Съставяне на задачи с подобни триъгълници, свързани с височините на триъгълника

Бистра Царева, Боян Златанов, Катя Пройчева

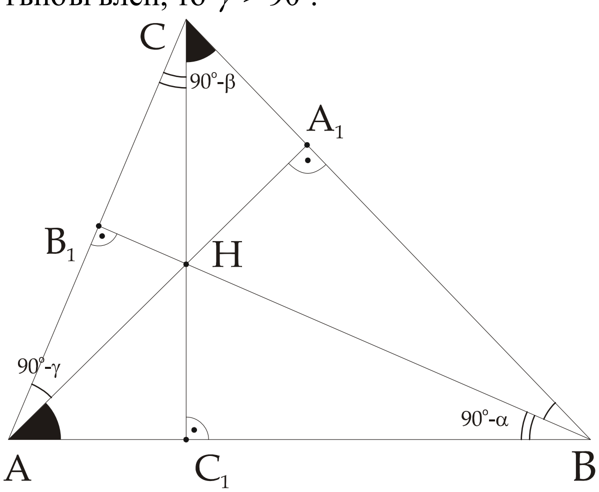
Настоящата работа е адресирана към учителите по математика и техните изявени ученици, за да им покажем общият корен на големи серии от задачи, касаещи подобните триъгълници, свързани с височините на произволен неправоъгълен триъгълник, за да ги научим не само с лекота да решават тези задачи, но най-вече за да ги научим сами да съставят задачи в тази област.

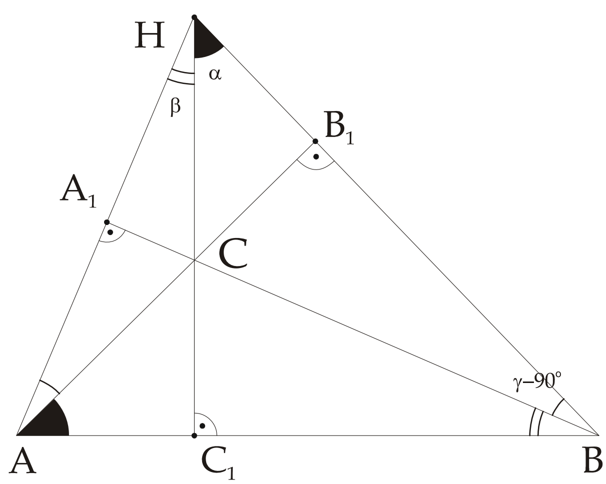
Означения. Нека ABC е произволен неправоъгълен триъгълник. Ще въведем следните стандартни означения: $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$; $BC = a, CA = b, AB = c, a+b+c = 2p$; R и r са радиуси на окръжностите, съответно описана и вписана за ΔABC. Точките A_1, B_1, C_1 са петите на височините съответно през върховете A, B, C. Точка H е ортоцентър на ΔABC, а точка O е център на окръжността, описана около ΔABC.

Нека още означим средите на страните BC, CA, AB съответно с M_1, M_2, M_3, а средите на отсечките AH, BH, CH съответно с S_1, S_2, S_3. Сигурно веднага забелязахте, че това са точките, лежащи върху окръжността на Ойлер или окръжността на деветте точки: петите на височините, средите на страните и средите на отсечките, свързващи върховете на триъгълника с ортоцентъра му.

Тези означения ще използваме в цялата работа, поради което няма да ги споменаваме отново в условията.

Без да намаляваме общността на разглежданията приемаме, че когато ΔABC е тъпоъгълен, то $\gamma > 90^0$.





