ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ
ПУ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 3-4.11.2000

ЛОГИЧЕСКИЯТ АПАРАТ – ЕФЕКТИВНО СРЕДСТВО В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И В ДИДАКТИКАТА НА МАТЕМАТИКАТА

Иван Ганчев Донев

В началото на доклада се изказва и илюстрира с конкретен пример верността на твърдението, "че ефективността на всяка дейност съществено зависи и от инструментариума, с който тя се извършва". Според докладчика това твърдение важи и за дейностите, които се извършват в обучението по математика и в изследванията по Дидактика на математиката. Затова докладът е посветен на изявяването и използването на логически елементи в някои раздели на учебни пособия по математика, на които докладчикът е автор или съавтор, а също и на разработени от него модели на дейности в обучението по математика, построени с помощта на елементарен апарат от предикатното и съждителното смятане.

1. Увод.

2. Работи, в съдържанието на които са изявени основни логически елементи, осигуряващи по-добра точност и разбираемост на знанията.

3. Модели на дейности в обучението по математика, построени с използване на елементарен апарат от предикатното смятане.

4. Моделиране на дейности в обучението по математика чрез използване на апарат от съждителното смятане.

1. Увод.

Наблюденията показват, че ефективността на всяка дейност съществено зависи и от инструментариума, с който тя се извършва. Убедителни примери в това отношение ни дава не само историята на математиката, но и на цялата наука. Към тези примери ще си позволя да добавя още един с решаването на задача от съчинението на арабския учен Абрахам Бен Езра (1090-1167г) в "Глава за плодовете".

Задачата е следната:

"*И ако казвам: един човек е влезнал в овощна градина и там е откъснал плодове. За градината се влизало през три последователни врати. Всяка от тях била пазена от един пазач. Този човек разделил плодовете с първия пазач и му дал още два, след това разделил останалите с втория и му дал също още два, накрая разделил с третия, дал му още 2 и изял само с 1 плод. Колко плода е откъснал?*"

Аналогични на тази задача има и в съвременния математически фолклор. Няколко от тях сме поместили и в нашите книжки "Математически фолклор" изд. 1983г и "Занимателни фолклорни задачи, фокуси и игри за деца от 7 до 15г" изд. 1993г.

Ето три решения на цитираната задача. Първото е дадено от Абрахам Бен Езра и се основава на така нареченото "лъжливо правило", водещо началото си от Древна Индия.

Решение 1. “Според главата за броенето предлага ти се да поставиш 100 в първото блюдото. Раздели ги с първия пазач, като му оставиш 2 плода повече. Остават ти 48. Раздели ги с втория и му остави 2 плода повече, остават ти 22; накрая раздели с третия и остави му 2 повече, остават ти 9, сравни с остатъка 1. Ти си сгрешил с 8 повече. Това се нарича ***първа грешка***. След това постави във второто блюдо 200. Раздели ги с първия пазач и му остави 2 повече, остават ти 98; радели с втория пазач и му остави 2 повече, остават ти 47. Накрая раздели с третия пазач и му остави 2 повече. Остават ти 21,5. Този път си сгрешил с 20,5 повече. Това е ***втората грешка.*** Умножи я по 100, което число е в първото блюдо. Получаваш 2050. След това умножи това, което е в първото блюдо с първата грешка, т.е. 200.8. Ще получиш 1600. След това извади по-малкото от по-голямото, т.е. 1600 от 2050; остават 450. Накрая извади едната грешка от другата; т.е. 8 от 20,5 остават 12,5.

Раздели тогава 450 с това число и получаваш 36. Това е броят на плодовете, които са били откъснати.

Както се вижда в това решение не само, че не са мотивирани отделните дейности, но те са много и като цяло то е сложно и трудно може да се разбере, обхване и възпроизведе.

Решение 2. Чрез ползване на уравнение. Означаваме с x броя на откъснатите плодове. Според задачата, след излизането през първата, втората и третата врата човекът изнася съответно:

а) $x-\frac{x}{2}-2=\frac{x}{2}-2;$ б) $x-\frac{x}{2}-2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x}{2}-2\right)-2=\frac{x}{4}-3;$

в) $x-\frac{x}{2}-2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x}{2}-2\right)-2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x}{2}-2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x}{2}-2\right)-2\right)-2=\frac{x}{8}-\frac{7}{2}.$

Тъй като след третата врата човекът изнася 1 плод, то получаваме уравнението $\frac{x}{8}-\frac{7}{2}=1,$ което решаваме и намираме $x-28=8$ $x=36.$

За човек с елементарна математическа грамотност това решение е по-лесно въпреки, че и то съдържа много “сметки”.

