \frac{1}{2n-1}\right), P_{21}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \frac{n-1}{n+1}\right), Q_{12}\left(\frac{1}{2n-1}, \frac{n-1}{2n-1}, \frac{n-1}{2n-1}\right),$$

$$Q_{21}\left(\frac{n-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right), R_{12}\left(\frac{n-1}{2n-1}, \frac{1}{2n-1}, \frac{n-1}{2n-1}\right), R_{21}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{n-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right),$$

$$P_1\left(\frac{1}{n^2-n+1}, \frac{(n-1)^2}{n^2-n+1}, \frac{n-1}{n^2-n+1}\right), P_2\left(\frac{(n-1)^2}{n^2-n+1}, \frac{1}{n^2-n+1}, \frac{n-1}{n^2-n+1}\right),$$

$$Q_1\left(\frac{n-1}{n^2-n+1}, \frac{1}{n^2-n+1}, \frac{(n-1)^2}{n^2-n+1}\right), Q_2\left(\frac{n-1}{n^2-n+1}, \frac{(n-1)^2}{n^2-n+1}, \frac{1}{n^2-n+1}\right),$$

$$R_1\left(\frac{(n-1)^2}{n^2-n+1}, \frac{n-1}{n^2-n+1}, \frac{1}{n^2-n+1}\right), R_2\left(\frac{1}{n^2-n+1}, \frac{n-1}{n^2-n+1}, \frac{(n-1)^2}{n^2-n+1}\right).$$

Ако лицата на триъгълниците  $P_{12}R_{21}Q_{12}$ ,  $P_{21}R_{12}Q_{12}$ ,  $P_{12}R_{12}Q_{21}$ ,  $P_{12}Q_{12}R_{12}$  са съответно  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ , от горните координати се получава

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{(n-1)(n-2)^2}{(n+1)(2n-1)^2} \cdot S \text{ и } S_4 = \frac{(n-2)^2}{(2n-1)^2} \cdot S \text{ [14].}$$

$$\bar{S} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{2(n-2)^2}{(n+1)(2n-1)} \cdot S. \text{ С това теорема 1 е доказана.}$$

От последните координатни представяния се получава, че триъгълниците  $P_1Q_{12}R_{21}$ ,  $R_2P_{21}Q_{12}$ ,  $Q_1R_{12}P_{21}$ ,  $P_2Q_{21}R_{12}$ ,  $R_1P_{12}Q_{21}$ ,  $Q_2R_{21}P_{12}$  имат

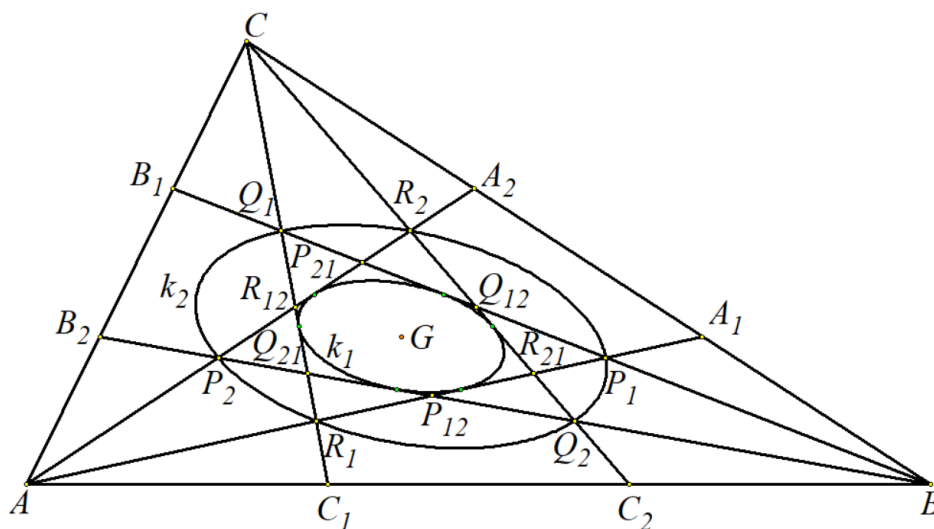
$$\text{лице, равно на } S_0 = \frac{(n-1)(n-2)^2}{(n^3+1)(2n-1)} \cdot S. \text{ Следователно}$$

$$S = \bar{S} + S_0 = \frac{2(n-2)^2(n^2+2n-2)}{(n^3+1)(2n-1)} \cdot S. \text{ С това е доказана и теорема 2.}$$

## Елипси, свързани с шестоъгълниците на Марион

Обикновено, когато в някаква геометрична конструкция участват шест точки, се очаква те да лежат на крива от втора степен [5, 6, 13, 17]. Експериментите с GSP обаче показват, че шестоъгълникът на Марион  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$  не е вписан в такава крива. Оказва се обаче, че той е описан около елипса, т.е. изпълнена е следната

**Теорема 3.** *За всяко реално положително число  $n$  шестоъгълникът на Марион  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$  е описан около елипса  $k_1$ .*



Фигура 2.

