МОТИВИРАНЕ ПРИЛОЖЕНИЯТА НА ТЕМАТА “НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ФУНКЦИЯ” В 12 КЛАС II РАВНИЩЕ

Иван С. Иванов

РЕЗЮМЕ

Разгледана е система от задачи в училищния курс по математика за 12клас, второ равнище, във връзка с темата "Непрекъснати функции". Целта на системата е да даде мотивация за изучаването на темата, като посочва значението на непрекъснатите функции за по-нататъшното развитие на теоретичното знание по вече разглеждани теми от по - общо и евристично естество.

Ключови думи: мотив (мотивация), непрекъснатост на функция.

Мотивиране необходимостта от съответните знания и умения е важен етап от съвместната дейност на учителя и учениците при изучаване на математическите понятия, теореми, доказателства, задачи и техните приложения.

Тъй като предлаганата статия е продължение на тази от (Ivanov, 2009), се налага да цитираме нужните моменти от нея.

Мотивът (в превод от латински “мотив” означава “привежда”, “тласка”) е система от подбуди (стимули), която предизвиква у личността активност, насочена към удовлетворяване на потребности и извършване на дейности.

В зависимост от потребностите на личността и резултата от извършената от нея дейност, мотивите биват външни (екстрасивни) и вътрешни (интрасивни).

Когато в обучението осъзнато и целенасочено се разкрива връзката на всяка основна цел с някакъв мотив, говорим за мотивация в обучението, което моделираме чрез фиг. 1 (Ivanov, 2009,стр. 122).

Структурните елементи на този модел са:

О – обект на мотивацията;

С – субект на мотивацията;

П – преподавател;

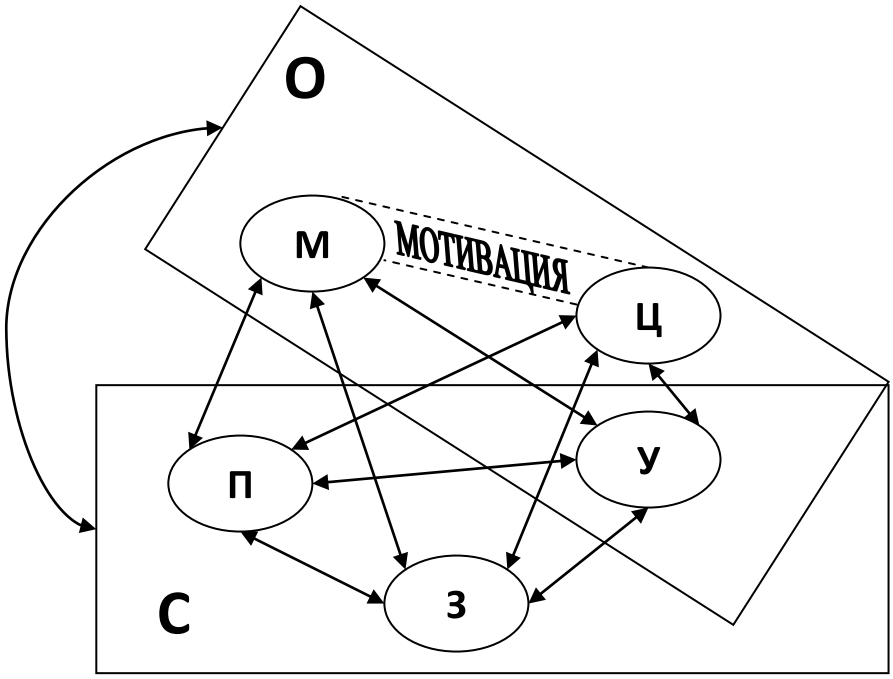
У – ученик (обучаем) ;

З – знания, умения, навици, методи на научно познание, убеждения и норми на поведение, методическата система на обучение;

М – мотив;

Ц – цел.

В (Ivanov, 2009) е изследвана ролята на компонентата П за решаване проблемите на мотивацията в обучението по математика.



Фиг.1. Обектно-субектен модел на мотивацията

В предлаганата сега разработка се спираме само на компонента (З) и свързаните с нея вътрешни мотиви. Става дума за такива мотиви, които сравнително рядко се използват от учителите, а именно мотивите, свързани с решаване вътрешните проблеми на математиката. Тези мотиви са действени и убедителни повече за ученици с подчертан интерес към математиката, изучавана на второ равнище. Ето защо си поставяме за цел да създадем и изучим с учениците от 12 клас една система от учебни задачи, водеща до обогатяване на упражненията за приложение на темата "Непрекъснатост на функция" (Математика за 12 клас, второ равнище).

Мотивацията, породена от тези мотиви и поставената цел може да се конкретизира и за прецизиране теорията на по-рано изучени теми или решаване на задачи с евристичен характер.