Решение 3. Чрез използване на граф. Отбелязваме с точка броя на откъснатите плодове. Като използваме операторния начин за представяне на операциите, получаваме първо стрелките и числата при тях отгоре, а след това - отдолу на следната схема:

$$\begin{tikzcd} 36\bullet \arrow[r, bend left, ":2"] & \bullet \arrow[l, bend left, ".2"] \arrow[r, bend left, "-2"] & \bullet \arrow[l, bend left, "+2"] \arrow[r, bend left, ":2"] & \bullet \arrow[l, bend left, ".2"] \arrow[r, bend left, "-2"] & \bullet \arrow[l, bend left, "+2"] \arrow[r, bend left, ":2"] & \bullet \arrow[l, bend left, ".2"] \arrow[r, bend left, "-2"] & \bullet 1 \arrow[l, bend left, "+2"] \end{tikzcd}$$

Едва ли някой ще оспори, че най-просто, ясно и убедително за обикновения човек изглежда третото решение.

Като имам предвид от една страна този прост пример (а като него мога да посоча десетки) и от друга - изказаната от Лайбниц мисъл “*дайте вместо да губим ценно време да спорим, да вземем хартия и молив и да смятаме*”, позволявам си да изкажа следната хипотеза: Може би не е далеч времето, когато ще можем да казваме *дайте вместо да губим ценно време не само да спорим, но и да смятаме, а да вземем хартия и молив и да чертаем*. Вероятно тази хипотеза сега ще се прецени като твърде смела и изисква “освобождаване от веригите на традицията”. Затова ще спра до тук и ще се “приземя” като се установя само на онова, за което с основание се прекланяме пред гения на Лайбниц, Джорж Бул, де Морган и много други.

Зависимостта на сложността и ефективността на дейностите от инструментариума, с който те се извършват, е причина и в дидактиката на математиката да се търсят възможности за използване на нови средства. Такова средство се оказват и някои елементи от съвременния логически апарат. Според информацията, с която разполагаме, един от първите опити в това отношение е направен от И. С. Градщейн в книгата “Прямая и обратная теорема”, първото издание на която е от 30-те години на XX век. По-интересни и значими за Дидактиката на математиката научни работи, в които се използват елементи от съждителното и от предикатното смятане, се появиха в бившия Съветски съюз, в Полша, Франция, САЩ, Гърция и др. обаче след 1960г.

В научни работи, в популярни статии или книги, а също и в учебници по математика в продължение на близо 40 години аз също използвам елементарен апарат от съждителното смятане или предикатното смятане в два аспекта: единият се свежда до изявяване на основни логически елементи в съдържанието на училищния курс по математика с цел да се направи изложението по-точно и по-разбираемо, а другият - до моделиране на дейности в обучението с цел да се повиши научното равнище и ефективността на методиката на обучението по математика **(МОМ)**. В настоящия доклад ще съобщя основни мои самостоятелни или в съавторство работи, в които в различна степен е изявяван и използван логически апарат в изложение на математическо съдържание, предназначено за ученици, а във връзка с втория аспект ще предложа на вашето внимание два модела, разработени в [2] и [3]. Чрез тях ще аргументирам тезата, че елементи от съвременния логически апарат могат да бъдат използвани от една страна за осигуряване по-добра разбираемост на изложението в учебниците, а от друга - че могат да изпълняват незаменими полезни описателни и прогностично-конструктивни функции в МОМ и като наука, и като учебна дисциплина.

2. Работи, в съдържанието на които са изявени основни логически елементи, осигуряващи по-добра точност и разбираемост на знанията.

