ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ
ПУ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 3-4.11.2000

КРЪСТОСАНИ ГРУПОВИ ПРЪСТЕНИ И АЛГЕБРИ НА АБЕЛЕВИ ГРУПИ

Нако Ангелов Начев

Absract. An introduction in the theory of the twisted group rings and algebras of abelian groups is made in this report. A construction of these algebraic systems and an information for the basic results in this area obtained from the authors and his coautors are given too.

2000 AMS Subject classification: 16S35, 20C07, 16U60.

Трудно е да се преоцени значението на конструкции, позволяващи от дадени алгебрични структури да се образуват нови, много по-сложни пръстени и алгебри. Към този вид конструкции принадлежи общоизвестното построение на пръстена на матриците над даден пръстен. Като обобщение на матричните пръстени се появяват пръстените на инцидентност, въведени от G. C. Rota в 1964 год. във връзка с някои задачи от комбинаториката. Интерес представляват и груповите пръстени, които се образуват по естествен начин с помощта на даден пръстен и дадена група, а също и по-сложната конструкция на кръстосани произведения на групи и пръстени. Ние ще спрем вниманието си на кръстосани групови пръстени и алгебри, които са частен случай на кръстосаните произведения, но в същото време са обобщение на груповите пръстени и алгебри. За да се образува кръстосан групов пръстен, необходимо е да са дадени пръстен R и група G и изображение $G\times G\to R^*$ (R^* е мултипликативната група на пръстена R). Образът на една наредена двойка елементи a,b от групата G в R^* чрез това изображение ще означаваме с (a,b). Множеството от всички такива елементи на R^* се нарича система фактори. На системата фактори се налага следното условие

(1) $$(a,b)(ab,c)=(b,c)(a,bc),$$

за произволни $a,b,c\in G$. Нека $\overline{G}$ е множество, елементите на което се намират във взаимно-еднозначно съответствие с елементите на групата G. Да означим с R_tG свободен модул над пръстена R с базис $\overline{G}$. Върху базисните елементи на този модул определяме бинарна операция умножение с помощта на формулата

(2) $$\overline{a}\ \overline{b}=(a,b)\overline{ab}$$

за произволни $a,b\in G$. Умножението на два произволни елемента от R_tG се определя от формула (2) въз основа на двата дистрибутивни закона. Благодарение на условието (1) умножението на базисните елементи е асоциативно, а оттук по линейност асоциативността се пренася и върху всички елементи на R_tG. По такъв начин R_tG се превръща в асоциативен пръстен, който ще наричаме кръстосан групов пръстен на пръстена R и групата G по дадена система фактори. Ако $(a,b)=1$ за произволни

$a, b \in G$, то системата фактори се нарича единична. В този случай може да се отъждестви $\overline{G}$ с G и кръстосаният групов пръстен R_tG автоматически се превръща в груповия пръстен RG. Оттук следва, че кръстосаните групови пръстени са обобщение на груповите пръстени.

От формула (1) при $b = 1$ следва $(a,1) = (1,c) = (1,1)$ за произволни $a, c \in G$. Оттук лесно се вижда, че елементът $(1,1)^{-1}.\bar{1}$ е единичен елемент на R_tG. Ако $(1,1) = 1$, то единичният елемент на R_tG ще бъде $\bar{1}$. В този случай ще казваме, че системата фактори е нормализирана. Ако системата фактори не е нормализирана, то винаги може да се постигне нормализация като базисният елемент $\bar{1}$ на R_tG се смени с $(1,1)^{-1}.\bar{1}$. Останалите базисни елементи могат да се запазят или някои от тях (а може и всичките) да се умножат с произволни обратими елементи на R. Поради тази причина можем да се ограничим да разглеждаме кръстосани групови пръстени с нормализирани системи фактори.

Ако пръстенът R е поле, то кръстосаният групов пръстен R_tG ще бъде алгебра над R. В този случай R_tG се нарича кръстосана групова алгебра над полето R. Дадените дефиниции за кръстосан групов пръстен и кръстосана групова алгебра са определени чрез външна конструкция. Могат да се дадат и вътрешни дефиниции. За кръстосана групова алгебра това става по следния начин – нека A е алгебра над полето R, която притежава следните свойства:

1) алгебрата A притежава R-базис B, така че R^*B е подгрупа на мултипликативната група A^* на A;
2) съществува сюрективен хомоморфизъм $\varphi : R^*B \to G$ с ядро R^*.

