# ЧТО ТАКОЕ ПРОЦЕНТ ?

**Н. Х. Розов**

**1.** Изучению «процентов» в программе школьного курса математики выделяется достаточно много времени. Но педагогические наблюдения свидетельствуют, что эта тема является очень трудной для школьников. Да и в высшей школе, на экономических специальностях, обнаруживается, что, сталкиваясь с процентами, многие студенты чувствуют себя неуверенно.

Обращаясь к анализу «проблемы процентов», необходимо с самого начала позиционировать ее как *нематематическую*. Процент не является математическим понятием, не относится к числу «открытий» математики. В математической теории и в её приложениях он не играет никакой роли, не применяется и не исследуется − математики без него вполне обходятся. В фундаментальном издании «Математическая энциклопедия. В 5 т. М.: Сов. энциклопедия, 1977–1985.» этот термин отсутствует; нет его и в научных справочниках по математике.

Изучение процентов в школе объясняется лишь установившейся традицией и чисто прагматическими соображениями. Исторически сложилось так, что люди привыкли использовать проценты как удобное средство кратко сообщать количественную информацию о сравнении различных данных, для описания (но отнюдь не изучения!) относительного изменения измеряемых величин. Именно в таком и только в таком качестве проценты употребляются при общении людей, в технике, экономике, статистике, социологии, психологии, химии, биологии, фармакологии и др.

Однако часто волей отдельных школьных методистов «процент» из скромного технического средства превращается в отдельное «понятие» и большую «тему». Во многих пособиях наводится такой «теоретический лоск», так подробно излагаются разнообразные «тонкости» и так тщательно классифицируются «типы задач», что создается впечатление: раздел «Проценты» и в самом деле является серьезной главой математики.

Всё это не имеет никакого отношения к математической сути дела и порождается всего лишь живучей тенденцией всячески внедрять «наукообразие» в школьную математику.

**2.** Если проанализировать объяснения или определения «процента» из различных учебников, справочников, методической литературы, то к большому удивлению сразу же обнаруживаются непривычные для математики неопределённости, неточности и разночтения.

Мы воспроизведём некоторые такие «определения понятия процент».

«*Процент – одна сотая часть*». Возникает вопрос: часть чего? Ведь «часть» бывает только «у чего-то целостного», а ни про какое «целостное» в определении не говорится. Кроме того, как согласуются между собой выражения «процент», «один процент» и «1%»? И какой точный математический смысл имеет сам по себе значок «%»?

«*Процент – сотая доля целого, принимаемого за единицу*». Читая фразу «В выборах участвовало 62,7% избирателей», школьник действительно должен представлять себе, что «целое», т. е. общее число избирателей, равно 1?

«*Одну сотую часть числа (величины) называют процентом этого числа (величины)*». Откуда берётся «это число (величина)»? Оно любое – или как-то (кем-то) выбрано? Понимает ли школьник разницу между терминами «число» и «величина» – или это просто синонимы?

«*1% от А означает сотую долю некоторого числа А, обычно именованного ...* ». «Сотая доля именованного числа» автоматически является числом именованным; поэтому «1%» в каждом конкретном случае имеет отдельный «именованный» смысл. Значит ли это, что существует много разных «процентов»? А как школьник должен понять, почему «*p%* от *A*» означает, что «1% от *A*» надо умножить на *p*?

«Для обозначения *одной сотой числа* употребляется слово *процент*: $\mathbf{{}^{1}/_{100}}$ − **процент.** … При записи вместо слова *процент* используют значок %. Например, вместо слов *один процент* пишут: «1%» … 1% − это $^{1}/_{100}$ от целого. Целое составляет $^{100}/_{100}$». Доступно ли школьнику такое невнятное объяснение?

А вот образец решение задачи «Сколько процентов составляет 120 от 250?»: «(120/250) · 100% = 0,48 · 100% = 48%». Почему можно число 0,48 умножить на число 100, а затем приписать к произведению символ %?

**3.** Отметим прежде всего два принципиальных момента.

1). Процент – это *не понятие*, его не надо определять. Процент – это *удобное обозначение*, его употребление и надо объяснить.

2). Математика процентов тривиальна, трудности в решении «задач на проценты» носят нематематический характер.

