ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ
ПУ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 3-4.11.2000

КУБИЧНИ СЕЧЕНИЯ С ПОДВИЖНА РАВНИНА И ПРИЛОЖЕНИЯ В ИЗОБРАЗИТЕЛНОТО ИЗКУСТВО

Грозьо Станилов

Големият швейцарски художник и скулптор Макс Бил е представил четири двуметрови пластични скулптори в национален парк в Ерусалим. Те представляват сечения на куб с равнина. Видният немски математик Х. Цайтлер е установил, че става дума за сечения на куб с равнина, минаваща през средите на двойка срещуположни околни ръба на куба. При това, разглеждайки еднопараметричната съвкупност от такива сечения, той е установил, че пластичните скулптори на Макс Бил отговарят на особените точки на функцията лице на тези сечения.

От десетина години наши студенти изучават специални еднопараметрични съвкупности от кубични сечения. През последните години обект на наши разглеждания са всички кубични сечения, т.е. трипараметричните съвкупности от кубични сечения. По-точно:

Нека $A\,B\,C\,D\;A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ е куб с ръб a. Разглеждаме произволни точки M, N, K съответно от правите BA, BC, BB_1, минаващи през връх B. Те могат да бъдат определени с равенствата

$$\vec{BM} = m\,\vec{BA}, \quad \vec{BN} = n\,\vec{BC}, \quad \vec{BK} = k\,\vec{BB_1},$$

в които параметрите m, n, k са произволни реални числа. Секателната равнина $\varepsilon(MNK)$ пресича останалите девет прави по ръбовете на куба в определени точки, които могат да бъдат лесно намерени.

Всички кубични сечения се получават когато точките M, N, K са вътрешни или външни точки за съответните ръбове. По същество трябва да се разгледат 6 съществено различни случаи. В нашите изследвания ние фиксираме точки M и N, т.е. параметрите m и n, и оставяме точката K (т.е. параметъра k произволен). Така получаваме еднопараметрична съвкупност от кубични сечения, зависещи от параметъра $k\in(-\infty, +\infty)$ (при произволно фиксирани стойности на m и n в същия интервал). Когато параметърът k варира от $-\infty$ до $+\infty$, сечението се променя (то може да бъде триъгълник, четриъгълник, петоъгълник, шестоъгълник) като е еднотипно в подинтервалите, определени от делящите точки $-\infty$, $\frac{m}{m-1}$, $\frac{n}{n-1}$, $\frac{mn}{mn-m-n}$, 0, 1, $+\infty$. Тези точки имат различна наредба в споменатите шест случая. Функцията лице на сечението (при произволно фиксирани m и n) е очевидно частично гладка функция. Интересно е да се знае какво е поведението й в делящите точки. Очевидно е да се очаква, че тя е непрекъсната функция за всяко $k\neq 0$. Неочакван е обаче следният феномен:

ФУНКЦИЯТА ЛИЦЕ НА СЕЧЕНИЕТО Е ГЛАДКА ФУНКЦИЯ (ПО-ТОЧНО ДИФЕРЕНЦИРУЕМА САМО ЕДИН ПЪТ) ЗА ВСЯКО $k\neq 0$.

При конкретни стйности на параметрите m и n функцията лице притежава особени точки: максимум, минимум, инфлексия, най-голяма и най-малка стойност. На тях отговарят (в духа на Макс Бил – Цайтлер) кубични сечения, които могат да предизвикат интерес и за изкуството.

Едно кубично сечение наричаме *сечение на Макс Бил,* ако то притежава определено геометрично свойство. Като се използват кремонови преобразувания, могат да се разглеждат *двойни кубични сечения*. На тази основа се получават нови пространствени тела, които могат да намерят приложение в изкуството, промишлеността и т.н.

