МЕТОДИЧЕСКИЕ ШТРИХИ КУРСА АЛГЕБРЫ В ШКОЛЕ ИМЕНИ А. Н. КОЛМОГОРОВА

Ю. П. Николаев, А. А. Русаков

АННОТАЦИЯ

Эта статья – знакомство с элементами компьютерной алгебры. Здесь приведена блок-схема конструктивного определения алгебраического кольца с конечным носителем, которую можно довести до программы на языках программирования высокого уровня (например, Pascal или C++). Даны постановки задач для научно-исследовательских проектов по информатике в школе.

Ключевые слова: алгебра, кольцо, математика, информатика, специализированное образование, методическая траектория.

В современных условиях, когда страна держит курс на инновационную экономику, необходимы качественно подготовленные специалисты, впитывающие знания студенты, мотивированные и профессионально сориентированные школьники и абитуриенты. Ярким примером потребности страны в талантливых молодых ученых является создание так называемой “Кремниевой долины” под руководством Ж. И. Алферова. В российской школе эти функции берет на себя, уже набравшая опыт и силу, система профильного образования, содержащая в себе классы углубленного изучения предметов, специализированные школы, а также центры дополнительного образования.

Инициатива Президента России “Одарённые дети” поставила органы управления образованием и педагогическую общественность в условия активизации работы с талантливой одаренной молодёжью. В своём интервью министр образования и науки РФ А .А. Фурсенко напомнил, что в России действует четыре наиболее известных школы-интерната для одаренных детей – это школы при Московском им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском, Новосибирском и Уральском государственных университетах. “Такие школы должны быть, по крайней мере, в каждом федеральном университете”,– заявил министр. (Газета “Поиск” № 18/ 30.04.2010)

Созданный в 1963 году отцами-основателями академиками Исааком Константиновичем Кикоиным и Андреем Николаевичем Колмогоровым, два года назад СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова отметил своё 45-летие. Одна из задач профильной школы – пропедевтика знаний учащихся и их мотивация к образованию, прежде всего тех школьников, которые легко справляются с общеобразовательным курсом математики и информатики школьной программы “на отлично”. Для достижения этой цели предлагается ввести новые понятия, которые так или иначе иллюстрируют (дают новые примеры) элементы курса высшей математики. В профильной старшей школе необходимы абстрактные понятия. Причем они должны вводиться на основе абстрактных структур, которые не сразу следуют из обыденного жизненного опыта или численного эксперимента.

Введение в содержание авторских элективных курсов элементов абстракции не ставит целью полностью изучить некоторые главы из области высшей математики. Это больше методическое орудие, которое заставляет в процессе осмысления абстрактной структуры увидеть схожие элементы и новые нюансы уже знакомых “программных” понятий, знаний и теорий.

Приведем, к примеру, учебный план одногодичного потока СУНЦ МГУ (для школьников, которые обучаются только один год в школе – 11 класс) за 2005-2006 учебный год и программу элективного курса алгебры.

Предмет		1 четв.	2 четв.	3 четв.	4 четв.
1.	Математический анализ.	3 часа в неделю	3 часа в неделю	3 часа в неделю	3 часа в неделю **Экзамен**
2.	Алгебра.	3 часа в неделю	3 часа в неделю **Экзамен**	0 часов	0 часов
3.	Геометрия.	0 часов	0 часов	3 часа в неделю	3 часа в неделю **Экзамен устно**
4.	Алгебраические задачи.	2 часа в неделю	2 часа в неделю	2 часа в неделю	2 часа в неделю
5.	Геометрические задачи.	2 часа в неделю	2 часа в неделю	2 часа в неделю	2 часа в неделю
6.	Элементарная математика.	1 час в неделю	1 час в неделю	1 час в неделю	1 час в неделю

ПРОГРАММА КУРСА АЛГЕБРЫ

Алгебра высказываний. Высказывательная форма, переменные. Логические операции. Кванторы. Алгебра подмножеств данного множества. Прямое произведение множеств. Функция, отображение множества A в B. Композиция отображений.

Конечное, бесконечное множество. Эквивалентность и счетность множеств. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества [0;1]. Существование трансцендентных чисел. Основные принципы комбинаторики. Элементы комбинаторики конечных множеств.

Натуральные числа. Аксиомы Пеано. Принцип математической индукции. Понятие кольца. Основные свойства колец. Понятие поля. Построение кольца целых чисел.

Делимость с остатком и без остатка. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Основная лемма арифметики. Линейное представление наибольшего общего делителя. Решение уравнений в целых числах.

Сравнения по модулю. Кольца и поля вычетов. Функция Эйлера и ее свойства. Теоремы Ферма, Эйлера, и Вильсона. Китайская теорема об остатках .

Кольцо многочленов. Деление с остатком многочленов. Теорема о делении с остатком для многочленов. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя.

