ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ,
ПУ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 3-4.11.2000

ВЪРХУ НЯКОИ ИЗИСКВАНИЯ КЪМ СИСТЕМИТЕ УЧЕБНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ И СРЕДСТВА ЗА ОСЪЩЕСТВЯВАНЕТО ИМ

Димитър Френкев, Васил Милушев

В училищния курс по математика е целесъобразно да се използват системи учебни математически задачи, които да бъдат реално средство за оптимизиране на учебния процес и повишаване неговата ефективност и качество.

Въз основа на проучване същността на задачата в [7] Р.Трашлиев прави изводи с дидактическа насоченост, един от които е свързан с осмислянето на задачата като адекватно средство за прилагането на системния подход в педагогическата практика. "Тези възможности могат да бъдат разкрити чрез целенасочено прилагане на системно-ситуационния подход, задълбочен чрез разкриване необходимите и достатъчни изисквания за системно обхващане на определен обект" [7, с. 126].

Проблемът за оптимизиране на учебния процес по математика въз основа на методологията на системния подход разглежда и В.И.Крупич в [4]. Там той разработва изисквания към системите учебни математически задачи, които се основават на следните принципи на системния подход:

- принцип на цялостност (единност) – обектът се разглежда като нещо цяло;
- принцип на сложност – изискване да се отчитат взаимодействията на обекта със средата и вътрешните фактори;
- принцип на организираност – изискване да се отчита структурната подреденост на обекта;
- принцип на йерархичност – изискване да се разглеждат не само връзките между елементите на дадено равнище, но и връзките, които съществуват между различните нива на системата.

Ще се спрем на следните общи изисквания към системите задачи от училищния курс по математика, формулирани от В.И.Крупич:

1. В съответствие с теорията на учебната дейност по математика, системите учебни математически задачи трябва да се състоят от конкретни задачи, насочени към постигане на обобщени цели на учебната дейност.

2. Всяка система учебни математически задачи трябва да притежава свойството структурна пълнота. Експериментално е установено, че системите задачи, построени въз основа на системния принцип на цялостност повишава ефективността на обучението по време. Според автора основни фактори за икономия на времето, необходимо за формиране на определени умения и навици на определено равнище са:

- занижаване на неоправдано големия брой задачи с минимална сложност
- с повишаването сложността на задачите да се увеличава и техния брой
- ранжиране на задачите в системата по степен на сложност и ниво на проблемност.

3. Всяка система учебни задачи трябва да осигурява постепенно увеличаване на сложността (S), а на всяко ниво на сложност и постепенно нарастване на проблемността (P).

В настояще време все още не са известни критериите, определящи степента на проблемност на задачата. Обаче чрез анализ на информационната (външната) структура на задачата може да се установи с какви компоненти се определя в задачата обективната изходна проблемна ситуация.

За определяне степента на проблемност на задачата основна роля играят компонентите на външната й структура, наречени от автора "базис" (теоретичната основа на решението на задачата) и "способ за решаване на задачата".

Съотношението между възпроизвеждащата и творческата дейност на субекта в процеса на решаване на дадена задача се установява предимно през първите два етапа: "анализ на задачата" и "търсене на решение".

При решаването на задачи с известни базис и способ за решаване преобладава възпроизвеждащата дейност. Те се наричат алгоритмични и са с най-ниска (първа) степен на проблемност.

При решаване на задачи с известен базис, но неизвестен способ за решаване, етапът търсене на решения се осъществява паралелно с анализиране на задачата и проверка на достатъчността на известния базис. Наред с възпроизвеждащата, се осъществява и творческа дейност. Тези задачи се наричат полуевристични и имат втора степен на проблемност.

При решаване на задачи с неизвестен базис (следователно и с неизвестен способ за решаване) търсенето на решение е свързано с творческа дейност. Тези задачи се наричат евристични и са с най-висока (трета) степен на проблемност.

Външната и вътрешната структура на задачата са с взаимни връзки, които се установяват с помощта на компонентите "базис" и "способ за решаване" на външната структура на задачата.

Използвайки вътрешната структура на задачата, В.И.Крупич разработва метод за изчисляване степента на сложност (S) на задачата (който може да бъде проучен в [4,с.94-164]). Като извършва системно-структурен анализ на критериалните задачи (термина е използван от А.А.Балл [1, с.139]), авторът установява, че степента на сложност на учебните задачи трябва да бъде в граници от 1 до 8.

Но основната структура на задачите от УКМ не ограничава възможността учениците да решават задачи с по-голяма сложност от 8. Напротив, тази възможност е необходимо условие за по-задълбочено изучаване на математическите знания.

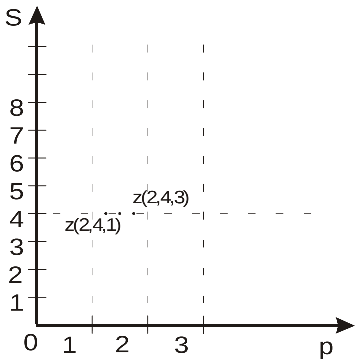
Да приложим резултатите от изследванията на В.Й.Крупич в нашата практика. Въз основа на изследване сложността на "критериалните" задачи в [2], приемаме ориентировъчно, че сложността на задачите, предназначени за ОЗП, трябва да бъде в границите от 1 до 8, а за ЗИП и СИП – по-висока съответно с 1- 4 и 5-7 степени.

На всяка тема или раздел от УКМ съответства система учебни задачи, предназначена за усвояване на съответни знания, формиране на умения за прилагането им, усвояване на дедуктивни правила и методи за решаване на задачи и т.н. Когато темата или разделът се "разширява" в ЗИП или СИП, системата учебни задачи обхваща задачи, предназначени съответно за ОЗП, ЗИП или СИП. За да не се нарушава цялостта на ситемата, подсистемите задачи за ОЗП, ЗИП и СИП трябва да бъдат адекватно "стиковани".

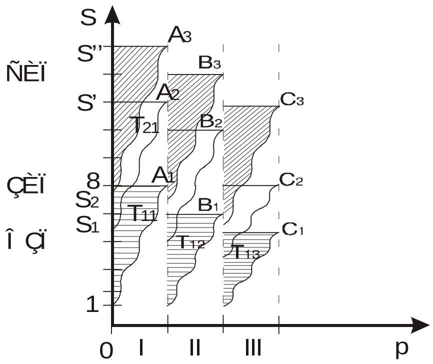
За да изясним нагледно структурата и свойствата на една система задачи, удовлетворяваща изискванията на системно-структурния подход, всяка задача **z** ще моделираме с "точка" с три "координати" z (P,S,L_{ps}), (фиг.1), където P и S са съответно степените на проблемност и сложност, L_{ps} – номера на задачата при фиксирани P и S. Тогава подсистемите задачи с определена степен на проблемност, предназначени съответно за ОЗП, ЗИП и СИП нагледно ще представим с 9 “криволинейни” “правоъгълни” триъгълника, подредени:

а/ в три колони така, че триъгълниците в първата, втората и третата колона да “съдържат” задачи съответно с първа, втора и трета степен на проблемност;

б/ в три реда така, че триъгълниците в първи, втори и трети ред да “съдържат” задачи съответно за ОЗП (със степен на сложност от 1-8), за ЗИП (със степен на сложност от S_1 до S’, S_1>1, S’>8) и за СИП (със степен на сложност в границите от S_2 до S’’, S_2>S_1, S’’>S’), (фиг. 2).



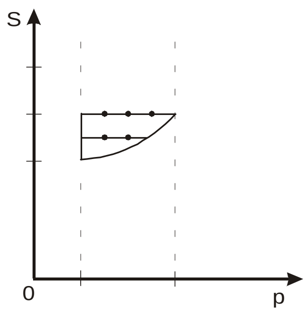
ôèã.1



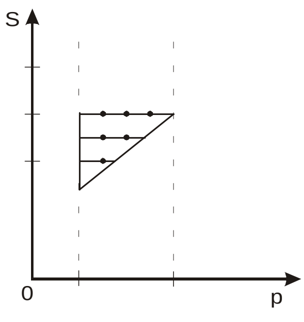
ôèã.2

За всяка от подсистемите на фиг. 2, броят и границите на степени на сложност на задачите, съдържащи се в тях, и броят на задачите с определена степен на сложност или проблемност се определя в зависимост от равнището на подготвеност на учениците върху “базиса”на съответните задачи, интереса и възприемателните им способности.

