

НЯКОИ ЗАДАЧИ ОТ ФУНКЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Диана Стефанова^{1,*}, Татяна Маджарова²

¹ ОУ „Никола Вапцаров“, Асеновград, dianastefanova13@gmail.com

² Факултет Инженерен, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, гр. Варна, ул. „Васил Друмев“ № 73, tmadjarova@gmail.com

* Автор за кореспонденция: dianastefanova13@gmail.com

Резюме. Статията е посветена на решаване на задачи от функционални уравнения, като се използват субституции и метода на неопределените коефициенти. Предложени са подходи за решаването им.

Ключови думи: функционални уравнения

В настоящата статия разглеждаме някои функционални уравнения, които се решават чрез използването на субституции и метода на неопределените коефициенти. Тази тема в сега действащите учебни програми не е застъпена. Предложените примери са подходящи за ученици, обучаващи се в профил математика и студенти. Разработката е насочена към проявяващи интерес към математиката и спомага за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За решаването на тези задачи е необходимо много добро владение на метода на неопределените коефициенти, различните видове уравнения, системи уравнения и свойствата на различните функции [2, 3, 4, 7]. Разгледаните задачи допринасят за усъвършенстване уменията на учениците и студентите; усвояване от тях на различни математически дейности в различни ситуации; повишаване на математическата култура и интелектуалното им развитие [2, 8].

Функционалните уравнения е тема от математическия анализ, възникнала във връзка с намирането на аналитичния вид на функция, като има определени условия. Трудно е да се даде определение на понятието функционално уравнение. Най-общо казано, това е уравнение, в което се търси неизвестна функция по дадени нейни свойства, определящи се от едно или няколко равенства (в които не участват производни и неопределени интегрални на тази функция). Обикновено тези уравнения се отнасят към така

наречените „нестандартни задачи“, тъй като не съществува точно определен метод за тяхното решаване. Функционалните уравнения са два основни вида, а именно уравнения с една променлива и уравнения с повече от една променлива. Тук предлагаме примери само от уравнения с една променлива, които илюстрират конкретни приложения на разгледаните идеи.

Задача 1. Да се намери линейна функция $f(x)$, която удовлетворява уравнението $xf(x) - 3f(x+1) = 2x^2 - 11x + 9$.

Решение: Понеже търсената функция е линейна, можем да я запишем във вида $f(x) = ax + b$ и след като я заместим в уравнението, последователно получаваме $x(ax+b) - 3(a(x+1)+b) = 2x^2 - 11x + 9$ и преобразуваме до $ax^2 + (b-3a)x - 3a - 3b = 2x^2 - 11x + 9$. Тъй като последното равенство е тъждество относно x , по метода на неопределените коефициенти имаме $a = 2$ и $b - 3a = -11$, откъдето следва, че коефициентите на функцията $f(x)$ са $a = 2$ и $b = -5$, т.е. $f(x) = 2x - 5$. Непосредствено заместване на получената функция в даденото уравнение показва, че тя удовлетворява това уравнение [1,2].

Задача 2. Да се намери квадратна функция $f(x)$, която удовлетворява уравнението $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$ и $f(0) = 5$.

Решение: Понеже търсената функция е квадратна, можем да я запишем във вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ и след като я заместим в уравнението, последователно получаваме $a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 8x + 3$ и преобразуваме до $2ax + a + b = 8x + 3$. Тъй като последното равенство е тъждество относно x , по метода на неопределените коефициенти имаме $2a = 8$ и $a + b = 3$, откъдето следва, че коефициентите на функцията $f(x)$ са $a = 4$ и $b = -1$. От равенството $f(0) = 5$ намираме, че $c = 5$ и получаваме, че $f(x) = 4x^2 - x + 5$. Непосредствено заместване на получената функция в даденото уравнение показва, че тя удовлетворява това уравнение [1,6].

Задача 3. Да се намерят всички полиноми $f(x)$, които удовлетворяват равенството $f(x+1) - f(x) = 2x + 1$.