Първата моя книга, написана в съавторство с проф. З. Запрянов, в която уравненията се разглеждат като вид съдържателни функции е [9]. В нея се показва, че системите уравнения са конюнкции на уравнения, и че при решаване на уравнения чрез разлагане на множители, а също и уравнения, съдържащи модул, в училище се използва дизюнкция от уравнения, но това се прави неявно и недостатъчно осъзнато, тъй като понятието дизюнкция не се изучава в училище. За разлика от тогавашните български учебници, в [9] явно се използва понятието дизюнкция. В учебниците [5], [7] и [8], на които съм съавтор, не са използвани термините конюнкция и дизюнкция, но почти навсякъде, където знанията имат конюнктивна или дизюнктивна структура, тя се изявява като се използват съюзите “и” и “или” в точния им логически смисъл и се записват с особен шрифт. Ще цитирам само два пасажа от учебника [10], за 11 клас, издаден през 2000г., на които също съм съавтор. В него отново е направена стъпка към по-явното и осъзнато изявяване и използване на конюнктивната и дизюнктивна структура на някои знания. На стр. 5 пише:

“…Решаването на уравнения и на неравенства чрез ***разлагане на множители,*** всъщност се основава на теоремите, записани в таблица 2 ”.

Явно са въведени и се използват понятията конюнкция и дизюнкция и в учебника [6].

Таблица 2.

За уравнения[*]	***За неравенства***
4) $f_1(x)f_2(x)=0 \Leftrightarrow f_1(x)=0$ или $f_2(x)=0.$	4') $f_1(x)f_2(x)>0 \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{l} f_1(x)>0 \\ \text{и} \\ f_2(x)>0 \end{array}\right.$ или $\left\vert\begin{array}{l} f_1(x)<0 \\ \text{и} \\ f_2(x)<0. \end{array}\right.$ 4'') $f_1(x)f_2(x)<0 \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{l} f_1(x)>0 \\ \text{и} \\ f_2(x)<0 \end{array}\right.$ или $\left\vert\begin{array}{l} f_1(x)<0 \\ \text{и} \\ f_2(x)>0. \end{array}\right.$

А на стр.11 и стр.12 в началото на темата "Системи уравнения" пише:

"В таблицата 2 от §1, при записването на теоремите, които се използват за решаване на уравнения и неравенства чрез ***разлагане на множители***, свързваме някои от уравненията (неравенства) чрез използване на съюзите "и" и "или". Както ви е известно от логиката в 9. клас , когато две съждения или два предиката се свържат със съюза "и" се получава съответно съждение или предикат, който се нарича ***конюнкция***, а когато се свържат със съюза "или" - се нарича ***дизюнкция***.

При работа с уравнения с две, три и т.н. неизвестни още по-често се налага по две или повече уравнения да се свързват с някой от съюзите "и" и "или". А именно в едни случаи се налага да се търсят всички двойки, тройки и пр. числа, които едновременно удовлетворяват съответно две, три и пр. уравнения или неравенства. В такива случаи се казва, че съответните уравнения или неравенства образуват ***системи***. От казаното следва, че всъщност системите уравнения са ***конюнкции от уравнения***. В други случаи се търсят всички числа или двойки, тройки и пр. от числа, които удовлетворяват поне едно от дадени уравнения или неравенства. В тези случаи те образуват ***дизюнкции***. За съжаление обаче у нас до сега в училищната алгебра не се е утвърдил термин, с които да се назовават дизюнкциите от уравнения или неравенства. А такива се използват не по-малко отколкото се използват системите уравнения или неравенства. Затова за тях ще използваме познатия ви от логиката в 9. клас термин дизюнкция, т.е. ще говорим за ***дизюнкция от уравнения***, ***дизюнкция от неравенства***, ***дизюнкция от уравнения и неравенства***, ***дизюнкция от системи уравнения***. За да спазим досегашната традиция, няма да пишем знака "$\vee$ " между уравненията и неравенствата, които образуват дизюнкция, а ще ги записваме едно под друго и пред тях ще поставяме голяма скоба "{".

Например вместо $2x-1=0 \vee 2x+1=0,$ ще пишем $\left\{\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ 2x+1=0. \end{array}\right.$

Така ще постъпваме и при записване на дизюнкции от системи уравнения или неравенства.

Вместо $\left\vert\begin{array}{l} x-2>0 \\ x-3>0 \end{array}\right. \vee \left\vert\begin{array}{l} x-2<0 \\ x-3<0 \end{array}\right.$ ще пишем $\left\{\begin{array}{l} \left\vert\begin{array}{l} x-2>0 \\ x-3>0 \end{array}\right. \\ \left\vert\begin{array}{l} x-2<0 \\ x-3<0. \end{array}\right. \end{array}\right.$

[*]"Изрично да напомним, че когато се търсят всички стойности на ***x***, които са корени на поне едно от две уравнения (неравенства), те се свързват със съюза **или**. Когато обаче се търсят всички стойности на ***x***, които са корени едновременно на две уравнения (неравенства), те се свързват със съюза **и**".