Теорема Безу и теорема о числе корней многочлена. Применения основной теоремы алгебры. Разложение многочлена на линейные и квадратичные множители над полем действительных чисел. Теорема Виета.

На примере одной задачи попытаемся познакомить вас с введением в школу понятия алгебраической структуры – кольца. Из опыта ученик старшей школы может привести следующие примеры колец – множество целых, рациональных, действительных чисел (некоторые уже успевают узнать множество комплексных чисел). Мы предлагаем на примере конструктивного построения кольца, носителем которого является конечное множество, решить некоторые задачи обучения информатике и математике в школе:

- ✓ умение и навыки работы с новыми понятиями;
- ✓ мотивация к научно-исследовательской деятельности школьников;
- ✓ пропедевтика ВУЗовской математики и др.

Постановка задачи

Следуя традициям преподавания алгебры в ФМШ № 18, заложенными ещё такими преподавателями как А. Н. Колмогоров, А. А. Шершевский, А. Н. Земляков и др., под кольцом мы понимаем непустое множество K, на котором заданы две абстрактные бинарные алгебраические операции $+$ (“сложение”) и $\cdot$ (“умножение”), удовлетворяющие следующим аксиомам.

А1. $\forall a,b\in \boldsymbol{K}:\ \ a+b=b+a$.

А2. $\forall a,b,c\in \boldsymbol{K}:\ \ (a+b)+c=a+(b+c)$.

А3. $\exists\ 0\in \boldsymbol{K}(\text{нейтральный элемент}):\forall a\in \boldsymbol{K}:\ \ a+0=a$.

А4.
$\forall a\in \boldsymbol{K}\ \exists\ (-a)\in \boldsymbol{K}\ (\text{противоположный элемент}):\ \ a+(-a)=0$

А5. $\forall a,b\in \boldsymbol{K}:\ \ a\cdot b=a\cdot b$.

А6. $\forall a,b,c\in \boldsymbol{K}:\ \ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

А7. $\forall a,b,c\in \boldsymbol{K}:\ \ c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$.

Иначе говоря, $\boldsymbol{K}=(K,+,\cdot)$ – ассоциативное, коммутативное кольцо. Множество K называется носителем кольца $(K,+,\cdot)$ (ЗЕМЛЯКОВ, 2000).

Задача. Найти все кольца, носителем которых является двухэлементное множество $K=\{0;1\}$ (трёхэлементное множество $K=\{0;1;2\}$).

В процессе решения этой задачи на семинарах рассматриваются некоторые свойства абстрактных колец.

Свойство 1. $\forall x\in \boldsymbol{K}$ выполнено: $-(-x)=x$ (т.е. противоположный к противоположному элементу есть сам данный элемент).

Свойство 2. $\forall x,y\in \boldsymbol{K}$ выполнено: $(-x)y=-(xy)$ (т.е. результат “умножения” противоположного элементу x на элемент y есть элемент, противоположный “произведению” xy).

Свойство 3. $\forall x,y\in \boldsymbol{K}$ выполнено: $(-x)\cdot(-y)=xy$ (т.е. результат “умножения” противоположного элементу x на противоположный элементу y есть элемент, равный “произведению” xy).

Свойство 4. $\forall x\in \boldsymbol{K}$ выполнено: $x\cdot 0=0\cdot x=0$ (“умножение” на нейтральный элемент всегда даёт в результате нейтральный элемент).

Для решения **Задачи** нам потребуется результат **Свойства 4**.

Лемма. $\forall x \in \boldsymbol{K}$ выполнено: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Доказательство Леммы.

1. $a \cdot 0 = a \cdot (0+0)$ – в силу определения нейтрального элемента в кольце.
2. $a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ – в силу дистрибутивности в кольце.
3. Получили, что $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Добавим к обеим частям равенства элемент $-(a \cdot 0)$ противоположный к $(a \cdot 0)$, который существует в кольце по аксиоме A4.
4. Получим $a \cdot 0 + \left(-(a \cdot 0)\right) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + \left(-(a \cdot 0)\right)$. Откуда по определению противоположного элемента $0 = a \cdot 0$.

Для умножения на нейтральный элемент справа в силу коммутативности операции умножения доказательство не требуется, но в виде закрепления и тренировки можно попросить учащихся доказать это, не используя коммутативность операции “умножение”.

Лемма доказана.

Рассмотрим множество $K = \{0;1\}$. Выберем элемент, который будет нейтральным в кольце. Пусть это будет 0. Тогда пользуясь Результатами леммы, начнем строить табличку для операции “умножение”:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \end{array}$$

Осталась незаполненной всего одна клетка: результат операции “умножение” $1 \cdot 1$, для которого есть две возможности 0 или 1.