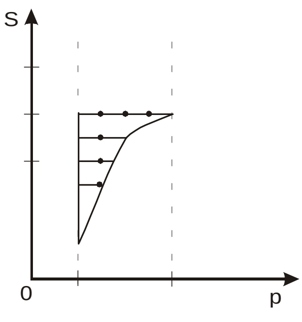
“Стръмнината” и вида на “хипотенузата” на всеки криволинеен триъгълник на фиг. 2 отразява броя на различните степени на сложност и броя на задачите, които съдържа съответната подсистема. Да приемем условно, че подсистеми задачи, представени с триъгълници, с праволинейни хипотенузи (фиг.4) съответстват на групи ученици със “средна” подготвеност и възприемателни възможности. Тогава подсистемите задачи, представени с триъгълници с “хипотенузи”, които са изпъкнали (фиг. 3), респ. вдлъбнати (фиг.5) криволинейни отсечки, могат да бъдат предназначени съответно за групи ученици с по-малка, респ. по-голяма подготвеност и възприемателни възможности.



ôèã.3



ôèã.4



ôèã.5

За подсистемите задачи, представени с “триъгълниците” на фиг. 3, фиг. 4 и фиг. 5 ще казваме, че сложността на съдържащите се в тях задачи нараства съответно забавено, равномерно и ускорено, а също така – че те са съответно с първа, втора и трета степен на трудност. За всяка система задачи трудността на коя да е подсистема не трябва да надвишава трудността на следващата, т.е. с нарастване на проблемността на задачите може да нараства (но не може да намалява) и трудността на съответните подсистеми.

Редът на предлагане на задачите от дадена система на учениците за решаване, трябва да съответства на лексикографическата релация на наредба спрямо техните “координати” (S,P,L_{ps}).

Учебните математически задачи се класифицират по най-разнообразни признаци. Считаме, че при конструирането на системи учебни задачи принципът за структурна пълнота трябва да се прилага не само по отношение на степените на проблемност и сложност на задачите от системата, а и относно техния вид. По-конкретно считаме, че в съответствие с принципа на структурната пълнота, в “обединението” на всички системи учебни задачи от УКМ, трябва да намерят място представители от всички видове задачи. “… проблема сега не е главно в това да се увеличи времето на ученика, отделено за занимание със задачи. Основното е да се постигне по-голямо разнообразие на използваните задачи. Това само по себе си помага за формиране на личността на ученика и за повишаване на неговата активност и самостоятелност. Ето защо е необходимо да се очертае възможното разширено задачно битие на учениците” [7, с. 126].

Дейността на учителя по конструиране на системи учебни задачи за дадена тема или раздел от УКМ се затруднява от факта, че не всички системи задачи в учебните пособия по математика съответстват на принципите на системния подход. Един от начините за решаване на този проблем е използването на средства за внасяне на мобилност в системите задачи в учебните пособия, при това ефектът относно оптимизирането на учебния процес ще нарастне още повече, когато тези средства се използват от самите ученици. Едно от тези средства е преобразуването на задачи в етапа “допълнителна работа след решаването на задачата” [5, с.172] от процеса за решаване на задачи, когато преобразуването води до изменение на степента на проблемност или сложност на задачата или до изменение на нейния вид. Ще илюстрираме целесъобразността на тази идея с пример върху един начин на класифициране на задачи и преобразуване на задачи от един вид в друг с повлияване върху степента на проблемност.

Ще използваме метода на параметризацията [6].

Нека всяка задача **z** от дадена система задачи, съдържа система параметри $P_1,\ldots,P_r$, $r\geq 1$, които параметризират обект F от областта на задачата M по релация на еквивалентност ρ. Всяка предметна константа в кой да е от параметрите $P_1,\ldots,P_r$ (разглеждан като предикат или съждение, получено от предикат) е или конкретизиран елемент (число означено с цифра; вектор с координати, означени с цифри и т.н.) на обект F от областта M, или е означена с буква-параметър. Един от признаците за деление на задачите на видове е вида на означаване на предметните константи, фигуриращи в параметрите P_1, …., P_r (т.е. дали те са конкретизирани или са букви-параметри).