Основна задача 1. С всеки триъгълник са свързани следните двойки подобни триъгълници:

$A.1)\ \Delta BCC_1 \sim \Delta HAC_1$ и $A.2)\ \Delta BCB_1 \sim \Delta AHB_1$ с коефициент на подобие $tg\ \alpha$;

$B.1)\ \Delta ACC_1 \sim \Delta HBC_1$ и $B.2)\ \Delta ACA_1 \sim \Delta BHA_1$ с коефициент на подобие $tg\ \beta$;

$C.1)\ \Delta ABB_1 \sim \Delta HCB_1$ и $C.2)\ \Delta ABA_1 \sim \Delta CHA_1$ с коефициент на подобие $|\,tg\ \gamma\,|$, Непосредствено от основна задача 1 следват равенствата:

$$\frac{CC_1}{AC_1}=\frac{BC_1}{HC_1}=\frac{BC}{HA}=\frac{CB_1}{HB_1}=\frac{BB_1}{AB_1}=tg\alpha\ , \qquad (1)$$

$$\frac{CC_1}{BC_1}=\frac{AC_1}{HC_1}=\frac{AC}{HB}=\frac{CA_1}{HA_1}=\frac{AA_1}{BA_1}=tg\beta\ , \qquad (2)$$

$$\frac{BB_1}{CB_1}=\frac{AB_1}{HB_1}=\frac{AB}{HC}=\frac{BA_1}{HA_1}=\frac{AA_1}{CA_1}=|\,tg\gamma\,|\ . \qquad (3)$$

От последните равенства и синусовата теорема следват равенствата:

$$AH=\frac{BC}{tg\alpha}=2Rcos\alpha,\ BH=\frac{AC}{tg\beta}=2Rcos\beta,\ CH=\frac{AB}{|\,tg\gamma\,|}=2R\,|\,cos\gamma\,|\ . \qquad (4)$$

Двойките подобни триъгълници, указани в основна задача 1 са еднакви, когато коефициентът на подобие е равен на 1, т.е. $tg\alpha=1$ или $tg\beta=1$, или $tg\gamma=1$.

В следващите изследвания ще разглеждаме двойката подобни триъгълници $C.2)$ $\Delta ABA_1 : \Delta CHA_1$ с коефициент на подобие $k=|\,tg\,\gamma\,|$.Останалите случаи се третират аналогично.

Основна задача 2.Ако s_{BC} и s_{AC} са симетралите съответно на страните BC и AC на ΔABC, то условията

2.1) $\gamma=45^0$;	2.5) $\angle A_1AC=45^0$;	2.9) $BB_1=CB_1$;
2.2) $AA_1=CA_1$;	2.6) $\angle B_1BC=45^0$;	2.10) $AB_1=HB_1$
2.3) $BA_1=HA_1$;	2.7) $B_1\in s_{BC}$;	
2.4) $AB=CH$;	2.8) $A_1\in s_{AC}$;	

са еквивалентни.

Доказателство: Когато към твърдението $C.2)$ на основна задача 1 $\Delta ABA_1 : \Delta CHA_1$ прибавим едно от условията $2.i),(i=1,2,...,10)$ получаваме $\Delta ABA_1\cong\Delta CHA_1$, от където следват и останалите девет твърдения $2.j)\ (j\neq i,\ j=1,2,...,10)$.

Основна задача 2 дава възможност да се съставят :

1.) $V_{10}^2=90$ на брой доказателствени задачи от вида :

Докажете, че ако за ΔABC е изпълнено условието $2.i),$ то в сила е и условието $2.j)$, където $j\neq i, i, j=1,2,...,10$.

2.) 45 на брой доказателствени задачи от вида:

Докажете еквивалентност на условията $2.i)$ и $2.j)$, където $j\neq i, i, j=1,2,...,10$ за ΔABC.

3.) Изчислителни задачи от вида:

За ΔABC е в сила едно от условията $2.j),(j=1,2,...,10)$ и $CH=a$ (респективно $AB=a$.) Да се намери дължината на AB (респективно CH).