Също така, с помощта на GSP, се забелязва, че върховете  $P_1, R_2, Q_1, P_2, R_1$  и  $Q_2$  на звездовидния шестоъгълник на Марион  $P_1Q_2R_2P_2Q_1R_1P_1Q_2R_2P_2Q_1R_1P_1Q_2R_2$  лежат на една елипса, т.е. изпълнена е следната

**Теорема 4.** *За всяко реално положително число  $n$  точките  $P_1, R_2, Q_1, P_2, R_1$  и  $Q_2$  лежат на една елипса  $k_2$ .*

Оказва се още, че двете елипси са концентрични. По-точно, в сила е следната

**Теорема 5.** *Медицентърът  $G$  на  $\triangle ABC$  е център на елипсите  $k_1$  и  $k_2$*

За да докажем теорема 4, използваме координатите на точките  $P_1, R_2, Q_1, P_2, R_1$  и  $Q_2$  и образуваме система от пет уравнения с пет неизвестни [13]. Тази система решаваме с помощта на програмата Maple, след което установяваме, че тези точки лежат на крива с уравнение  $(n^2 - n + 1)(yz + zx + xy) - (n - 1)(x + y + z)^2 = 0$ . Това уравнение решено заедно

с равенството  $z = -x - y$  води до квадратното уравнение  $x^2 - xy + y^2 = 0$ , което няма реални решения. Следователно получената крива е елипса.

Доказателството на теорема 3 на пръв поглед изглежда по-трудно. Експериментите с GSP показват, че допирните точки на  $k_1$  със страните на  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$  са средите на отсечките  $P_1Q_1$ ,  $Q_1R_1$ ,  $R_1P_1$ ,  $P_2Q_2$ ,  $Q_2R_2$ ,  $R_2P_2$ . Затова, както при  $k_2$ , намираме, че уравнението на  $k_1$  е  $4(n^2 - n + 1)(yz + zx + xy) - n^2(x + y + z)^2 = 0$ . Всъщност тази елипса е вписана в триъгълниците  $P_1Q_1R_1$  и  $P_2Q_2R_2$ , като се допира до средите на страните им. Затова оттук следва, че техният общ медицентър  $G$  е център на  $k_1$ .

Доказателство на теорема 5 може да се получи като използваме следният факт: Ако  $(x_1, y_1, z_1)$  лежи върху елипса, симетричната ѝ точка  $(x_2, y_2, z_2)$  спрямо  $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , също лежи върху елипсата, когато са изпълнени равенствата  $x_2 = \frac{2}{3} - x_1$ ,  $y_2 = \frac{2}{3} - y_1$ ,  $z_2 = \frac{2}{3} - z_1$ . Като знаем уравненията на кривите  $k_1$  и  $k_2$  лесно проверяваме, че  $G$  е техен център. Може да се покаже още, че елипсите  $k_1$  и  $k_2$  са хомотетични с център на хомотетия  $G$ .

## Заклучение

От представеното изложение се забелязва, че ако се вникне по различен начин в оригиналната теорема на Марион, могат да се получат различни нейни обобщения. Полученият от Luca Goldoni [22] случай следва от теорема 1 при  $n = 4$ . Теоремата на Морган обаче дава съвсем различни резултати [20, 21]. Това се дължи на факта, че двете обобщения са съвсем различни. Трябва да се отбележи и това, че формулата в теорема 1 е валидна и за случаите, в които  $n$  не е цяло число. Забелязва се още, че при  $n = 5$  е изпълнено равенството  $\bar{S} = \frac{1}{3}S$ . Следователно при  $n = 3$  и  $n = 5$  лицето на  $\triangle ABC$  е целочислено кратно на лицето на шестоъгълника на Марион  $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$ . Оттук възниква въпросът за намиране на други стойности на  $n$ , при които е в сила такова целочислено отношение.

Не на последно място с шестоъгълниците на Марион са свързани две концентрични и хомотетични елипси. Доказателството за съществуването на  $k_1$  беше съществено подпомогнато от наблюденията върху разглежданата конфигурация с GSP.