В учебниците по математика за 12 клас в края на темата за непрекъснатост на функция се формулира декларативно теоремата на Болцано за непрекъсната в краен и затворен интервал функция.Тази теорема и темата за непрекъснатост като цяло не се "експлоатира" пълноценно, както в теоретичен, така и в практико-приложен смисъл.

За реализирането на мотивацията, за която говорим, предлагаме следващата по-долу система от задачи за упражнение.

1. Нека функцията $y = f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал $(a;b)$ (или $(-\infty;+\infty)$). Ако $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = l_1 \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l_1 \right)$, $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = l_2 \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l_2 \right)$ и $l_1 l_2 < 0$, то $\exists x_0 \in (a;b)$ $(x_0 \in (-\infty;+\infty))$, за което $f(x_0) = 0$ (l_1 и l_2 могат да бъдат и някои от символите $+\infty$ или $-\infty$, но така, че $l_1 l_2 < 0$).

2. Нека за уравнението $f(x) = \varphi(x)$, разглеждано в даден интервал, функциите $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ са непрекъснати и едната от тях е растяща, другата е намаляваща или едната функция е монотонна, а другата е const. Тогава, ако уравнението има корен, то той е точно един в разглеждания интервал.

3. Ако една функция $y = f(x)$ е непрекъсната в даден интервал (затворен или отворен, краен или безкраен) и не се анулира за никоя стойност на x от този интервал, тя е с постоянен знак за всяко x от интервала.

4. Нека $a \in R, n \in N, n \geq 2$. Да се докаже, че в множеството на реалните числа ($x \in R$) уравнението $x^n = a$:

а) при $n = 2k+1$ $(k \in N)$ за $\forall a \in R$ винаги притежава и то само един корен x_0, имащ знака на a (при $a = 0, x_0 = 0$). Единственият корен x_0 се означава $\sqrt[2k+1]{a}$, т.е. $\sqrt[2k+1]{a} = x_0 \Leftrightarrow x_0^{2k+1} = a$ за $\forall a \in R$;

б) при $n = 2k$ $(k \in N)$ има корен x_0 само при $a \geq 0$. Съществуващият корен при $a = 0$ е единствен и той е $x_0 = 0$, при $a > 0$ корените са само двойка противоположни числа $x_1 = x_0 > 0$ и $x_2 = -x_0 < 0$. При $a \geq 0$ единственият неотрицателен корен (x_0) се означава с $\sqrt[2k]{a}$, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt[2k]{a} = x_0 \\ a \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_0 \geq 0 \\ x_0^{2k} = a \geq 0 \end{array} \right., k \in N.$$

5. Нека $a > 0, a \neq 1, b \in R$. Да се докаже, че в множеството на реалните числа уравнението $a^x = b$:

а) при $b \leq 0$ няма (реални) корени;

б) при $b > 0$ има единствен корен x_0. Този единствен корен x_0 се означава $\log_a b$, т.е. $\log_a b = x_0 \Leftrightarrow a^{x_0} = b$ $(b > 0, a > 0, a \neq 1)$.

Решение: $D_x : \forall x \in (-\infty;+\infty) = R$

а) при $b \le 0$ уравнението няма решение, защото за лявата му страна за $\forall x \in R$ е вярно, че $a^x > 0$, поради което равенството $a^x = b$ е невъзможно.

б) $b > 0$. Нека приемем, че $a > 1$ и за $x \in (-\infty;+\infty)$ разглеждаме функцията $f(x) = a^x - b$.

Намираме, че

$$l_1 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (a^x - b) = -b < 0,$$

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (a^x - b) = +\infty > 0.$$

Тъй като $f(x) = a^x - b$ е непрекъсната за $\forall x \in R$ и $l_1 l_2 < 0$, то съгласно задача 1, $\exists x_0 \in (-\infty;+\infty)$, за което $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow a^{x_0} - b = 0 \Leftrightarrow a^{x_0} = b$.

Функцията $f(x) = a^x - b$, освен непрекъсната, е и растяща за $\forall x \in R$. Тогава съгласно задача 2, за уравнението $f(x) = 0 \Leftrightarrow a^x - b = 0 \Leftrightarrow a^x = b$, съществуващият корен x_0 е единствен корен.

Доказателството е аналогично и за $0 < a < 1$.

При $a > 0$ и $a \ne 1$, $b > 0$ единственото число x_0, за което $a^{x_0} = b$ се означава с $\log_a b$, т.е. $\log_a b = x_0 \Leftrightarrow a^{x_0} = b\ (a > 0, a \ne 1, b > 0)$.

