ТРАДИЦИИ И ТЕХНОЛОГИИ – СВЯТ НА ИДЕИ ЗА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Елена Ап. Върбанова

РЕЗЮМЕ

В статията е представен дългогодишният опит на автора в проектиране и реализиране на смесено обучение (Blended Learning) по Математически анализ на функции на една променлива. В основата на това обучение е комбинирана методика, която съчетава богатството от традиционни подходи с нови подходи, използващи технологично богати среди. За разработените със система за компютърна алгебра (СКА) дейности, конкретната СКА не е определящ елемент, т.е. методиката е инвариантна относно СКА. Традиционната българска методика на обучението по математика позволява компетентно интегриране на технологии и тогава се превръща в модерна традиционна методика.

Ключови думи: традиции, технологии, смесено обучение, математически анализ, системи за компютърна алгебра (СКА), системи за електронно обучение.

Използването на информационни и комуникационни технологии в развитието на съвременните образователни технологии е неизбежно и желано, тъй като поставя обучаемите в естествена за тях технологична учебна среда. Чрез технологиите може да се повишава ефективността на обучението по Математика и да се засилва интересът към математическите знания и техни приложения.

Според някои древни философски учения съчетанието ***„цел, тетива и стрела”*** е важно за всяка дейност. В обучението то би могло да се тълкува така: знанията и уменията на студента – като образователна цел; учебната среда и инструментариумът – като тетива; методиката на обучение – като стрела. В това триединство преподавателят „изработва и изпраща” стрелата в набелязаната цел, използвайки съответно подбрана тетива.

В обучението по Математически анализ – I (MA-I) в Техническия Университет – София, спец. Приложна математика, през последните години се прилага комбинирана методика, в която са интегрирани подходящи технологии за осъществяване на определени цели и задачи в процеса преподаване-учене-оценяване (ПУО). Основното внимание е насочено върху проектиране и реализиране на т.нар. смесено обучение (blended learning). Последователно във времето се премина през следните етапи:

- Лекции с използване на СКА
- Компютърно подпомогнати упражнения
- Курсови работи с използване на СКА
- Изпитни въпроси с използване на СКА
- Лекции (с използване на СКА) на хартиен носител
- Смесено обучение (с използване на софтуерна платформа и на СКА)

На всеки един етап стояха предизвикателни въпроси:

- Да иновираме или да имитираме традиционния процес ПУО?
- Как да изградим динамично и хармонично единство между образователните традиции и възможностите на технологично богати среди за обучение?
- В какво да се състои обучението при електронното/смесеното обучение?

Отговорът им бе един: каквито, колкото, когато и както и да се правят технологично базирани нововъведения, не бива традиционната методика да се „претопява” и да се заменя с псевдометодики „в името на технологиите”.

Наред с основните дидактически принципи при изграждане на учебно съдържание, бяха взети под внимание и следните ключови мисли:
„Изглежда математиката по-малко от всяко друго знание може да се идентифицира с текстовете и понятията, с помощта на които се представя; тя е нещо, което стои по-дълбоко от тях. Ето защо е нужно изучаването на различни изложения по едни и същи въпроси” - проф. дмн Иван Проданов

„При изучаване на една наука примерите могат да бъдат толкова поучителни, колкото теорията” – Исак Нютон

„Въображението е по-важно от знанието” – Алберт Айнщайн

ИНТЕГРИРАНЕ НА ДЕЙНОСТИ СЪС СИСТЕМА ЗА КОМПЮТЪРНА АЛГЕБРА

Тук са представени някои приложения на система за компютърна алгебра (СКА Derive) в обучението по МА-I, които илюстрират един подход за обогатяване на съществуваща идея, за улесняване решаването на задачи, за осъществяване на допълнителни учебни дейности, за подпомагане на студента да изгражда навик за ефективна работа.

1. Решаване на уравнения, съдържащи обратни тригонометрични функции - с традиционен подход и с използване на СКА (Фиг. 1).

Интерактивното обучение заема основно място при използване на компютърна алгебра (КА), а ключова предпоставка за неговата ефективност е рефлексията. В случая става дума за рефлексията като диалог, т.е. за комуникативна рефлексия и кооперативна рефлексия, както и за интелектуален тип рефлексия, каквато е рефлексията в обучението. При този тип задачи задължително трябва да бъде поставен въпроса за броя на корените, а оттук - за допустимите стойности/дефиниционното множество, както и за монотонността на функцията (например с начертаване графиката на първата ú производна) при графичното решение.