Дизюнкции се използват освен в самите теореми от таблица 2, а и при решаването например на уравнения от вида $|ax+b|=c$ и неравенства от вида $|ax+b|>c$. Наистина решаването на последните при $c>0$ се основава съответно на еквивалентностите: $|ax+b|=c \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax+b=c \\ ax+b=-c, \end{array}\right.$ $|ax+b|>c \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax+b<-c \\ ax+b>c. \end{array}\right.$

Дизюнкции са и познатите ви нестроги неравенства.

Например $ax+b\geq 0, ax+b\leq 0, ax^2+bx+c\geq 0$ и $ax^2+bx+c\leq 0$."

Както се вижда в случая се реализира и твърде широко рекламираното през последните десетилетия изискване за междупредметни връзки. Тук осъзнатото използване на логически знания позволява по-ясно да се представят връзките между уравненията и неравенствата, които определят поведението на човека при решаването на уравнения и неравенства. Например като види неравенства, свързани със съюза "и", той решава двете неравенства и търси сечението на получените множества от числа, а като види неравенства, свързани със съюз "или" след решаването им търси обединението на получените множества от числа.

3. Модели на дейности в обучението по математика, построени с използване на елементарен апарат от предикатното смятане.

Нека V е обем на понятието-обект S, а $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ $(k\geq 1)$ са свойства, съдържащи се в определящата част на определението, т.е. са съдържанието на понятието. Тогава съждителните форми $p_1(x), p_2(x), p_3(x), \ldots, p_k(x)$, определени в обема M на родовото му понятие, имат различни множества на вярност, съответно $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k$. Тъй като в определението се назовават с общо име "S" множеството V от всички елементи на M, притежаващи $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, то V е множество на вярност на конюнкцията $p_1(x)\wedge p_2(x)\wedge p_3(x)\wedge\ldots\wedge p_k(x)$, определена в M, т.е.

$V=V_1\cap V_2\cap V_3\cap\ldots\cap V_k$.

Затова, ако с $p(x)$ означим съждителната форма "x е S", определена в M, то според договореността (конвенцията) в определението, следва че множеството на вярност на $p(x)$ е V. Това означава, че на определението на понятието "S", чието родово понятие има обем M, съответства еквивалентността (1).

(1) $p_1(x)\wedge p_2(x)\wedge p_3(x)\wedge\ldots\wedge p_k(x)\Leftrightarrow p(x)$, определена в M.

Тук конюнкцията $p_1(x)\wedge p_2(x)\wedge p_3(x)\wedge\ldots\wedge p_k(x)$, моделира определящата част на определението, $p(x)$ моделира определяемата му част, а знакът "$\Leftrightarrow$" моделира договореността, че всички елементи от обема V на понятието се назовават с името "S". Това означава, че еквивалентността (1) можем да разглеждаме като модел на определението на понятието с термин "S".

Нека с $p_{r_1}, p_{r_2}, p_{r_3}, \ldots, p_{r_n}$ означим свойствата, съдържащи се в една теорема, осигуряваща достатъчни условия за понятието "S". На тази теорема можем да съпоставим импликацията (2),

$p_{r_1}(x) \wedge p_{r_2}(x) \wedge p_{r_3}(x) \wedge \ldots \wedge p_{r_n}(x) \to p(x)$, дефинирана в M, където поне едно $p_{r_i}(x)$ $(i \leq n)$ не съвпада с нито едно p_i от (1).

Ако за едно понятие се разглеждат l такива теореми, то на определението и на тези теореми може да съпоставим импликацията

(3) $\left(p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge p_3(x) \wedge \ldots \wedge p_k(x)\right) \vee \left(p_{1_1}(x) \wedge p_{1_2}(x) \wedge \ldots \wedge p_{1_n}(x)\right) \vee \ldots \vee \left(p_{\ell_1}(x) \wedge p_{\ell_2}(x) \wedge \ldots \wedge p_{\ell_t}(x)\right) \to p(x)$, дефинирана в M. Ясно е, че на доказателството, че произволен, но фиксиран обект x_0 принадлежи на обема V на понятието S съответства установяването на факта, че поне една от конюнкциите в (3) за $x = x_0$ е вярно съждение.

