ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ,
ПУ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 3-4.11.2000

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПАРАМЕТРИЗАЦИЯТА ПРИ СЪСТАВЯНЕ НА ЗАДАЧИ ЗА ДОКАЗВАНЕ

Любен Портев, Д. Милушева-Бойкина

Теорията на параметризацията и нейните приложения в обучението по математика в училище получиха значително развитие през последните 20 години в трудовете на К.Славов, Сл.Славова, Л.Портев, Ив.Иванов и др. Те намериха място и в няколко докторантски дисертации (Д.Милушева, Д.Изворска). С тях системно се запознават студентите от Пловдивския университет и Шуменския университет.

Специално място се отделя на приложението на параметризацията за съставяне на задачи. Недостатъчно обаче е изяснено приложението на параметризацията за съставяне на задачи за доказване, което е и предмет на настоящото съобщение.

Знае се, че ако една ситуация е определена до някаква релация чрез система от **k** параметъра $<a_1, a_2, \ldots, a_k>$, то всеки друг елемент a_{k+1} от ситуацията, който е инвариантен относно дадената релация, може да се изрази чрез системата $<a_1, a_2, \ldots, a_k>$, т.е. по необходимост следва съществуване на зависимостта $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)= a_{k+1}$ или в друга форма $F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})=0$. Това означава, че могат да се формулират задачи за доказване, като:

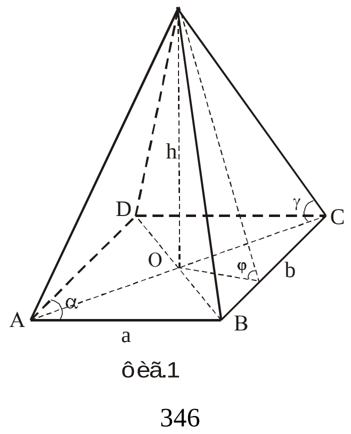
а/ "Да се докаже, че $a_{k+1}=f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ".

б/ "Да се намери зависимост от вида $F(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})=0$".

Ако елементът a_{k+1} се изрази с друга система параметри $<a_1', a_2',\ldots, a_k'>$, т.е. се получи $a_{k+1}=f'(a_1', a_2', \ldots, a_k')$, то може да се формулира нова задача за доказване: "Докажете, че $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)= f'(a_1',a_2',\ldots,a_k')$". В равенството са включени най-малко k+1 параметъра.

Изяснените няколко възможности за съставяне на задачи за доказване ще илюстрираме с конкретни примери.

Пример 1. Пирамидата MABCD има за основа ромб ABCD. Ортогоналната проекция на върха M върху основата съвпада с пресечната точка O на диагоналите на ромба. (фиг.1)



ôèã.1

Броят на параметрите, които определят описаната ситуация до еднаквост е 8.

В описанието на ситуацията в пример 1 са неявно включени 5 параметъра (AB||CD, AD||BC, AB=AD, OM⊥AC и OM⊥BD). За да се определи ситуацията до еднаквост са необходими още 3 параметъра, поне един от които да е метричен.

Означаваме: дължината на основния ръб с **a**; дължината на височината на пирамидата с **h**; острият ъгъл на ромба ∠ BAD с **α**; ъгълът, образуван от MC и ABCD с γ, ъгълът, определен от околната стена BCM и основата ABCD с **φ**; лицето на ΔBCM с **Q**.

Изразяваме обема V на пирамидата като функция на Q, φ, α; Q, a, φ; a, α, γ; h, a, γ.

Получава се съответно:

(1) $V = \frac{3}{4} Q \sin\varphi \sqrt{Q \cos\varphi \sin\alpha}$;

(2) $V = \frac{4}{3}\frac{Q^2}{a} \sin 2\varphi$;

(3) $V = \frac{1}{3} a^3 \sin\alpha . tg\gamma$;

(4) $V = \frac{2}{3} h^2 \cot g\gamma \sqrt{a^2 - h^2 \cot g^2\gamma}$

От тези 4 резултата чрез приравняване на десните страни на равенствата и с незначителни опростявания, могат да се получат 6 задачи за доказване:

"За описаната в пример 1 ситуация и направените означения, да се докаже, че:

а/ $\sin\varphi \sqrt{Q\cos\varphi \sin\alpha} = \frac{Q}{a}\sin 2\varphi$;

б/ $4Q\sin\varphi\sqrt{Q\cos\varphi\sin\alpha} = a^3 \sin\alpha tg\gamma$;

в/ $Q\sin\varphi\sqrt{Q\cos\varphi\sin\alpha} = h^2 \cot g\gamma\sqrt{a^2 - h^2\cot g^2\gamma}$;

г/ $4Q^2 \sin 2\varphi = a^4 \sin\alpha tg\gamma$;

д/ $2Q^2 \sin 2\varphi = ah^2 \cot g\gamma \sqrt{a^2 - h^2 \cot g^2\gamma}$;

е/ $a^3 \sin\alpha tg\gamma = 2h^2 \cot g\gamma\sqrt{a^2 - h^2\cot g^2\gamma}$ "

Всяко от тъждествата съдържа повече от 3 параметъра (елементи на пирамидата) и не повече от 6.

По подобен начин, ако, вместо обема на пирамидата, изразим друг някакъв неин елемент с различни системи от параметри, чрез приравняване ще получим нови задачи за доказване.

Например, ако изразим пълната повърхнина S чрез Q, φ и α и чрез a, α и γ и приравним получените резултати, се съставя задачата:

"За описаната в пример 1 пирамида, да се докаже, че

$$4Q(1+\cos\varphi) = 2a^2 \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\gamma}$$ "

Ако искаме в задачата за доказване да се включат само неметрични параметри (ъгли и отношения), тогава геометричната фигура се определя до подобност. В случая пирамидата MABCD (фиг.1) се определя до подобност от 2 неметрични, независими параметъра. Тогава всеки трети неметричен параметър може да се определи чрез избраните два и по описаната вече технология да се съставят задачи за доказване. Така е съставена например задачата "За пирамидата от пример 1 да се докаже, че $tg\gamma = \sin\frac{\alpha}{2} tg\gamma$."

Описаните технологии за съставяне на задачи за доказване могат да се приложат за всеки математически обект (не само геометричен), който може да се определи до някаква релация.

Пример 2. Ако a_1, a_2,…..,an е крайна геометрична прогресия, "до еднаквост" тя се определя от 3 параметъра, например a_1, q, n. Ако искаме да получим зависимост от вида $f(a_1, q, a_n, S_n)=0$, то както в пример 1 може да се изрази например **n** чрез a_1, q и a_n и чрез a_1, q и S_n. Чрез приравняване на получените два резултата и някои опростявания се съставя задачата:

"Да се докаже, че за крайна геометрична прогресия с положителни членове е вярно равенството $\lg[S_n(q-1)+a_1]=\lg a_n+\lg q$."

Параметризацията се използва и за решаване на задачи за доказване, но тъй като това е широко разпространено в литературата, на него няма да се спираме.

APPLICATION OF PARAMETERIZATION IN CREATING PROBLEMS FOR PROOF

L. Portev, D. Milousheva-Bojkina

There are known a number of applications of parameterization in the education in Mathematics.
In this paper there are revealed some technologies for creating problems for proof in which we use parameterization as a method.