Ознакомление с процентами надо начинать с простого и формального объяснения смысла символа «%». Хорошо известно, что одно и то же число может записываться с помощью различных обозначений. Так, число «восемь» изображается символами: 8; VIII; 8,000; 8/1; 7,(9); $(1/8)^{-1}$; $\log_2 256$ и т. д. При работе в 16-ричной системе счисления необходимо привлечь обозначения для дополнительных цифр (например: *A*=10, *B*=11, … , *F*=15). Для некоторых иррациональных чисел принято использовать искусно придуманную запись: $\sqrt{17}$ . За отдельными «особо выдающимися» числами закреплены специальные буквы: $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\varphi}$ (число Фибоначчи) и др.

Используем эту вполне стандартную для математики возможность и примем следующее

**Обозначение.** *Число* $^1/_{100} = 0{,}01$ *иногда обозначается еще и* ***значком*** **%**, *который называется «**процент**»*:

$$\% = {}^1/_{100} = 0{,}01\ .$$

*Если р – действительное число, то выражение p% (читается: «пэ процентов») представляет собой произведение чисел р и* %:

(1) $$p\% = p \cdot \% = p \cdot 0{,}01 = p \cdot {}^1/_{100} = p/100 = p \cdot 10^{-2}.$$

К введённому обозначению надо, конечно, привыкнуть, осознать, что в употреблении для числа $^1/_{100} = 0{,}01$ ещё и нового значка % нет ничего особо необычного. Если угодно, в записи **%** = 0,01 можно увидеть аналогию со столь привычной нам записью $\pi = 3{,}14\ldots$ . А выражение *p*% вполне логично понимать как произведение двух чисел *p* и % с опущенным по традициям алгебры знаком умножения (точка « $\cdot$ »).

В частности, $1\% = 1 \cdot {}^1/_{100} = {}^1/_{100} = 0{,}01$ – и мы получаем еще одну форму записи дроби 0,01. Так как $100\% = 100 \cdot {}^1/_{100} = 1$, то в виде 100% можно записывать число 1. Справедлив и общий факт: *любое число а можно записать в виде*

(2) $$a = 100 \cdot a \cdot {}^1/_{100} = (100a)\%\ .$$

Скептицизм в отношении трактовки символа % как числа часто возникает в связи с вопросом, как с «числом %» проводить операции. Ответ: точно так же, как они выполняются, например, с числом π. Ничто не мешает понимать запись $a + \%$ как сложение $a + 0{,}01$, степень $(\%)^2$ как умножение %% и т. д. и проводить вычисления:

$$42\% + \% - 28\% \cdot (0{,}5\%)^2 - 7 \cdot 13\% / 61\% =$$
$$= 43 \cdot \% - 28 \cdot \% \cdot 0{,}5^2 \cdot (\%)^2 - (7 \cdot 13/61) \cdot (\% / \%) =$$
$$= 43 \cdot 0{,}01 - 28 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}0001 - 7 \cdot 13/61 = \ldots$$

Но почему же это никогда и нигде не делается? Дело в том, что использование символа % в арифметических вычислениях и алгебраических преобразованиях не доставляет никакого удобства. Поэтому ***ни в арифметике, ни в алгебре (да и во всей математической науке) символ % никогда не встречается.***

**4.** Исторически появление процентов не имеет под собой научно-математического основания, а связано, по-видимому, с психологическими мотивами.

Людям очень часто приходится проводить сравнение двух различных положительных чисел.[1] Одно из них – то, *с которым проводится сравнение,*

[1] Классические понятия качественного и количественного сравнения различных объектов, величин, чисел составляют содержание отдельной дисциплины. И очень жаль, что в школе не предусматривают знакомства с этими исключительно важными – в теоретическом и в практическом плане – вопросами.

– мы назовём *эталоном* и будем обозначать его ***M* *(считая, что* *M*** > 0), а другое – то, *которое сравнивается,* – назовём *вариантой* и будем обозначать ***m* *(полагая, что* *m*** > 0). Существуют три типа сравнений:

а). *Абсолютное сравнение варианты с эталоном* определяется вопросом «*На сколько варианта отличается от эталона*?». Результат $\Delta = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ такого сравнения называется *отклонением варианты от эталона*.

б). *Относительное сравнение варианты с эталоном* определяется вопросом «*Во сколько раз варианта отличается от эталона*?». Результат $\lambda = \boldsymbol{m} / \boldsymbol{M}$ такого сравнения называется *отношением варианты к эталону*.