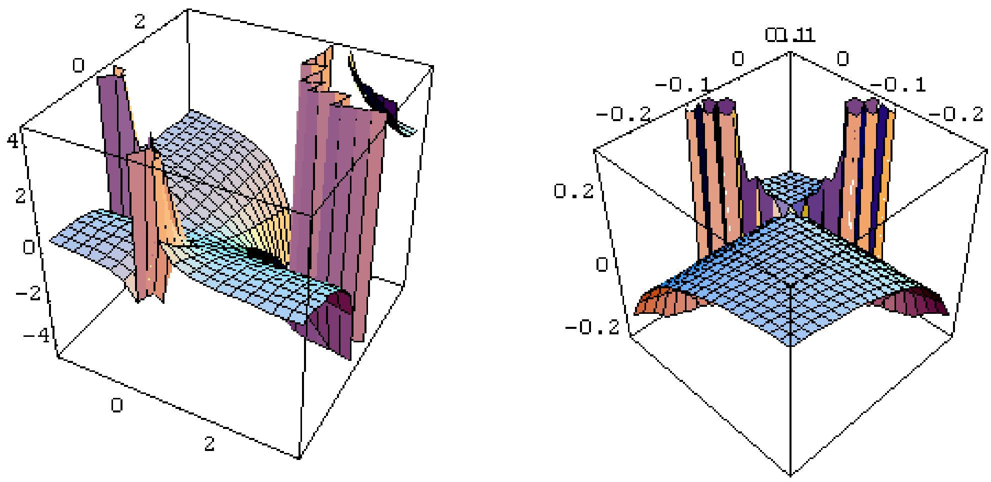
Да разгледаме уравнението

(1)
$$k = \frac{mn}{mn - m - n},$$

с което се определя една от споменатите делящи точки. При произволни m и n, то определя една повърхнина, дефинирана върху цялата равнина, с изключение на точките от хиперболата с уравнение

(2)
$$mn - m - n = 0.$$

В известна околност на началото тази повърхнина има вида, показан на фиг. 1.

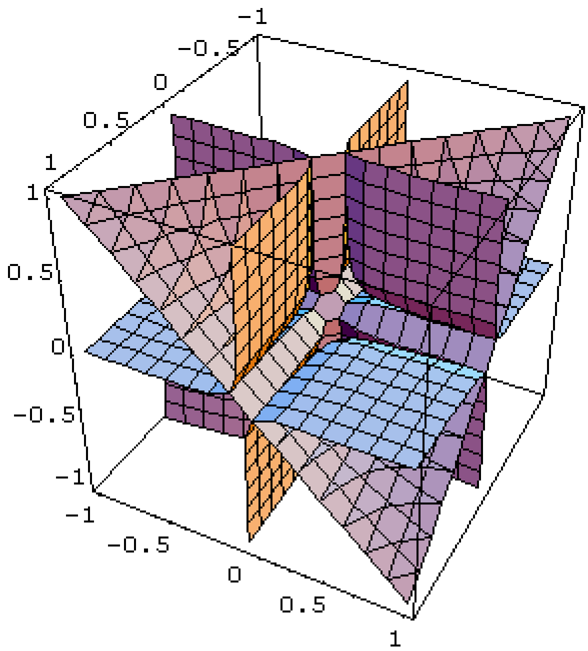


Фиг.1

Уравнението (1) е равносилно (почти навсякъде) на уравнението

(3)
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} = 1.$$

Това показва, че тази повърхнина е еднакво разположена относно трите координатни равнини. От друга гледна точка тя е показана на фиг. 2.



Фиг. 2

Тези изследвания, макар и елементарни (прилага се планиметрия, стереометрия, алгебра, елементарен анализ, аналитична геометрия, компютри), водят и до едно интересно функционално уравнение, а имено: ако положим

$$f(x,y) = \frac{xy}{xy - x - y},$$

то тази функция удоволетворява следното функционално уравнение

$$z = f(f(y,z), f(x,z)).$$

Засега не са известни всичките решения на последното уравнение.