Рассмотрим случай, когда результат операции $1 \cdot 1 = 1$. Тогда, учитывая, что нейтральным элементом является 0, получаем две таблички для операции “сложение”:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array},$$

которые также отличаются значением операции на элементах 1 и 1 ($1+1$). Однако первая «табличка-операция» не является кандидатом на операцию “сложение” в кольце (не удовлетворяет аксиоме A4), т.к. элемент 1 не имеет противоположного, при таком задании операции. Таким образом, получилось задать одну структуру кольца с операциями:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Аналогично рассматривается второй случай, когда результат операции “умножение” $1\cdot 1=0$. Пользуясь теми же соображениями, получаем ещё одну структуру кольца:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}.$$

Итак, в предположении, что нейтральным элементом является 0, мы получили два кольца на заданном множестве. Действуя аналогичным образом, мы сможем получить ещё два кольца, рассмотрев предположение, что нейтральный элемент 1. Последнее утверждение легко доказать, просто заменив в полученных структурах 0 на 1 и 1 на 0.

Ответом задачи является число 4. На заданном носителе можно построить 4 кольца. (Следует отметить, что, с точностью до изоморфизма, колец с данным носителем 2, однако, понятие морфизма в курсе алгебры одногодичного потока СУНЦ МГУ не рассматривается.) (РУСАКОВ, 2006)

Хотелось отметить воспитательную роль этой задачи. Её постановка уже ставит в тупик даже образованного матшкольника, иначе говоря, не зависимо от уровня подготовленности, образованности при решении этой задачи все попадают в равные условия. Однако процесс решения задачи иллюстрирует и призывает задуматься над такими человеческими качествами, как смелость, целеустремленность, настойчивость.

Никто из нас, преподавателей, не ожидает, что сформулированная **Задача** будет решена в полном объеме с первого раза (за неделю). Мы занимаемся ею в течение месяца, который отводится на изучение колец, их свойств и некоторых задач из накопленного дидактического материала (РУСАКОВ, 2006; GROZDEV, 2007). Работа над этой задачей позволяет достигнуть несколько целей:

- ✓ напомнить способы задания отображений (операция-табличка);
- ✓ сделать очередное вкрапление изучения элементов комбинаторики (количество операций, коммутативных операции на *n*-элементном множестве), которая не выделяется отдельной темой в программе курса алгебры в силу ограниченности времени;
- ✓ приобрести и закрепить навыки работы с аксиомами;
- ✓ дифференцировать учащихся по уровню подготовленности, обучаемости, склонности и интересам в различных областях естественнонаучного знания.

Всё это позволяет спроектировать для каждого учащегося индивидуальную траекторию дальнейшего обучения в одногодичном потоке. С 1 октября в школе на постоянной основе начинают работу различные факультативы, спецкурсы, кружки и спецсеминары. С учетом выявляемых склонностей и желаний происходит профилизация школьников, начиная с аннотации программ факультативов и спецкурсов, знакомство с тематикой научно-исследовательских проектов, рекомендации к участию в олимпиадах и математических соревнованиях, а по завершению обучения выбором ВУЗа (факультета).

ЛИТЕРАТУРА

ЗЕМЛЯКОВ, А. Н. (2000) Тезисы по алгебре. *Математическое образование*, 4 (15), с. 2–40.

НИКОЛАЕВ, Ю. П. (2008) Проблемы методики преподавания в профильной школе-интернат. *Информационные технологии в образовании: Материалы Международной научно-практической конференции “Информационные технологии в образовании” (“ИТО-Сибирь-2008”)*, Томск.

РУСАКОВ, А. А. (2006) *Проектирование методической системы обучения математически, творчески одаренных детей на основе реализации идей А. Н. Колмогорова*. Москва: Докторская диссертация.

GROZDEV, S. (2007) *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, pp. 1–295.

Николаев, Ю. П.
СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: jmoor@mail.ru

Русаков, А. А.
профессор, доктор педагогических наук
заведующий кафедрой высшей математики
МГГУ им. М. А. Шолохова
e-mail: arusakov@space.ru

METHODOLOGY FEATURES OF ALGEBRA COURSE AT KOLMOGOROV COLLEGE (AESC MSU)

Yu. P. Nikolaev, A. A. Rusakov

ABSTRACT

The article is about the knowledge of computer algebra elements. The bookkeeping scheme of algebraic ring with finite support definition is performed. This scheme can be finished up to a high level programming language (for example Pascal or C++) program. Statement of tasks for Computer science research in school is given.

Key words: algebra, ring, mathematics, computer science, specialized education, methodological trajectory.

Nikolaev, Yu. P.
Lomonosov Moscow State University
Advanced Education Science Center
e-mail: jmoor@mail.ru

Rusakov, A. A.
Professor, Doctor of Sciences
Head of the Higher Mathematics Chair
Sholokhov Moscow State University for Humanities
e-mail: arusakov@space.ru