Ако S е понятието "прав ъгъл", то тогава (3) можем да разгледаме като модел на изречението:

Един ъгъл е прав, ако:

1) е равен на своя съседен, или
2) е ъгъл на правоъгълник, или
3) е ъгъл между диагоналите на ромб, или
4) е ъгъл между хорда, неминаваща през центъра на окръжност и диаметърът на същата окръжност, минаваща през средата ѝ или….

Изречения като това, в което се съдържа цялата информация,известна на ученика до даден момент, въз основа на която може да се установява принадлежност на обекти към обема на понятието S, наричаме дидактическа система от признаци.

По аналогия за понятие - двучленна релация се получава:

(4) $$\left(p_1(x,y) \wedge p_2(x,y) \wedge \ldots \wedge p_k(x,y)\right) \vee \left(p_{1_1}(x,y) \wedge p_{1_2}(x,y) \wedge \ldots \wedge p_{1_k}(x,y)\right) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee \left(p_{\ell_1}(x,y) \wedge p_{\ell_2}(x,y) \wedge \ldots \wedge p_{\ell_t}(x,y)\right) \to p(x,y).$$

По аналогия на показаното до тук за теоремите, осигуряващи достатъчни условия за понятието S, на теоремите, осигуряващи необходими условия, също съпоставяме импликация от вида (5) $p(x) \to Q(x)$, където $Q(x)$ е конюнкция от конюнкции, съответстващи на свойствата в определението и в теоремите, осигуряващи необходими условия за S. Оказва се, че цялата информация за понятието S до даден момент в обучението и дейностите, които се извършват с нея, може да се представят със схемите:

(6) $$\frac{P(x) \to p(x), P(x)}{p(x)} \text{ и } \frac{p(x) \to Q(x), p(x)}{Q(x)},$$

където $P(x)$ е дизюнкцията от конюнкциите в (3).

Изложено до тук позволява да заключим, че използваните импликации, еквивалентности и схеми са модели, които ни служат за обобщено представяне на синтезирана информация за понятията, а също и за представяне на общото в дейностите, които се извършват с тази информация. Тъй като тези модели дават възможност точно, кратко и по единен начин да се опише и представи различна конкретна информация, ние ги наричаме дескриптивни (описателни) модели. Те изпълняват предимно описателно-обяснителни функции и се оказват твърде полезни и удобни при запознаването на студенти и учители с общото в дейностите, на които те трябва да обучават своите ученици. Причина за това явление е, че те облекчават разкриването на това общо и запомнянето му така, както например буквената символика в миналото е облекчила разкриването на общото в решаването на различни квадратни уравнения и достигането до една формула за решаването им, която е достатъчно да се запомни и използва.

Понеже тук разглеждаме проблема на равнище на обучението на учители, няма да се спираме на дидактическия ефект от систематизирането на знанията за понятието на равнище на обучението на ученици, съответстващо на разгледаните модели. Ще отбележим само, че то значително тушира вредните последствия в евристично отношение от дедуктивното структуриране на математическите знания в систематичния курс по математика, без да нарушава и да пречи на това структуриране. Освен това съответното систематизиране достига до учениците конкретизирано за различните понятия и без да се използва символичен апарат от предикатното смятане.

Преди да се спрем на следващия модел, ще подчертаем изрично, че при прилагането на разгледаните до тук модели почти не се използват оперативни възможности на математическата логика за извършване на някакви технически процедури. Такива възможности дава следващият модел:

4. Моделиране на дейности в обучението по математика чрез използване на апарат от съждителното смятане.

Основната част от теоремите в училищния курс по математика се изказват в условна форма "Ако…то…" или в категорична форма, която може да се замени с условна форма. Това означава, че всяка такава теорема може да разглеждаме като импликация. Специално тук ще се спра на теоремите от вида

(7) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_k \rightarrow q$.

Оказва се, че

(8) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_i \wedge \ldots \wedge p_k \rightarrow q \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge \rceil q \wedge \ldots \wedge p_k \rightarrow \rceil p_i$.

По аналогия със свойството на уравненията, дало названието "алгебра", тази еквивалентност нарекох "логически алжебър", тъй като q и p_i си разменят местата и си "сменят знаците". Удаде ми се да предложа различни възможности за използване на (8) в **МОМ**.