Често срещана задача или фрагмент от задача в сборниците, състезанията и кандидат- студентските изпити е "Докажете, че от 2.1) следва 2.4) или обратно. Ще отбележим, че някои от условията са по-леки. Изборът на конкретна задача както и нейното самостоятелното използване или включване като елемент на по-трудна задача е избор на автора и зависи от предназначението на задачата : за контролна, класна, състезание, изпит за влизане в гимназия или университет и т.н.

Ще дадем примерни задачи за състезание в 7 клас, включващи свойствата на медианата към хипотенузата, на точките върху симетралата на отсечка, на характеристиките на успоредник и специалните успоредници.

Пример 1.Да се докаже, че условието четириъгълникът $A_1M_3B_1S_3$ е квадрат е еквивалентно с условието $\gamma = 45^0$.

Пример 2.Да се докаже, че условието $A_1B_1 = M_3S_3$ е еквивалентно с условието $\gamma = 45^0$.

Разбира се условието 2.1) : $\gamma = 45^0$, използвано в тези примерни задачи, може да бъде заменено с всяко еквивалентно нему от основна задача 2.

Условието $k = tg\alpha = 1$ не е задължително за учениците от по-горните класове. Ето защо полезна за съставяне на задачи за тези ученици е

Основна задача 3. За ΔABC условията

$$3.1)\ |tg\gamma| = k \quad ; \quad 3.4)\ cotg\angle A_1AC = k \quad ;$$

$$3.2)\ AA_1 = kCA_1 \quad ; \quad 3.5)\ cotg\angle B_1BC = k \quad ;$$

$$3.3)\ BA_1 = kHA_1 \quad ; \quad 3.6)\ AB = kCH$$

са еквивалентни.

Доказателството се базира на твърдение $C.2)$ от основна задача 1, т.е. в сила е $\Delta ABA_1 \sim \Delta CHA_1$ с коефициент на подобие $k = |tg\gamma|$ и равенствата (3).

Основна задача 3 дава възможност да се съставят :

1.) $V_6^2 = 30$ на брой доказателствени задачи от вида :

Докажете, че ако за ΔABC е изпълнено условието $3.i)$ то в сила е и условието $3.j)(j \neq i, i, j = 1,2,...,6)$.

2.) 15 на брой доказателствени задачи от вида:

Докажете еквивалентност на условията $3.i)$ и $3.j)(j \neq i, i, j = 1,2,...,6)$ за ΔABC .

3.) Изчислителни задачи от вида:

Дадено:	Да се намери:
1.) R, γ.	CH ;
2.) γ, CH.	AB, R ;
3.) CH, AB.	γ, R_H – радиусът на окръжността, описана около ΔAHB ;
4.) $cotg\angle HBC, CH$.	R ;
5.) R и условия, уточняващи ъглите на триъгълника. (например $\alpha : \beta : \gamma = 3:4:5$)	$AH + BH + CH$;

Трудността на задача 3.) е повишена като в нея е вградена неявно известната задача "Окръжностите, описани около триъгълниците ABC, ABH, BCH, CAH са еднакви".

Трудността на задача 3.) може да бъде облекчена и ако се уточни, че ΔABC е остроъгълен или тъпоъгълен, с което ще се премахне необходимостта да се изследват и двата случая за γ. Намирането на $R_H = R$ не зависи от избора на $\gamma < 90^0$ (или $\gamma > 90^0$).

Основна задача 4. За ΔABC са в сила:

4.1) $\Delta AB_1C_1 : \Delta ABC$ с коефициент на подобие $cos\alpha$;