Решение: Нека $f(x)$ е полином от степен n , т.е. има вида $f(x) = a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)}x + a_n$ ($a_0 \neq 0$). Тогава $f(x+1) - f(x) = a_0(x+1)^n + a_1(x+1)^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)}(x+1) + a_n - a_0x^n - a_1x^{(n-1)} - \dots - a_{(n-1)}x - a_n$

$a_0[(x+1)^n - x^n] + a_1[(x+1)^{(n-1)} - x^{(n-1)}] + \dots + a_{(n-1)}$. Лесно се съобразява, че $\deg[f(x+1) - f(x)] = n-1$. От друга страна $\deg[f(x+1) - f(x)] = \deg(2x+1) = 1$, т.е. $n-1=1 \Rightarrow n=2$. От направените разсъждения следва, че $f(x)$ има вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогава $a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x+1$, т.е. $2ax + a + b = 2x+1$, откъдето $a=1, b=0$, а c е произволно реално число. Следователно търсените полиноми, които удовлетворяват даденото равенство, имат вида $f(x) = x^2 + c$. Непосредствено заместване на получената функция в даденото уравнение показва, че тя удовлетворява това уравнение.

Задача 4. Да се намери функцията $f(x)$, която удовлетворява уравнението $f\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = x^2$.

Решение: Полагаме $\frac{2x-1}{x-3} = y$, след това изразяваме $x = \frac{3y-1}{y-2}$. Като използваме, че $f\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = x^2$ можем да запишем $f(y) = \left(\frac{3y-1}{y-2}\right)^2$, откъдето $f(y) = \frac{9y^2 - 6y + 1}{y^2 - 4y + 4}$. Следователно $f(x) = \frac{9x^2 - 6x + 1}{x^2 - 4x + 4}$. С непосредствено заместване в даденото уравнение установяваме, че получената функция удовлетворява условието [5,6].

Задача 5. Да се намери функция $f(x)$ дефинирана за всяко число $x \neq 0$, която удовлетворява уравнението $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$.

Решение: Полагаме $\frac{x+1}{x} = y$, след това преобразуваме $x+1 = xy \Leftrightarrow x(y-1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y-1}$. Пресмятаме $\frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x} = y^2 - y + 1$. Така уравнението приема вида $f(y) = y^2 - y + 1$, т.е. търсената функция е $f(x) = x^2 - x + 1$. Непосредствено заместване на получената функция в даденото уравнение показва, че тя удовлетворява това уравнение [1].

Задача 6. Ако $f(e^x) = x^3 + \sin x$, да се намери $f(x)$.

Решение: Полагаме $e^x = y$. Очевидно $y > 0$. Следователно $x = \ln y$. Така уравнението приема вида $f(y) = \ln^3 y + \sin(\ln y)$, търсената функция е

$f(x) = \ln^3 x + \sin(\ln x)$. Непосредствено заместване на получената функция в даденото уравнение показва, че тя удовлетворява това уравнение.

Задача 7. Нека a е реално число и $a \neq \pm 1$. Да се намерят всички функции $f(x)$ дефинирани за всяко число $x \neq 1$, удовлетворяващи условието $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = a \cdot f(x) + g(x)$, ако $g(x)$ е произволна функция, дефинирана за всяко $x \neq 1$.

Решение: Полагаме $\frac{x}{x-1} = y$, откъдето $xy - y = x, x(y-1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$.

Така уравнението приема вида $f(y) = a \cdot f\left(\frac{y}{y-1}\right) + g\left(\frac{y}{y-1}\right)$, т.е.

$f(x) = a f\left(\frac{x}{x-1}\right) + g\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Следователно за търсената функция се получава системата

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = a \cdot f(x) + g(x) \\ f(x) = a \cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right) + g\left(\frac{x}{x-1}\right) \end{cases}$$

След заместване във второто уравнение на $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ с дадения израз в първото уравнение се получава $f(x) = a \cdot [a f(x) + g(x)] + g\left(\frac{x}{x-1}\right)$, откъдето следва, че $(1-a^2) f(x) = a \cdot g(x) + g\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Следователно търсените функции $f(x)$ имат вида $f(x) = \frac{a}{1-a^2} g(x) + \frac{1}{1-a^2} g\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Непосредствено заместване на получения клас от функции в даденото уравнение показва, че те удовлетворяват това уравнение [3,4].