4.1. Въз основа на (8) всеки учител или автор на учебник от почти всяка теорема може да съставя полезни и интересни за обучението задачи, чрез които непосредствено се затвърдяват нови теореми и се упражнява косвеният метод за доказване на твърдения. Например от теоремата: "Ако права, нележаща в дадена равнина, е успоредна на права от тази равнина, то тя е успоредна и на самата равнина" може само чрез "механични" дейности да се получат задачите:

а) "Ако права е успоредна на права от дадена равнина, но не е успоредна на тази равнина, то тя лежи в нея";

б) "Ако една от две успоредни прави не лежи в дадена равнина и не ѝе успоредна на нея, то другата права не лежи в тази равнина";

в) "Ако една от две прави пресича дадена равнина, а другата лежи в нея, то двете прави не са успоредни".

За получаването на тези задачи е удобно първо теоремата да се запише символно (т.е. с логически модел) така:

$a \not\subset \alpha \wedge a \parallel b \wedge b \subset \alpha \rightarrow a \parallel \alpha$.

След това, като се използва (8), се получават еквивалентните ѝ твърдения:

$$a \parallel b \wedge b \subset \alpha \wedge a \nparallel \alpha \to a \subset \alpha,$$

$$a \not\subset \alpha \wedge a \nparallel \alpha \wedge a \parallel b \to b \not\subset \alpha,$$

$$a \not\subset \alpha \wedge a \nparallel \alpha \wedge b \subset \alpha \to a \nparallel b.$$

Тези импликации са символични записи (логически модели) съответно на задачите а), б) и в) и за да се получат те, достатъчно е символичните записи да се изкажат словесно.

4.2. На основата на (8) е разработена диалогова обучаваща програма (ДОП), която работи на следния принцип:

Учителят само въвежда условието и заключението на теоремата, а компютърът съставя съответните задачи. Програмата позволява всеки учител да изтрива стари теореми и да добавя нови по свое желание. Затова тя може да се използва в различни теми и класове. Последният ѝ усъвършенстван вариант разработихме по линия на НИС съвместно с колектив от Пловдивския университет, ръководен от доц. Г. Станчев.

Тази програма, в превод на френски език, демонстрирах на петия международен конгрес по проблемите на обучението по математика, проведен в Будапеща през 1988г. Мястото, където демонстрирах програмата, беше редом с мястото, където демонстрираха японски програми за обучение, като се използваха модерни цветни японски компютри с големи атрактивни възможности, а аз използвах най-простия български 8-битов компютър. Въпреки това италианци, французи, испанци се трупаха при мен и заявяваха, че програмата, която демонстрирам е много по-интересна и полезна за обучение от японските програми, защото се отнася до нещо, което е много важно за обучението по математика - "доказателство с допускане на противното".

Когато условието на теоремата съдържа повече съждения, интересни задачи се получават, ако се разменят местата на заключението и на конюнкция от две или повече съждения от условието. Решенията на тези задачи са по-трудни, защото като се приложи закона на Морган, в заключенията им се получава дизюнкция от две твърдения. Затова е целесъобразно такива задачи да бъдат решавани в извънкласни форми на обучение. За пример ще посоча получаването на задачата:

Да се докаже, че ако правата a пресича правата b и лежи в равнината α, а правата p е перпендикулярна на a, но не е перпендикулярна на α, то правата b не лежи в α или не е перпендикулярна на p.

Тя се получава от теоремата за перпендикулярност на права и равнина, като се използва, че

$$a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha \wedge a \cap b = \{M\} \wedge p \perp a \wedge p \perp b \to p \perp \alpha,$$

$$\Updownarrow$$

$$a \subset \alpha \wedge a \cap b = \{M\} \wedge p \perp a \wedge p \not\perp \alpha \to b \not\subset \alpha \vee b \not\perp p.$$

4.3. Еквивалентността (8) дава възможност да се построяват дидактически целесъобразни системи от еквивалентни помежду си задачи по следния начин:

Избира се задача-теорема в условна форма, чието условие е конюнкция от поне две твърдения, съставят се еквивалентни на нея задачи чрез логическия алжебър, установява се коя от всички задачи от класа еквивалентни помежду си задачи се решава най-лесно, без да се използва никоя от останалите задачи и тя се поставя като първа задача в системата. След нея се поставят задачите, чиито заключения са дизюнкции от две съждения и т.н. Част от такива система задачи е следната:

1. В ΔABC е построена медианата AD.