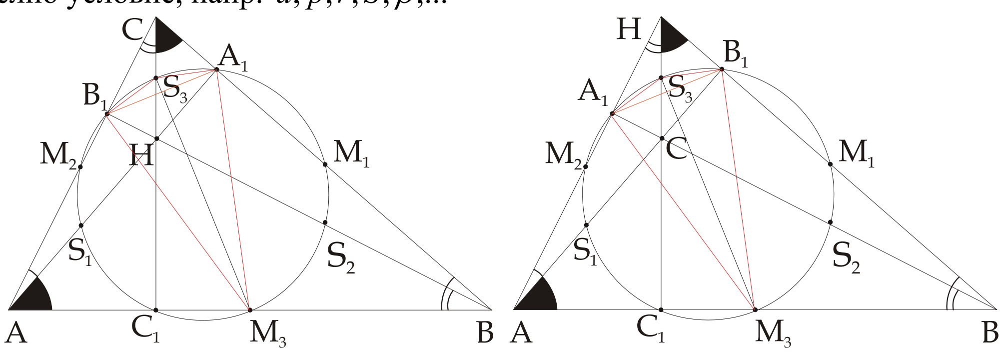
4.2) $\Delta A_1BC_1 : \Delta ABC$ с коефициент на подобие $cos\beta$;

4.3) $\Delta A_1B_1C : \Delta ABC$ с коефициент на подобие $|cos\gamma|$,

Непосредствено от основна задача 4 и равенствата (4) се получават равенствата

$$\frac{B_1C_1}{AH} = sin\alpha,\ \frac{A_1C_1}{BH} = sin\beta,\ \frac{A_1B_1}{CH} = sin\gamma\,. \qquad (5)$$

Често срещан фрагмент от задачите за кандидат студентските изпити е свързан с равенството $AB = 2Rsin\gamma$ $(BC = 2Rsin\alpha, AC = 2Rsin\beta)$, произтичащо от синусовата теорема. Задаването на две от величините в него позволява да се намери третата. Ще отбележим, че със задаването на c, γ, R триъгълникът ABC не се определя еднозначно. Знае се само, че върхът C принадлежи на геометричното място на точките, от които страната AB се вижда под ъгъл. Положението на точка C се доуточнява със задаването на допълнително условие, напр. $a, p, r, S, \beta, ...$



В леките задачи две от величините c, R, γ се задават директно. Задачите стават по-трудни, когато едната или едновременно и двете величини се зададат индиректно. Изборът на този подход определя степента на трудност на задачата. Ще посочим няколко триъгълници, свързани с височините на ΔABC, които са полезни за тази цел.

1. Основна задача 4 е един от най-често използваните източници за задаване на γ. Отношението на произволна двойка съответни елементи за подобните триъгълници A_1B_1C и ABC определя $cos\gamma$.

2. Триъгълник $A_1M_3B_1$ е равнобедрен $(M_3A_1 = M_3B_1 = \frac{AB}{2})$; с ъгъл между бедрата

$$\angle A_1M_3B_1 = \varphi = 180^0 - 2\gamma, \text{ когато } \gamma < 90^0 \text{ и } \varphi = 2\gamma - 180^0, \text{ когато } \gamma > 90^0; \qquad (6)$$

и с лице $S_{A_1M_3B_1} = \frac{1}{8}AB^2\,sin\varphi$ или

$$8S_{A_1M_3B_1} = c^2\,|sin2\gamma|. \qquad (7)$$

3. Триъгълник $A_1S_3B_1$ е равнобедрен $(S_3A_1 = S_3B_1 = \frac{CH}{2})$; с ъгъл между бедрата

$$\angle A_1S_3B_1 = \psi = 2\gamma, \text{ когато } \gamma < 90^0 \text{ и } \angle A_1S_3B_1 = \psi = 360^0 - 2\gamma, \text{ когато } \gamma > 90^0; \qquad (8)$$

и с лице $S_{A_1S_3B_1} = \dfrac{1}{8}CH^2\ sin\psi$ или

$$8S_{A_1S_3B_1} = CH^2\,|\,sin2\gamma\,|. \qquad (9)$$

4. Подобните триъгълници ABH *и* M_1M_2O *с коефициент на подобие* $k = 2$.