6. Да се решат следващите уравнения и неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3x + 1, a < 3$

б) $a^x + b^x = (a+b)^x, a > 0, b > 0$

Решение:

$$a^x + b^x = (a+b)^x \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+b}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b}\right)^x = 1.$$

Тъй като $0 < \dfrac{a}{a+b} < 1$ и $0 < \dfrac{b}{a+b} < 1$, то $f(x) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^x + \left(\dfrac{b}{a+b}\right)^x$ е намаляваща функция в $D_x = R$, $\varphi(x) = 1 = const$. Функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ са непрекъснати в R. Чрез проверка установяваме, че $x = 1$ е корен. Съгласно зад. 2, числото $x = 1$ е единствен корен на уравнението.

в) $2^x + \log_2 x = 5$

г) $\log_2 x = 3 - x$

д) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} \le \sqrt[3]{x-1}$

е) $\log_2 (x-1) \le 2^{3-x}$

ж) $(4^x - 1)(4^x + 2)(4^x + 4)(4^x + 1) \ge 72$

з) $4^x + \dfrac{9.2^x}{\left(2^x + 3\right)^2} \geq \dfrac{25}{16}$.

7. Да се докаже, че ако за квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ е вярно неравенството $c(a+b+c) \leq 0$, то уравнението има реални корени.

8. Докажете, че:

а) ако функцията $y = f(x)$ е непрекъсната и ограничена в R, то уравнението $f(x) = x$ има корен;

б) за всяка реална стойност на параметъра a уравнението $\cos ax + a^2 \cos x = (1+a^2)x - a^2 - 1$ има корен;

9. Докажете, че уравненията

а) $x^3 + 5x - a = 0$ и б) $2^x + \log_2 x + x^2 - a^2 = 0$

I. Имат за всяка реална стойност на параметъра a точно един корен;

II. В какви граници трябва да се изменя параметъра a така, че единственият корен на уравненията от а) и б) да принадлежи на интервала $(0;4)$.

III. За конкретна от намерените стойности на a във II съставете конкретни уравнения от а) и б) и ги решете.

10. Да се докаже, че за $\forall n \in N$ уравнението $x^3 - 2nx + n = 0$ има три различни реални корена. Ако a_n е средният по големина от корените, да се докаже, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и да се намери границата й.

11. За числата $a \in R, b \in R$ и $c \in R$ е известно, че за $\forall x > 1$ е в сила тъждеството $2.x^{a+3} + 3.x^{2a+b} - c = 0$. Да се намери числото c.

Единственото важно свойство, което отличава реалните числа от рационалните, е принципът за непрекъснатост, който постулира, че в множеството R на реалните числа няма “празнини”, т.е. че R е един континиум (същност, която никъде не се къса). Този принцип не се среща в училище, ето защо при разглеждане на някои теми и практически приложения остават логически непълноти. Тези логически празнини могат да се отстранят, използвайки свойствата на непрекъснатите функции, по-точно теоремата на Болцано, като едно твърде важно приложение на принципа за непрекъснатост. Чрез предлаганата разработка правим един малък принос в това отношение.

Чрез задача 1 обобщаваме знанията на учениците за известната им теорема на Болцано.

Теоремите за съществуване на корен n-ти и логаритъм в училище не се доказват. Тези теореми се основават на принципа за непрекъснатост, по-точно на теоремата на Болцано. Чрез задача 1 лесно се решават съответните задачи (теореми) 4 и 5.

Приложението на метода на интервалите от учениците става законно след решаване задачи 2 и 3.

Практическата значимост на теоретичните знания за непрекъснатите функции се обогатяват чрез приложенията в задачите от 6 до 11, които илюстрират вътрешно-предметното значение на непрекъснатите функции.

ЛИТЕРАТУРА

IVANOV, I. (2009) Motivation – condition and purpose of the mathematics education. *Proceedings of the international conference „Dedicated to the 105th annyversary of the birth of tje pioners of computing John Atanasoff and John von Neumann"* Shumen: Konstantin Preslavsky University Press, pp. 121–125.

MOTIVATION FOR THE APPLICATION OF "CONTINUITY OF FUNCTIONS" IN THE 12TH GRADE, LEVEL TWO

Ivan S. Ivanov

ABSTRACT

A system of mathematical problems, studied at school, is presented in relation to the theme "Continuity of Functions" in the 12th grade, level two.

The system serves as a motivation for the studying of the theme, revealing the importance of uninterrupted functions in the further improvement of the theoretical knowledge of earlier studied themes and previous solving of problems of a more general and heuristic character.

Keywords: motive (motivation), continuity of function.

Ivan S. Ivanov
Konstantin Preslavski University of Shumen
115 Universitetska Str., Shumen 9712
ivan.stef.ivanov@gmail.com