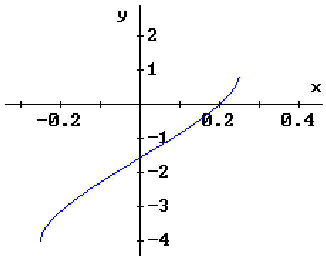
#8: $\mathrm{ASIN}(3\cdot x) = \mathrm{ACOS}(4\cdot x)$

#9: $\mathrm{SOLVE}(\mathrm{ASIN}(3\cdot x) = \mathrm{ACOS}(4\cdot x),\ x,\ \mathrm{Real})$

#10: $x = \dfrac{1}{5}$

#11: $x = 0.2$

#12: $\mathrm{ASIN}(3\cdot x) - \mathrm{ACOS}(4\cdot x)$



Фиг. 1. Аналитично и графично решаване на уравнение

2. „Доказателство” на /проверка верността на/ формула с КА

#16: $\mathrm{SINH}(2\cdot x) = 2\cdot \mathrm{SINH}(x)\cdot \mathrm{COSH}(x)$

#17: $\mathrm{SINH}(2\cdot x) = 2\cdot\left(\dfrac{\hat{e}^{x}}{2} - \dfrac{\hat{e}^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\hat{e}^{x}}{2} + \dfrac{\hat{e}^{-x}}{2}\right)$

#18: $\mathrm{SINH}(2\cdot x) = 2\cdot\left(\dfrac{\hat{e}^{2\cdot x}}{4} - \dfrac{\hat{e}^{-2\cdot x}}{4}\right)$

#19: $\mathrm{SINH}(2\cdot x) = \dfrac{\hat{e}^{2\cdot x} - \hat{e}^{-2\cdot x}}{2}$

Фиг. 2. Доказателство със КА

С помощта на КА тук може изцяло да се имитира/да се наподобява, следва/ традиционният подход: СКА служат и за справочници – най-напред двете функции в дясната страна се заместват с техните дефиниционни изрази и след това се извършва умножаване и опростяване. По този начин се затвърдява старото умение за извършване на доказателства и се придобива ново – доказване с КА.

3. Намиране на обратна функция.

Задача: Да се намери обратната функция на тангенс хиперболичен: $y=\operatorname{th} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, $x\in(-\infty,\infty)$. Да се определи дефиниционното ú множество и да се начертаят графиките на двете функции на една и съща координатна система. Да се направи коментар върху тяхната ограниченост и монотонност.

Всички традиционни стъпки, необходими за извеждане на търсената обратна функция, могат да се извършат със СКА (разбира се, може да се използва наготово вградената обратна функция). Въз основа на графиките може да се отговори на другите поставени в задачата въпроси. В случая се развива и картинното мислене, което улеснява по-трайното усвояване на свойствата на двете функции и функционалното различие между графиките им.

4. Аналогично на т. 3, с КА последователно могат да се извършват всички стъпки при прилагане теоремите на Лопитал. По-долу е приложен Derive-протокол на изпълнението им за търсената граница.

Да се намери границата:

#1: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\mathrm{LN}(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

#2: $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{\mathrm{LN}(x)}=\pm\infty$

#3: $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\pm\infty$

Следователно, имаме неопределена форма от вида $[\infty-\infty]$. Привеждаме израза под общ знаменател:

#4: $\lim_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{LN}(x)-x+1}{(1-x)\cdot\mathrm{LN}(x)}$

Формата в #4 е от вида [0/0] и можем да приложим първото правило на Лопитал:

#5: $\lim_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{d}{dx}(\mathrm{LN}(x)-x+1)}{\dfrac{d}{dx}((1-x)\cdot\mathrm{LN}(x))}$

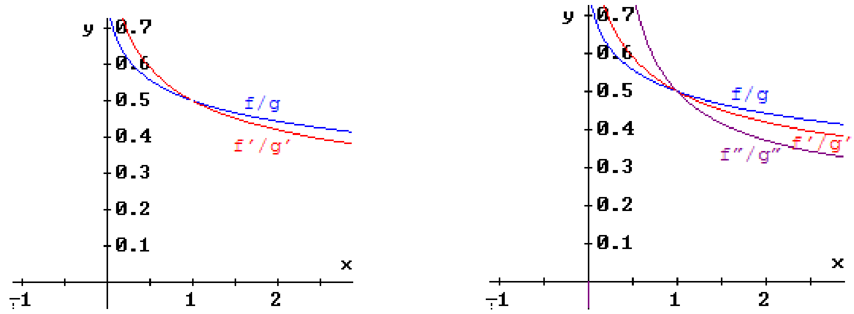
#6: $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\cdot\mathrm{LN}(x)+x-1}$

Отново се получи същата неопределена форма, затова отново прилагаме правилото:

#7: $\lim_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{d}{dx}(x-1)}{\dfrac{d}{dx}(x\cdot\mathrm{LN}(x)+x-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{\mathrm{LN}(x)+2}=\dfrac{1}{2}$

Фиг. 3. Търсене на граница на неопределена форма

И тук технологията може да бъде полезна за онагледяване на последователните „състояния на неопределеност” на частното на две функции (Фиг. 4).



Фиг. 4. Илюстрация към решението на задачата в т. 4

Технологиите дават възможност да се разгледат за кратко време различни случаи на граници на частно на две функции. Но те не могат да обобщават! И тук е необходим традиционният подход: да се разграничат случаите и да се наблегне, че условието в теоремата на Лопитал е достатъчно, но не е необходимо. Схематичното представяне (Фиг. 5) на смисъла на теоремата:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$		$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
$\exists$	$\Leftarrow$	$\exists$
$\exists$	$\Rightarrow$	?
?	$\Leftarrow$	не $\exists$
не $\exists$	$\Rightarrow$	не $\exists$

Фиг. 5. Схематично представяне на теоремата на Лопитал

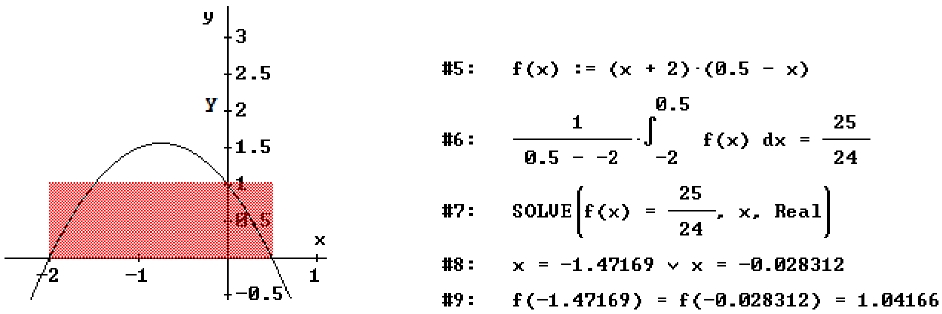
ще приучи обучаемия да различава случаите. А това е съществено за неговото умствено израстване, защото: „Погрешните мисли на човека произтичат от несъвършенство на способността му за различаване." (Парамаханса Йогананда)

5. Теорема за средните стойности – теория и практика

Теоремата: Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, то съществува поне една точка $\bar{x} \in [a,b]$, в която функцията е равна на средната си стойност в този интервал, т.е.

(4.16) $$\mu = f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ , където } \bar{x} \in [a,b].$$

Графичната илюстрация на Фиг. 6 представя по-ясно смисъла на теоремата: съществува правоъгълник с основа с дължина $(b-a)$ и височина $\mu = f(\bar{x})$, чието лице е равно на лицето на криволинейния трапец, образуван от кривата $y = f(x)$. За функцията $f(x) = (x+2)(0.5-x)$ на Фиг. 6 съществуват две точки $\bar{x}_1 = -1.47169$, $\bar{x}_2 = -0.028312$ с желаното свойство и средната ѝ стойност в интеграционния интервал $[-2; 0.5]$ е $\mu = f(\bar{x}_{1,2}) = 1.04166$, т.е. $\int_{-2}^{0.5} f(x)\,dx = (2.5)\cdot\mu = 2.604$.



Фиг. 6. Илюстрация на теоремата за средните стойности

По време на компютърно подпомогнати упражнения студентите решават аналогични задачи за по-сложни функции.

ТЕХНОЛОГИЧНО БАЗИРАН КУРС ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ – I

На всички образователни равнища днес се наблюдава едно типично явление: електронното обучение. То е отговор на потребността от тъй нар. гъвкаво обучение – достъпно от всяко място и по всяко време. Съвременните системи за електронно обучение навлязоха във второто десетилетие на своето развитие. Те се дефинират като системи за познавателна и социална дейност, базирани на информационни и комуникационни технологии. Електронното обучение включва доставяне, управление и провеждане на обучение. За целта се използват технологии като Интернет, мобилни технологии, интерактивна телевизия и др. Съществуват разработки на концептуални модели и практическа методология за проектиране на обучението.

Предимствата и недостатъците на електронното обучение са добре описани в различни източници. От гледна точка на спецификата на математиката и на обучението по математика, предимствата благоприятстват подобряването на учебния процес: осигурява се интерактивна връзка между преподаватели и обучаеми, от една страна, и знания, информация и услуги, от друга; обучаемият може да избира „траекторията"/пътя на своето обучение; може да се самообразова в удобно за него време и в собствен ритъм, да избира продължителността и скоростта на усвояване на материала. Самообразованието е аналог на самоорганизация (ключово понятие в синергетиката).
При компетентно разработено, структурирано и йерархично построено учебно съдържание, електронното обучение (което може да бъде синхронно и асинхронно) притежава потенциал за повишаване ефективността на обучението по математика. През последната година в ТУ-София бе направено проектиране и частична реализация на асинхронно електронно обучение по Математически анализ - I и предстои тестване в реален учебен процес. Като софтуерна платформа се използва системата с отворен код Moodle.

В заключение бих могла да кажа само „Аз все още се уча" (Франциско Гойя). Но също и бих задала въпроса: Дали не е време вместо "T^3 = Teachers Teaching with Technology" да се постави начало на "C^4 = Challenging Changes in Curricula and Courses" ("$П^4$ = Предизвикателни Промени в Планове и Програми")?

ЛИТЕРАТУРА

ВЪРБАНОВА, Е. А. (2009). *Математически анализ – I.* София: Изд. ТУ-София.

ГАНЧЕВ, И., НИНОВА Ю. & НИКОВА, В. (2002). *Методика на обучението по математика.* Благоевград: Изд. ЮЗУ.

КНЯЗЕВА, Е. Н. & КУРДЮМОВ, С. П. (2006). *Основания синергетики: Человек, конструирующий себя и свое будущее.* Москва: КомКнига.

МАРИНОВА, А. И. (2010). *Смесено обучение по Математически анализ – I с използване на виртуална учебна среда Moodle - Дипломна работа*. София: Изд. ТУ-София.

ШОЙКОВА, Е. Д. (2008). *Изследване и развитие на системи за електронно обучение - Дисертация*. София: Изд. ТУ-София.

GARRISON, D. R. & VAUGHAN, N. D. (2008). *Blended Learning in Higher Education*. San Francisco: Jossey-Bass.

GROZDEV, S. (2007) For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice), Sofia.

KUTZLER, B. & KOKOL-VOLJC, V. (2000) Introduction to Derive 5. The Mathematical Assistant for Your PC. Dallas: Texas Instruments.

WILD, I. (2009). *Moodle 1.9 Math.* Birmingham: Packt Publishing.

Благодарности: За автора е чест да изкаже своята дълбока благодарност към проф. дпн Иван Ганчев, проф. дпн Сава Гроздев и доц. д-р Марин Маринов за постоянната подкрепа, окуражаване и ценни професионални съвети.

TRADITION AND TECHNOLOGY – A WORLD OF IDEAS FOR MATHEMATICS EDUCATION

Elena A. Varbanova

ABSTRACT

Author’s long experience in design and implementation of blended learning of Calculus of one variable is presented. It is based on a methodology that combines the wealth of traditional approaches with new ones using technology-rich environments. For the activities developed with application of computer algebra system (CAS) the specific CAS itself is not decisive: the methodology is invariant with respect to CAS. Competent integration of information and communication technology into Bulgarian traditional methodology of mathematics education can make it modern traditional methodology.

Keywords: tradition, technology, blended learning, calculus, computer algebra systems, virtual learning environments.

Elena A. Varbanova
Faculty of Applied Mathematics and Informatics
Technical University of Sofia
8, Kliment Ohridski Blvd.
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: elvar@tu-sofia.bg