Тогава A е изоморфна на кръстосаната групова алгебра R_tG като алгебри над R. Освен това, ако базисът B е подгрупа на A^*, то произведението R^*B се разцепва в директно произведение $R^* \times B$ и алгебрата A става изоморфна на груповата алгебра RG. Вътрешното определение за кръстосан групов пръстен се дава по следния начин – нека A е пръстен, R е негов подпръстен, G е група и B е подмножество на мултипликативната група A^* на пръстена A, при което са изпълнени следните условия:

$1')$ A е свободен R-модул (ще отбележим, че A изобщо е R-модул);

$2')$ B е базис на свободния R-модул A;

$3')$ елементите на R комутират с елементите на B;

$4')$ R^*B е подгрупа на A^*;

$5')$ съществува сюрективен хомоморфизъм $\varphi : R^*B \to G$ с ядро R^*.

Тогава пръстенът A ще бъде изоморфен на външно определения кръстосан групов пръстен R_tG. Ако B съдържа единицата на A, то системата фактори, чрез която се определя кръстосания групов пръстен R_tG ще бъде нормализирана. Ако B е подгрупа на A^*, то пръстенът A ще бъде изоморфен на груповия пръстен RG.

С оглед на по-нататъшното изложение ще изясним условията, при които кръстосаният групов пръстен R_tG е комутативен. От определението веднага се вижда, че за тази цел е необходимо и достатъчно да бъдат изпълнени следните условия:

а) пръстенът R да е комутативен;

б) групата G да е абелева;

в) системата фактори да е симетрична, т.е. $(a,b)=(b,a)$ за произволни $a,b\in G$.

Един специален случай заслужава внимание, а именно, когато G е циклична група със симетрична система фактори и пръстенът R е комутативен. Ако G е безкрайна циклична група и g е неин образуващ елемент, то степените на елемента $\overline{g}$ ще образуват базис на R_tG и тогава кръстосаният групов пръстен R_tG ще бъде изоморфен на груповия пръстен RG. Малко по-другояче стои въпросът, когато G е крайна циклична група от ред n. Тогава за базис на R_tG може да се изберат степените $\overline{g}^i$ $(i=0,1,2,...,n-1)$, където g е образуващ елемент на G. Освен това следва, че $\overline{g}^n=a\in R^*$. Системата фактори спрямо този базис се определя чрез формулата

(3) $$\left(g^i,g^j\right)=\begin{cases}1, & i+j<n\\ a, & i+j\geq n.\end{cases}$$

Но в случая системата фактори вече не играе съществена роля, тъй като тя е следствие от уравнението $\overline{g}^n=a,\ \ a\in R^*$. Поради тази причина по-нататък ще казваме, че кръстосаният групов пръстен R_tG се определя от това уравнение. За простота можем да премахнем чертата и уравнението да добие вида $g^n=a,\ \ a\in R^*$, при което елементът g да се счита не за елемент на групата G, а като елемент на R_tG. Интересно е също да се отбележи, че когато G е циклична група, то следва симетричност на системата фактори. Доказателството на този факт става с математическа индукция.

Изследванията на автора по кръстосани групови алгебри са съвместно с Т. Ж. Моллов и датират от 1987 год. В едно от тях участвува и Й. Й. Епитропов. Ще разгледаме някои по-съществени резултати в това направление.

В работа [1], която е отпечатана в Доклади на БАН, са резюмирани основните резултати на [2], [3] и [4]. Пълните доказателства са дадени в [2], [3] и [4]. Резултатите се отнасят за полупрости кръстосани групови алгебри на циклични p-групи, където p е нечетно просто число. Ще отбележим, че една алгебра се нарича полупроста, когато нейният радикал на Джекобсън е равен на нула. Известно е, че всяка крайномерна комутативна полупроста алгебра се разлага в директна сума на минимални идеали, които са изоморфни на полета и тези полета са крайномерни разширения на основното поле. Това е частен случай от една класическа теорема на Ведербърн – Артин. Полетата, които участват в разлагането на разглежданата алгебра, се определят от минималните идемпотенти на тази алгебра. Един елемент e се нарича идемпотент, ако $e^2=e$. Идемпотентът e се нарича минимален, ако главният идеал на алгебрата, който се поражда от e, е изоморфен на поле. Оттук става ясно, че за характеризацията на една полупроста алгебра основна роля играят минималните идемпотенти. Намирането на минималните идемпотенти е един от проблемите в тази област. Друг проблем е проблемът за изоморфизъм на полупростите кръстосани групови алгебри. Основен проблем е също така описанието на строежа на тези алгебри. Всички тези проблеми са решени изчерпателно в работите [1], [2], [3] и [4] за случая, когато G е циклична p-

група, където p е нечетно просто число. Ще формулираме някои от тях.