Очевидно $\varphi + \psi = 180^0$. Съгласно (6) и (8) можем да запишем:

$$\varphi = 60^0 \quad (\psi = 120^0) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 60^0 \quad \text{или} \quad \gamma = 120^0;$$
$$\varphi = 90^0 \quad (\psi = 90^0) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 45^0 \quad \text{или} \quad \gamma = 135^0;$$
$$\varphi = 30^0 \quad (\psi = 150^0) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 75^0 \quad \text{или} \quad \gamma = 105^0;$$
$$\varphi = 120^0 \quad (\psi = 60^0) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 30^0 \quad \text{или} \quad \gamma = 150^0.$$

От (3), (7) и (8) следва $\dfrac{S_{A_1M_3B_1}}{S_{A_1S_3B_1}} = \left(\dfrac{AB}{CH}\right)^2 = tg^2\gamma.$

Тези връзки ни ръководят при избора на конкретните данни, за да специализираме подходящо триъгълниците.

Като илюстрация на казаното, предлагаме няколко изчислителни задачи :

	Дадено :	Да се намери :
6.)	$\dfrac{S_{A_1B_1C}}{S_{ABC}} = \dfrac{2}{3}, A_1B_1 = \sqrt{3}.$	R;
7.)	$S_{A_1M_3B_1} = 25\sqrt{3}, \angle A_1M_3B_1 = 60^0.$	R;
8.)	$S_{A_1S_3B_1} = 20\sqrt{2}, \angle A_1S_3B_1 = 90^0.$	R;
9.)	$AB = c, \dfrac{A_1B_1}{CH}.$	R;
10.)	$3S_{A_1M_3B_1} = S_{A_1S_3B_1}, AB = c.$	R, CH;
11.)	$OM_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, OM_2 = \dfrac{1}{3}, sin\gamma = \dfrac{1}{3}.$	$cos\beta.$

и две доказателствени задачи :

Пример 3. Да се докаже, че ако $2A_1B_1 = \sqrt{2}CH$, то $A_1B_1 = S_3M_3$.

Математически състезания, Бургас - 02.1976. Нека H е ортоцентър на неправоъгълен триъгълник ABC. Ако описаната около ΔABC окръжност разполвява отсечката CH , да се докаже, че $tg\alpha + tg\beta + 4tg\gamma = 0$.

Трудността на задача 11 може да се намали, ако заменим "да се намери $cos\beta$ " с "да се намерят $c, R, cos\beta,$ " т.е. да се посочат стъпките, през които трябва да мине решението преди да се приложи второто равенство на (4).

Ако към всяка от задачите от 6.) до 10) добавим още едно условие, напр. $BC = a$, то ΔABC ще се определи еднозначно и тогава могат да се търсят и останалите величини, свързани с него.

Задачи, давани на кандидатстудентските изпити през изминалите години, касаещи разглежданата в тази работа тема.

1. Технически университет и Висш институт за архитектура и строителство - 1991. Радиусът на описаната окръжност около ΔABC има дължина R , ъглите на триъгълника

α, β, γ образуват аритметична прогресия, $\alpha = 45^0$. Точка H е ортоцентър, а точките L, M, N са симетрични на H съответно относно страните BC, CA, AB. Намерете периметъра на шестоъгълника $ANBLCM$.

2. Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" - 1993. В остроъгълен ΔABC дължината на страната BC е a, а $\angle BAC = \alpha$. С диаметър BC е построена окръжност, която пресича страната AC в точка B_1, а страната AB - в точка C_1.

а) Да се изрази чрез a и α дължината на отсечката B_1C_1;

б) Да се докаже, че частното от лицата на триъгълниците AC_1B_1 и ABC зависи само от α.

3. Софийски университет "Климент Охридски" - 1995. Даден е остроъгълен ΔABC, в който A_1 и B_1 са петите на височините, спуснати от върховете A и B съответно към страните BC и AC, а H е пресечната точка на AA_1 и BB_1. Разстоянията от центъра O на описаната около ΔABC окръжност до страните BC и AC са съответно равни на 1 и $3\sqrt{2}$ и лицето на