## Литература

- [1] Георгиева, М., С. Гроздев, *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*, Изток-Запад, София, 2016, ISBN: 987-619-152-869-1
- [2] Гроздев, С., *Европейско кенгуру*, СМБ, София, 2005
- [3] Гроздев, С., Методология и информационни технологии в образованието, *Материали Международного круглого стола "Современные технологии преподавания естественно-научных и гуманитарных дисциплин"*. София, 2008, 17–22
- [4] Гроздев, С., Р. Николаев, Т. Милкова, Анализ на задачите и представянето на учениците от XI и XII клас на XIX математически турнир „Перперикон“, *Математика и информатика*, 2020, 1, 63, 67–77
- [5] Гроздев, С., В. Ненков, *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*, Архимед, София, 2012, ISBN: 978-954-779-136-7
- [6] Гроздев, С., В. Ненков, Ортоцентър на вписан четириъгълник, *Математика плюс*, 2011, 4, 63–69, ISSN: 0861-8321
- [7] Гроздев, С., В. Ненков, Св. Дойчев, *За високи постижения в математиката (в помощ на учителя)*, „Фондация Миню Балкански“ и „Фондация Америка за България“, София, 2012, ISBN: 978-954-92830-3-7
- [8] Гроздев, С., В. Ненков, И. Шаркова, *В помощ на учителя по математика. Сборник от методически разработки*, „Фондация Миню Балкански“ и „Фондация Америка за България“, София, 2015, ISBN: 978-954-92830-5-1
- [9] Гроздев, С., Д. Стефанова, К. Василева, С. Колева, Р. Тодорова, Стимулиране на творческата активност при билингви чрез динамичен софтуер, *Математика и информатика*, 2014, 3, 247–273, ISSN: 1314-8532
- [10] Гроздев, С., Д. Стефанова, И. Иванов, *Планиметрични задачи за триъгълник без тригонометрични функции*, Ямбол, 2016, ISBN: 978-619-7020-12-0
- [11] Гроздев, С., Д. Стефанова, И. Иванов, *Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции*, Ямбол, ISBN: 978-619-7020-16-8
- [12] Ненков, В., *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*, Архимед София, 2020, ISBN: 978-954-779-291-3
- [13] Ненков, В., Едно обобщение на теоремата на ван Ламосен, *Синергетика и рефлексия в обучението по математика и информатика*, Доклади на

- юбилейна международна конференция, Пампорово, 16–18 октомври, 2020, 113–119, ISBN: 978-619-202-595-3
- [14] Паскалев, Г., И. Чобанов, *Забележителни точки в триъгълника*, Народна просвета, София, 1985
- [15] Сергеева, Т., М. Шабанова, С. Гроздев, *Основы динамической геометрии*, АСОУ, Москва, 2014
- [16] Grozdev, S., *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*, ADE, Sofia, 2007, ISBN: 978-954-92139-1-1
- [17] Grozdev, S., V. Nenkov, Several properties of the inscribed conic sections and a method for proofs with complex numbers, *International Journal of Computer Mathematics (IJCM)*, 2020, Vol. 5, pp. 53–70, ISSN: 2367-7775
- [18] Karaibryamov, S., B. Tsareva, B. Zlatanov, Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 2013, Vol. 7, 1, 22{51}, ISSN: 1933-2823
- [19] Koleva, E., N. Baeva, A Comparative Analysis of Assessment Results From Face-To-Face and Online Exams, *Mathematics and Informatics*, 2022, 4, 335–343
- [20] Morgan, R., No Restriction Needed. The Mathematics, *Teacher*, 1994, 87, 726–743
- [21] Maushard, M., From the *Baltimore Sun*, clipped from the *Arkansas Democrat-Gazette* 12/21/94
- [22] [https://www.researchgate.net/publication/301284954\\_A\\_GENERALIZATION\\_OF\\_MARION\\_WALTER'S\\_THEOREM](https://www.researchgate.net/publication/301284954_A_GENERALIZATION_OF_MARION_WALTER'S_THEOREM) (последно посетен: 15.09.25)
- [23] <https://mathworld.wolfram.com/MarionsTheorem.html> (последно посетен: 15.09.25)

## MARION HEXAGONS AND ELLIPSES

Veselin Nenkov

*Department of Mechatronics, Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy, 73, Vasil Drumev St., 9002 Varna, Bulgaria, e-mail: v.nenkov@nvna.eu*

**Abstract.** A generalization of Marion's theorem is considered, concerning a specially constructed hexagon in the plane of a given triangle. The generalization, like the original, was obtained using the Geometer's Sketchpad program. Two special ellipses associated with the hexagons under consideration are also noted.