[1] **Теорема 1** ([2] **Теорема 4**). Нека p е нечетно просто число и K е поле с $charK \neq p$. Нека кръстосаните групови алгебри $K_t\langle g\rangle$ и $K_t\langle g_1\rangle$ на цикличните групи $\langle g\rangle$ и $\langle g_1\rangle$ се определят съответно от уравненията $g^{p^n} = a$ и $g_1^{p^{n_1}} = a_1$, $a, a_1 \in K^*$, където p^n и p^{n_1} са съответно редовете на групите $\langle g\rangle$ и $\langle g_1\rangle$. Тогава алгебрите $K_t\langle g\rangle$ и $K_t\langle g_1\rangle$ са изоморфни като K-алгебри тогава и само тогава, когато $n = n_1$ и $\left\langle aK^{*p^n}\right\rangle = \left\langle a_1K^{*p^n}\right\rangle$.

Във формулировката на тази теорема $\left\langle aK^{*p^n}\right\rangle$ означава циклична подгрупа на фактор-групата K^*/K^{*p^n}, породена от съседния клас aK^{*p^n}. От формулираната теорема произтичат множество следствия, които са анонсирани в [1] и доказани в [2]. В тях се изследва как влияят условията за изоморфизъм на кръстосаните групови алгебри на циклични p-групи, когато за полето K вземем някои добре известни полета. Този въпрос е решен за крайни полета ([1] **Следствие 3** и [2] **Следствие 9**), за реално затворени полета и в частност за полето на реалните числа ([2] **Следствие 8**) и за полето на рационалните числа ([1] **Следствие 4** и [2] **Следствие 11**). За полето на комплексните числа въпросът се решава тривиално поради неговата алгебрическа затвореност и затова не е отбелязан.

Въпросът за минималните идемпотенти на $K_t\langle g\rangle$ е решен в [1] **Теорема 6** и в [3] **Теорема 3.1**. В [1] **Теорема 7** и в [4] **Теорема 1** се дава разлагането на $K_t\langle g\rangle$ в директна сума на полета с точност до изоморфизъм. Полетата, които участват в това разлагане в отделните събираеми, са неизоморфни помежду си и е показана кратността, с която участва всяко поле от разлагането на $K_t\langle g\rangle$. С това е решен въпросът за строежа на алгебрата $K_t\langle g\rangle$. В [4] **Теорема 3** е решен въпросът за строежа на мултипликативната група $U(K_t\langle g\rangle)$ с точност до изоморфизъм.

Друг съществен въпрос от теорията на кръстосаните групови алгебри е определянето на ранга без торзия на мултипликативната група на тези алгебри. По определение ранг без торзия на една абелева група означава мощността на коя да е максимална мултипликативно независима система елементи на тази група. От определението става ясно, че в една такава система могат да влизат само елементи от безкраен ред. Въпросът за ранга без торзия на мултипликативната група на кръстосани групови алгебри е решен от Т. Ж. Моллов и Н. А. Начев в работи [5] и [6]. Работа [5] е отпечатана в Доклади на БАН, а пълните доказателства на резултатите от нея са дадени в [6]. Ще формулираме основните резултати на [5] и [6].

[5] **Теорема 1** ([6] **Теорема 1**). Нека K_tG е комутативна кръстосана групова алгебра на абелевата група G над полето K и характеристиката на K не дели редовете на периодичните елементи на G. Тогава мултипликативната група $U(K_tG)$ на алгебрата K_tG е периодична тогава и само тогава, когато G е периодична група и K е алгебрично разширение на крайно поле.

С тази теорема се решава въпросът кога $U(K_tG)$ е периодична и в този случай нейният ранг без торзия ще бъде равен на нула. С другата теорема от тези работи се дава пълна картина на ранга без торзия на групата $U(K_tG)$.

[5] **Теорема 2** ([6] **Теорема 9**). Нека G е абелева група, G_0 е нейната периодична част, K е поле, характеристиката на което не дели редовете на елементите на G_0, алгебрата K_tG е комутативна и $r_0(U)$ е рангът без торзия на групата $U(K_tG)$. Ако K е алгебрично разширение на крайно поле и

a) ако $G = G_0$, то $r_0(U) = 0$;

b) ако $G_0 = 1$, то $r_0(U) = r_0(G)$;

c) ако $1 \neq G_0 \neq G$, $r_0(G) < |G|$, броят на минималните идемпотенти на индуцираната алгебра K_tG_0 е краен и равен на s и

c$_1$) $|G_0| = |G| = \aleph_0$ или

c$_2$) $|G_0| < |G|$,

то $r_0(U) = sr_0(G)$.