Да означим с $P_1,\ldots,P_s$, $s\geq r$ параметрите – скалари или вектори. Тогава ако $s<r$, то останалите r-s параметъра са параметри–релации, в които фигурират повече от един елемент на F (често пъти в процеса на решаване на задачата те се трансформират във

вид на равенства). Втори признак на делене на задачите на видове е отношението между s и r (т.е. дали s=r или s<r).

С посочените два признака множеството задачи може да се разбие на 4 класа.

Ще се спрем на следните 2 вида задачи:

А. Предметните константи в параметрите са означени с букви-параметри и s<r. За всяка задача от този вид е характерно:

а/ След изразяване на кой да е елемент на F чрез негови дадени елементи се получава свойство-релация, което е следствие на параметрите-релации $P_{s+1},\dots,P_r$. Това свойство е инвариантно спрямо релацията ρ и може да замени кой да е от параметрите $P_{s+1},\dots,P_r$. Когато r=s+1 тогава същото свойство е еквивалентно на P_r.

б/ Целта на този вид задачи е свързана с доказване или намиране на свойство, което е характерно за отделен клас $K\subset M$, $K\neq M$.

в/ Задачите от вида А могат да се преобразуват при запазване броя на параметрите – скалари или вектори и броя на параметрите-релации, чрез обобщение, специализация, конкретизация, аналогия и съставяне на обратни задачи.

Пример 1. Даден е трапецът ABCD с основи AB=a, CD=b и диагонал AC=d. Докажете, че:

1/. Ако $d^2=ab$, то $\angle ADC=\angle ACB$.

2. Ако $\angle ADC=\angle ACB$, то $d^2=ab$ [3, с. 71].

Един вариант на преобразуване на задачата чрез конкретизация е заместването на a, b и d с числа, означени с цифри, които удовлетворяват равенството $d^2=ab$.

Например: Даден е трапецът ABCD с основи 9 см, 4 см и диагонал 6 см. Да се докаже, че $\angle ADC=\angle ACB$. По този начин в редица случаи се стига до задачи от следния вид:

Б. Предметните константи в параметрите са конкретизирани и целта на задачата е свързана с доказване или намиране на свойства, които не са инвариантни спрямо релацията ρ.

За задачите от този вид е характерно, че те могат да се разглеждат като "конкретизации" на съответни задачи от вида А. За разлика от изходните си задачи, някои от параметрите-релации $P_{s+1},\dots,P_r$ в "конкретизираните" задачи не са зададени явно. А точно "скритите" свойства в задачите от вида Б изграждат клетката на техния оператор.

Пример 2: Даден е трапецът ABCD с основи AB=9 см, CD= 4 см и диагонал AC= 6 см. Намерете отношението на:

а/ Бедрата AD и BC.

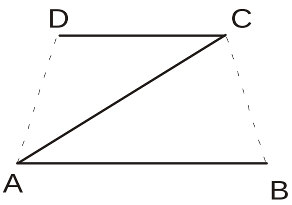
б/ Радиусите на вписаните в ΔACD и ΔABC окръжности [3,с.71].

Стратегията за търсене на решение на задачата е в тясна зависимост с определянето на вида й (когато вида задачи и съответния метод за търсене на решения са известни на решаващия задачата).

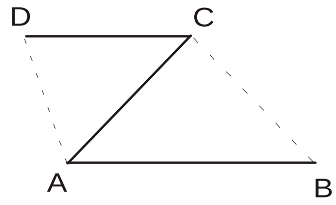
Задачата е от вида Б точно тогава, когато отношението на бедрата AD и BC на трапеца ABCD не е инвариантно спрямо релацията, по която той се параметризира с дадените три метрични параметъра. Верността на последното твърдение може да се установи експериментално по следния начин: да си представим, че трапец ABCD с фиксирани основи и диагонал е "шарнирно" свързан в точките A и C (фиг. 6). Очевидно той може да бъде "нагласен" веднъж така, че да е равнобедрен, (фиг. 6а), а втори път така, че да не е равнобедрен (фиг. 6б), от което следва, че отношението на бедрата AD и

ВС не се запазва при преход от една фигура към друга, параметризирани по един и същи начин с дадените параметри.

Следователно за намиране отношението на бедрата AD и BC на трапеца ABCD е необходим четвърти параметър. Той би трябвало да изразява релация между дадените числови данни. Обстоятелството, че се търси отношение на страни на два триъгълника лежащи срещу съответно равни ъгли ни насочва към клетката на оператора: AC:AB=6:9=4:6=CD:AC.



ôèã.6a



ôèã.6á

/*Забележка*: Мястото на задачата в системата задачи в [3, с. 71], предназначена за обобщаване знанията за подобни триъгълници, насочва ученика към “базиса” й. Необходимо е обаче да се насочват учениците към определяне на стратегии за търсене на решения на задачи, когато те са “изолирани” от съответните системи./

Приемаме тезата, че всеки параметър в дадена задача има своето значение за ориентиране решаващия задачата към разкриване на структурния компонент “базис”, който от своя страна има отношение към определяне степента на проблемност на дадена задача. Тогава “базиса” на задача от вида Б не винаги е известен, тъй като тяхната основна информация се изгражда и въз основа на “скритите” свойства-релации между числовите данни. Следователно задачите от вида Б имат по-голяма степен на проблемност от съответните им задачи от вид А, и преобразуванията на задачи от вида А в задачи от вида Б и обратно променя и степента на проблемност на съответните задачи.

Пример 3: Да разгледаме три варианта на формулиране на една и съща задача:

а/ За ΔABC е известно, че BM е медиана и AB:AM=AC:AB. Да се докаже, че $\angle ACB=\angle ABM$.

б/ За ΔABC е известно, че BM е медиана и $AC=\sqrt{2}$ AB. Да се докаже, че $\angle ACB=\angle ABM$.

в/ Даден е ΔABC със страни $AB=3\sqrt{2}$ см и AC=6 см. Построена е медианата BM. Намерете отношението на $\angle ACB$ и $\angle ABM$.

Разглеждани самостоятелно, първият вариант на задачата е с най-малка степен на проблемност, а третата – с най-голяма.

Съществуват и други видове задачи и съответни преобразувания, които могат да променят вида на задачите и степените им на проблемност. Съществуват също така и задачи и съответни на тях преобразувания, които водят до изменения и на логическата структура на техните решения, т.е. могат да променят степените им на сложност. Следователно преобразуванията на задачи могат да бъдат ефективно използвани за привеждане на структурните, функционални и субстратни свойства на системите учебни математически задачи в съответствие с принципите на системния подход с цел оптимизиране на учебния процес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. М., "Педагогика", 1990.
2. Величков В., Н.Райков. Задължителен минимум от знания и умения в края на 9., 10. И 11. клас - сп. Математика и информатика, 3, 1998, с. 16-21.
3. Ганчев Г. и др. Геометрия за 9. клас на ЕСПУ. С., "Народна просвета", 1994.
4. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. М., "Прометей", 1995.
5. Портев Л., Н.Николов. Методика на обучението по математика, Пловдив, 1987.
6. Славов К., Сл.Славова. Параметризация на множества. Годишник на ВПИ – Шумен, том IX Б, 1985, с. 59-77.
7. Трашлиев Р. Задачата (Психолого-педагогически проблеми), С., 1989.

ABOUT SOME REQUIREMENTS TO THE SYSTEMS OF SCHOOL MATHEMATICAL PROBLEMS AND MEANS FOR THEIR REALIZATION

D. Frenkev, V. Millousev

In the paper there is treated the problem about constructing systems of school mathematical problems on the basis of principles of systematically-structural approach. Because of the fact that not all systems of problems in the textbooks in Mathematics correspond to these principles, we developed the idea about bringing up mobility in them by transformations, which influence upon the degrees of problematicity and complexity of problems and upon their type.

The idea is illustrated with an example upon one aspect of classification and transformations of problems.