Да се докаже, че ако $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC = 90^\circ$, *но* $\sphericalangle BAC \neq 90^\circ$, *то* $AB = AC$.

2. В ΔABC е построена медианата AD.

Да се докаже, че ако $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC = 90^\circ$ *и* $AB \neq AC$, *то* $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

3. В неравнобедрения и неправоъгълен триъгълник ABC точката D е вътрешна за страната BC.

Да се докаже, че ако $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC = 90^\circ$, *то* AD *не е медиана на* ΔABC.

4. В ΔABC е построена медианата AD.

Да се докаже, че ако $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC = 90^\circ$, *то* $AB = AC$ *или* $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

5. В неравнобедрения ΔABC е построена медианата AD.

Да се докаже, че $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ *или* $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC \neq 90^\circ$.

6. В неправоъгълния ΔABC е построена медианата AD.

Да се докаже, че $AB = AC$ *или* $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC \neq 90^\circ$.

Тази система от задачи е получена от зад.4, публикувана в [15] като самостоятелна задача. Решаването на всички задачи след първата лесно се свежда до непосредственото ѝ използване. Този факт разкрива нови възможности за усъвършенстване излагането на съдържанието на училищния курс по математика, тъй като позволява някои от задължителните за изучаване теореми в него да се заменят с еквивалентни на тях теореми от класа задачи, който те определят, но се доказват по-лесно.

От изложено в т.3 се вижда, че импликацията (7), заедно с логическия алжебър (8) и закона на Морган са не само дескриптивен (описателен) модел на дейности в обучението по математика. Тук с модела се извършват технически процедури, които подсказват какви дейности може да се извършат в оригинала, за да се получат определени резултати. Затова този модел и модели като него наричаме оперативни. Вижда се също така, че и този вид логически модели крият в себе си неизползвани досега резерви за разработване на проблеми от МОМ и за повишаване на ефективността на учебния процес, т.е. могат да изпълняват прогностично-конструктивни функции.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Болтянский, В. Г.** – Как устроена теорема? Сп. “Математика в школе”, кн. 1,1973.
2. **Ганчев, Ив.** – За математическите задачи. С.1971.
3. **Ганчев, Ив.** – Логический аналог одного свойства уравнений и его исползование в обучении математике. Сп. “Математика в школе”, кн. 2,1993.
4. **Ганчев, Ив.** – Основни учебни дейности в урока по математика. С.1999г.
5. **Шопова, Д.** и др. – Алгебра за 6. клас. С.1978.
6. **Геров, Г.** и др. – Алгебра за 7. клас. С.1979.
7. **Запрянов, З.** и др. – Математика за 7. клас. С.1987.
8. **Ганчев, Ив.** и др. – Учебно пособие по алгебра за 7. клас. С.1996.
9. **Ганчев, Ив.** и др. – Уравнения. С.1969.
10. **Шопова, Д.** и др. – Математика за 11. клас. С.2000.

11. **Ланда, Л. Н.** – Алгоритмизация обучении. М. 1966.
12. **Марков, Св. –** Математическо моделиране. С.1977.
13. **Столяр, А. А.**– Логические проблемы преподавания математически. Минск, 1968.
14. **Целакоски, Н**. – Дидактика на математиката. Скопие. 1993.
15. **Шаригин, И.** – Търсете вариантите. Сп.“Обучение по математика и информатика”. кн. 1 и 2, 1988.

София–1000
ул. “Хан Крум”-32
Иван Ганчев

LOGIC MATERIALS – EFFECTIVE MEAN IN THE EDUCATION OF MATHEMATICS AND IN THE DIDACTICS OF MATHEMATICS

Ivan Gantchev Donev

At the beginning of the report the truthfulness of the statement “that the effectiveness of every activity also considerably depends on the instruments it has been done with” is expressed and illustrated with a concrete example. According to the reporter this statement is also valid for the activities which are to be done in the education of mathematics and in the researches field of the didactics of mathematics. That is why the report is devoted to the contribution and using of the logic elements in some parts of school appliances in mathematics, whose author or coauthor the reporter is. It is also devoted to some models of activities in the education of mathematics developed by him, built with the help of simple materials from predicate and reasoning calculus. There are also briefly described opportunities for using models in solving important didactics problems.