В останалите случаи $r_0(U) = \max(|K|,|G|)$.

Ще отбележим, че с $\aleph_0$ се означава най-малкото безкрайно кардинално число, т.е. мощността на всяко безкрайно изброимо множество. Доказателството на **Теорема 9** от [6] се осъществява с една съвкупност от леми, които също имат самостоятелен характер.

Вече отбелязахме резултатите за полупрости кръстосани групови алгебри на циклични p-групи, когато p е нечетно просто число. Случаят $p = 2$ е особен и се оказва доста труден. Резултати в това направление се появиха в 1998 и 2000 год. С **Теорема 3.1** от работа [7] се дава пълно описание на минималните идемпотенти на полупроста кръстосана групова алгебра на циклична 2-група над поле от втори род спрямо числото 2. Род на полето K спрямо простото число p се определя по следния начин: нека ε_n е примитивен корен на единицата от степен p^n, а $K(\varepsilon_2)$ е разширение на K, получено чрез присъединяване на ε_2. Тогава p-компонентата на мултипликативната група на $K(\varepsilon_2)$ е коциклична група и за нея има две възможности – тя или е циклична p-група, или е групата $Z(p^\infty)$. В първия случай полето K се нарича поле от първи род спрямо p, а в другия случай – от втори род. Другите проблеми за полупрости кръстосани групови алгебри на циклични 2-групи над поле от втори род спрямо числото 2 са разглеждани в работа [8]. С **Теорема 2.1** от [8] е решен проблемът за изоморфизъм на тези алгебри. Интересно е да се отбележи, че резултатът е същият, както и при $p \neq 2$, но доказателството е по-трудно и не следва от **Теорема 4** от [2]. С **Теорема 3.1** от [8] се дава пълно описание на строежа на полупростата кръстосана групова алгебра $K_t\langle g\rangle$, където $\langle g\rangle$ е циклична 2-група и K е поле от втори род спрямо числото 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.А.Начев, Т.Ж.Моллов, О полупростых скрещеных групповых алгебр циклических p-групп, Докл. БАН, том 40, №7, 1987, 13–15.

[2] Н.А.Начев, Т.Ж.Моллов, Изоморфизм полупростых скрещеных групповых алгебр циклических p-групп нечетного порядка, Сердика, том 14, 1988, 75–81.

[3] Н.А.Начев, Т.Ж.Моллов, Минимальные идемпотенты полупростых скрещеных групповых алгебр циклических p-групп нечетного порядка, Publ. Math., Debrecen, vol. 33, 1988, 309–319.

[4] Н.А.Начев, Т.Ж.Моллов, Полупростые скрещеные групповые алгебры циклических p-групп нечетного порядка, Publ. Math., Debrecen, vol. 37, 1990, 53–64.

[5] T.Zh.Mollov, N.A.Nachev, Torsion Free Rank of the Multiplicative Group of a Commutative Semisimple Twisted Group Ring of an Abelian Group Over a Field, C. R. Acad. Bulg. Sci., vol. 43, №3, 1990, 13.

[6] Т.Ж.Моллов, Н.А.Начев, Ранг без кручения мультипликативных групп коммутативных полупростых групповых алгебр над полем, Сердика, том 16, 1990, 160–165.

[7] J.J.Epitropov, T.Zh.Mollov, N.A.Nachev, On the Minimal Idempotents of Twisted Group Algebras of Cyclic 2-Groups, Math. Balk., vol. 12, 1988, 321–328.

[8] T.Zh.Mollov, N.A.Nachev, On the Semisimple Twisted Group Algebras of Primary Cyclic Groups, Houston J. Math., vol. 26, №1, 2000, 55–66.

Нако Ангелов Начев

Служебен адрес: гр. Пловдив,
бул. “България” №236
ПУ “П. Хилендарски”, катедра Алгебра
e-mail: nachev@pu.acad.bg

Домашен адрес: гр. Пловдив,
бул. “Цариградско шосе” №43, бл. 204, вх. Г, ет. 7, ап. 21
тел. 823-974

TWISTED GROUP RINGS AND ALGEBRAS OF ABELIAN GROUPS

Nako Angelov Nachev

An introduction in the theory of the twisted group rings and algebras of abelian groups is made in this report. A construction of these algebraic systems and an information for the basic results in this area obtained from the authors and their coautors are given too.