в). *Относительное сравнение отклонения с эталоном* определяется вопросом «*Во сколько раз отклонение варианты от эталона отличается от эталона?*». Результат $\varepsilon = (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}) / \boldsymbol{M}$ такого сравнения называется *относительным отклонением варианты от эталона*.

Ясно, что результаты обоих относительных сравнений представляют собой отвлеченные, вообще говоря, дробные числа, и эти дроби могут быть довольно громоздкими.

Психологически человек испытывает антипатию к «слишком длинным» или «слишком громоздким» числам – число 29375640173,7492804513385 ни прочитать, ни воспринять, ни тем более запомнить фактически невозможно.

Так как на практике обычно важна не «идеальная точность», а «удобное приближение», то в первую очередь роль играют «величина разрядности» числа и его одна или две (реже три) первые значащие цифры – именно эти характеристики числа и выделяют. Например, указанное выше число, если оно действительно встретится, наверняка запишут в форме $29{\cdot}10^{9}$, или $2{,}9{\cdot}10^{10}$, или $0{,}29{\cdot}10^{11}$. В случае именованных чисел этой же цели служат шкалы единиц измерения: так, вместо 0,00000005371902 *км* пишут 0,05 *мм*.

Допустим теперь, что мы хотим сообщить конкретную ситуацию выборов: *из 864 избирателей за Иванова проголосовали 327 человек.* Как по возможности кратко и доходчиво охарактеризовать «степень» успеха Иванова, то, как далеко он оказался от «полной победы»? Здесь речь идёт об относительном сравнении числа избирателей, отдавших свои голоса Иванову (число 327 − варианта), с общим числом избирателей (число 864 – эталон). Ясно, что «Доля голосов, которую получил Иванов, составляет $^{327}/_{864}$ от общего числа голосов». Но уж очень громоздко и необозримо! Можно эту дробь сократить: $^{109}/_{288}$ или привлечь десятичные дроби: $^{327}/_{864} = 0{,}3784722...$, однако и эти записи сложно запомнить.

Поскольку «далёкие» десятичные знаки в последней дроби никакой роли не играют, удобно ещё более упростить ответ и сказать: «Иванов набрал без малого 0,38 от числа всех голосов» или «Иванов собрал чуть меньше $^{38}/_{100}$ от всех голосов». Эти две дроби допускают прозрачную интерпретацию: *за Иванова проголосовало в среднем почти* 38 *человек из каждой сотни избирателей.* Коротко и легко запоминается!

Этот и другие реальные примеры показывают, что представление результата относительного сравнения в форме «*сколько-то на сотню*» оказывается чрезвычайно удобным и ярким. Поэтому понятно естественное стремление к стандартизации этой формы, заключающейся в стилизации части дроби « $/_{100}$ » в виде специального символа «%». Такое обозначение позволяет сформулировать результат голосования совсем кратко: «Иванов собрал почти 38% голосов». Здесь проявляется и ещё одна психологическая особенность: интуитивное нежелание людей лишний раз использовать дроби, стремление работать с целыми (и по возможности – «короткими») числами.[2] В силу этого привычка использовать проценты для сообщения результата относительного сравнения оказалась такой популярной и живучей.

*Проценты традиционно применяются* ***исключительно*** *как средство записи результата относительного сравнения положительных величин, то есть отношения или относительного отклонения таких величин –* ***и больше нигде***. В этом и только в этом состоит единственное общепринятое разумное предназначение процентов. Взятый сам по себе, «процент» не позволяют ничего подсчитывать, преобразовывать, находить. Проценты являются одной из технических, но весьма распространённых форм *представления данных.*

Сделаем принципиальное замечание. Если *в результате сравнения величин* установлено, что одна из них составляет 0,28 другой, то этот факт можно выразить словами «Одна величина составляет 28% от другой». Однако если *в какой-либо иной ситуации* (в обиходе, в таблице данных, в арифметической задаче, при расчётах и т. д.) мы встречаем дробь 0,28, то её *бессмысленно* читать «28 процентов»! [3]

**5.** Алгоритмы «математики процентов» чрезвычайно просты, они состоят только *в преобразовании формы представления отношения*. Пусть нас интересует, например, относительное сравнение варианты $\boldsymbol{m} > 0$ с эталоном $\boldsymbol{M} > 0$. Результатом этого сравнения является числовое отношение $^{\boldsymbol{m}}/_{\boldsymbol{M}}$. Построим специального вида пропорцию $^{\boldsymbol{m}}/_{\boldsymbol{M}} = {}^{p}/_{100}$; тогда исходное числовое отношение можно заменить равной ему дробью $^{p}/_{100}$. Если при этом число $p$ оказывается «удобным», есть смысл использовать проценты и записать результат сравнения в форме «$p$%».