Задача 8. (ВТУЗ, 1983 г.) Да се намери функция f , дефинирана за всяко число $x \neq 0$, която удовлетворява уравнението $21f(x) - 7f\left(\frac{1}{x}\right) = 12x$.

Решение: В даденото уравнение заместваем x с $\frac{1}{x}$ и получаваме $21f\left(\frac{1}{x}\right) - 7f(x) = \frac{12}{x}$. След което записваме системата

$$\begin{cases} 21f(x) - 7f\left(\frac{1}{x}\right) = 12x \\ 21f\left(\frac{1}{x}\right) - 7f(x) = \frac{12}{x} \end{cases}.$$

Решаваме системата и за $f(x)$ получаваме $f(x) = \frac{9x^2 + 3}{14x}$. С непосредствено заместване в даденото уравнение установяваме, че полученото уравнение удовлетворява условието [9].

Задача 9. Да се намери функция $f(x)$, дефинирана за всяко реално число $x \neq 0; 1$, която удовлетворява уравнението $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.

Решение: Полагаме $\frac{1}{1-x} = y$ и изразяваме $x = \frac{y-1}{y} = 1 - \frac{1}{y}$. Така уравнението приема вида $f\left(1 - \frac{1}{y}\right) + f(y) = 1 - \frac{1}{y}$, т.е. $f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Полагаме $1 - \frac{1}{x} = t$, $\frac{1}{x} = 1 - t$, $x = \frac{1}{1-t}$, $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{1}{t}$. Получава се уравнението $f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1-t}$, т.е. $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$.

За търсената функция $f(x)$ се получава системата

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \\ f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = 1 - \frac{1}{x} \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \end{cases}.$$

След почленно изваждане на второто и третото уравнение се получава $f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$. Така горната система се свежда до системата

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \\ f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} \end{cases}.$$

Събираме почленно двете уравнения и намираме, че $2f(x) = x + 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, а оттам и $f(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2x(1-x)}$. Непосредствено заместване на получената функция в даденото уравнение показва, че тя удовлетворява това уравнение.

Литература

- [1] Вълкачовски, М., Ж. Димитрова, Функционални уравнения, *Управление и образование*, 2013, том IX (3), 99-105, ISSN: 13126121
- [2] Георгиева, М., С. Гроздев, *Морфодинамика за развитието на ноосферния интелект*, 4-то преработено издание, изд. „Изток – Запад“, 2016, ISBN: 978-619-90522-0-4
- [3] Гроздев, С., В. Ненков, Алгебрични уравнения без производни, *Математика плюс*, 2017, 3-4, 55-57, ISSN: 0861-8321
- [4] Гроздев, С., В. Ненков, Св. Дойчев, За високи постижения в математиката (в помощ на учителя), София: Фондация „Миню Балкански“ & „Фондация Америка за България“, 2012, ISBN: 978-954-92830-3-7
- [5] Коларов, К. и др., *Сборник задачи по алгебра 7 – 12 клас*, Интеграл, Добрич, 2003
- [6] Ненков, В., Едно функционално уравнение, *Математически форум*, 2002, 1, 2–3, ISSN: 1311-297X
- [7] Ненков, В., Едно функционално неравенство, *Математически форум*, 2, 2002, 34-35, ISSN: 1311-297X
- [8] Ненков, В., *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*, София: Архимед 2000, 2020 г., ISBN: 978-954-779-291-3
- [9] Паскалев, Г., *Конкурсни задачи по математика за постъпване във ВУЗ (1945 – 1986)*, Наука и изкуство, София, 1987

SOME PROBLEMS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Diana Stefanova^{1,*}, Tatyana Madzharova²

¹ Nikola Vaptsarov Primary school, Asenovgrad, dianastefanova13@gmail.com

² Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy, Varna, 73 Vasil Drumev Str., tmadjarova@gmail.com

Abstract. The article is devoted to solving problems of functional equations. The methods of substitutions and undetermined coefficients are used. Approaches for their solution are proposed.