Как правило, в выражении $p$% число $p$ стараются сделать целым (результат сравнения округляется до целого числа процентов), и притом желательно, чтобы оно было не более чем трехзначным. При особой необходимости, конечно, могут добавляться и десятые, и сотые доли процента, например: 135,2% или 0,08%. Однако следует помнить: чем больше десятичных знаков пишется, тем меньше смысла выражать результат

[2] Кстати, с этой же целью вводятся и многие профессиональные «неметрические» единицы измерения, например, «карат».

[3] Как указано в (2), любое число формально можно «выразить в процентах». Но использовать такое «процентное представление чисел» вне сферы сравнения величин так же противоестественно, как и попросить в магазине «Продать 2500 карат сметаны».

сравнения «в процентной форме», ибо её удобство как раз и заключается в использовании не слишком «длинных» чисел.

Возникает любопытный вопрос: почему выделяется именно сравнение «столько-то на сотню», то есть пропорция $\boldsymbol{m}/\boldsymbol{M} = p/100$, и почему именно для числа $1/100$ «прижилось» специальное обозначение? Ответы на эти вопросы нет смысла искать в математике, поскольку они лежат за её пределами и состоят в использовании для каждого конкретного случая психологически наиболее удобной формы представления данных.

Прежде всего отметим, что люди далеко не всегда используют обязательно сравнение «столько-то на сотню». Вспомните фразы: «из трёх бросков два оказываются удачными», «в пальто идёт примерно один из двадцати встречных», «каждый пятый билет – выигрышный» и т. п. Это и есть «другие» формы выражения сравнения величин. Например, фраза «в среднем восемь попаданий из десяти выстрелов» означает, что результат относительного сравнения варианты (число попаданий) с эталоном (число всех выстрелов) приблизительно равен $8/10 = 0{,}8$.

Однако для дроби $1/10$ специального обозначения исторически не возникло – не сложилось. Наверно, потому, что сравнение «столько-то на десятку» не даёт возможности обеспечивать достаточную точность результата сравнения величин, используя «удобные» («короткие») числа. Но и дробь $1/100$ не является единственной, которая имеет свой персональный символ. Широко употребляется (в химии, биологии, фармакологии) *специальное обозначение для числа* $1/1000$ *– значок* «‰»; он называется «промилле».

**6.** Как же именно используются проценты на практике и какие задачи в связи с этим приходится рассматривать? Отметим сразу, что приведенные выше обозначение (1) и представление (2) позволяют сделать заключение, что, собственно, *в математике «задач на проценты» как таковых вообще не существует*. Любая задача, где в той или иной форме фигурируют проценты, всегда состоит из двух последовательных процедур: из переформулирования исходной задачи в арифметических терминах (т. е. замены значка % на число 0,01) и из решения обычной арифметической задачи.

Таким образом, типов «задач на проценты» (т. е. задач преобразования «процентной формы» в «арифметическую») ***всего два***.

**I.** *Относительное сравнение с эталоном* $\boldsymbol{M} > 0$ *варианты* $\boldsymbol{m} > 0$. Результат такого сравнения $\boldsymbol{m} / \boldsymbol{M} = \lambda$, если воспользоваться представлением (2), может быть записан «в процентах»:

(3) $$\boldsymbol{m} / \boldsymbol{M} = p\%, \quad \text{где} \quad p = 100\lambda;$$

выражение $p\%$ называется *процентным отношением* (не путать с числом $p$).[4] Ключевая фраза задач этого типа − «*варианта* ***m составляет*** $p\%$ *от эталона* ***M***» − математически записывается формулой (3), или

[4] «Процент» допускает наглядную интерпретацию. Числа $\lambda$ и $p\%$ являются просто двумя различными эквивалентными формами записи одного и того же

(4) $$\boldsymbol{m} = p\%\ \boldsymbol{M} = (p\boldsymbol{M}) / 100.$$

**II.** *Относительное сравнение с эталоном* $\boldsymbol{M} > 0$ *отклонения* $\Delta = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ *варианты* $\boldsymbol{m} > 0$ *от этого эталона.* Результат такого сравнения $\Delta / \boldsymbol{M} = \varepsilon$ может быть записан «в процентах»:

(5) $$(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}) / \boldsymbol{M} = q\%, \text{ где } q = 100\varepsilon;$$

выражение $q\%$ называется *процентным относительным отклонением* [5] (не путать с числом $q$). Ключевая фраза задач этого типа − «*варианта* $\boldsymbol{m}$ ***отличается*** *на* $q\%$ *от эталона* $\boldsymbol{M}$» математически записывается формулой (5), или

(6) $$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\,(1 + q\%) = \boldsymbol{M}\,(1 + (q / 100)).$$

Формулами (4) и (6) полностью исчерпывается весь тот багаж *математических* знаний «о процентах», который необходим школьнику. Серьёзные проблемы, которые возникают в связи с «задачами на проценты», вызываются не самим значком «%» и не «арифметическими аспектами» этих задач, а психологическими трудностями свободного, полного и точного понимания учащимися подчас специфических и непривычных деталей формулировок «задач на проценты».[6] Это требует серьёзной перестройки методики изучения «процентов» в школе.[7]

---

результата «измерения» варианты $\boldsymbol{m}$ с помощью «единицы измерения» − эталона $\boldsymbol{M}$. А каков смысл самого числа $p$? Мы можем ту же самую варианту $\boldsymbol{m}$ «измерять» с помощью другого эталона, например, $^1/_{100}\boldsymbol{M}$. (Ведь можно измерять метром, а можно − сантиметром.) Результат нового «измерения» увеличится в 100 раз и окажется равным $100\lambda = p$ (см. (3)), т. е. сотая доля эталона $\boldsymbol{M}$ в варианте $\boldsymbol{m}$ «укладывается» $p$ раз. Следовательно, *число p является отношением варианты к сотой доле эталона.* (Если $\lambda$ – отношение варианты к эталону, то *число $\lambda\%$ является отношением той же варианты к* 100-*кратно увеличенному эталону*).

[5] Неравенство $q\% > 0$ означает «варианта больше эталона», а $q\% < 0$ – «варианта меньше эталона».

[6] Всякий ли ученик понимает разницу между «цена упала на 32%» и «цена упала до 68%»? понимает бессмысленность вопроса «На сколько процентов различаются числа 17 и 19?»? понимает смысл фразы «Уровень безработицы приближается к 15%»? понимает, что реклама «Использование нашей щёточки для ресниц на 72% увеличит выразительность Вашего взгляда» рассчитана на «дурачка»?

[7] Уровень освоения школьниками «процентов» иллюстрирует старый анекдот. Пожилая учительница встречает на улице своего бывшего выпускника. «Володя, я очень рада тебя видеть. Как ты сейчас живешь?» «Всё у меня о-кэй. Бизнесом занимаюсь, торгую». «Да как же это ты бизнесом-то занимаешься? Ты ведь в школе даже проценты усвоить не мог!» «А чего там усваивать? Вот покупаю коробку американских сигарет за 17 долларов, а продаю за 19. На эти два процента и живу».

**7.** Пожалуй, единственной областью знаний, где проценты не просто привлекаются для технического описания результата сравнения, а используются в ходе содержательных исследований – *финансовая математика*. Она показывает, как удобно использовать проценты – и для характеристики фундаментальных понятий, и в серьёзных вопросах. К сожалению, в этой науке всё время подчёркивается различие между записью величины «в форме дроби» и представлением её «в процентах», что вызывает определенные трудности.

Вот цитата из одного учебника: «В нашем изложении процентная ставка $r$, как и другие виды процентных ставок, … имеют двоякий математический смысл: в расчётных формулах они … понимаются как сотые доли, при этом в их записи не используется символ % (конечный результат после вычислений по формуле может быть равен, например, 0,05 или 0,1 и т. д.), в то же время в тексте процентные ставки имеют уже реальный смысл процента и … всегда сопровождаются символом % (например, $r = 10\%$)».

Если принять новую трактовку символа %, то при проведении вычислений абсолютно безразлично, как в формуле $S_1 = S(1 + r)$ записать число $r$: как обыкновенную дробь, как десятичную дробь или с использованием символа «%», ибо всё это − три совершенно эквивалентные формы записи одного и того же числа.

Н. Х. Розов
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова