

ЕДИН НАЧИН ЗА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ, СВЪРЗАН С АФИННИ ОПЕРАЦИИ НА ВЕКТОРИ В РАВНИНАТА

Климент Василев

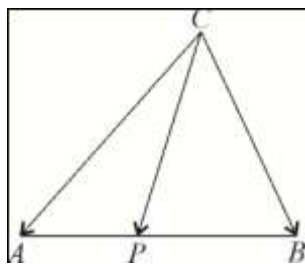
РЕЗЮМЕ

Разглежда се една задача за вектори, дадена в учебник по математика за XI клас, профилирана подготовка. Доказва се една теорема, с помощта на която задачата се решава по-лесно. За илюстрация с помощта на нея се дава доказателството на теоремата на Менелай и се изразява векторът ъглополовяща в триъгълник. Дава се подходящо упътване за доказателство на теоремата на Чева.

Ключови думи: вектор, триъгълник, ъглополовяща, Менелай, Чева.

Преди да започнем разглеждането на задачите, ще докажем една теорема, която ще ни бъде и лема.

Лема. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\overrightarrow{CP} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$, където точка P лежи в равнината на триъгълника. Необходимото и достатъчно условие $P \in AB$ е $\alpha + \beta = 1$.



Фиг. 1

Необходимост. Нека $\overrightarrow{AP} = \gamma \overrightarrow{AB}$. Тогава

$$\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA} = \gamma (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}), \quad \overrightarrow{CP} = (1 - \gamma) \overrightarrow{CA} + \gamma \overrightarrow{CB}.$$

От $\alpha = 1 - \gamma$ и $\beta = \gamma$ следва:

$$\alpha + \beta = 1 - \gamma + \gamma = 1.$$

Достатъчност. Нека $\overrightarrow{CP} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$, като $\alpha + \beta = 1$. От $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow$

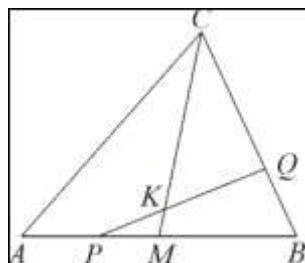
$$\alpha = 1 - \beta, \quad \overrightarrow{CP} = (1 - \beta)\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA} = \beta(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}), \quad \overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB}.$$

Тази лема ни позволява да въведем ново правило, което ще се използва при решаването на задачите. Формулираме го така:

Правило за $\triangle ABC$: Ако $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CP} = (1 - \alpha)\overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB}$.

Сега ще покажем как се решава задачата в цитирания учебник (стр. 317).

1. Точки P и Q делят съответно страните AB и BC на $\triangle ABC$ в отношение 1:2. Означаваме с K пресечната точка на правата PQ с медианата CM на страната AB . Намерете отношението, в което точката K дели медианата CM .



Фиг. 2

Решение: От $\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{1}{2}$ следва $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Нека $\overrightarrow{CK} = \rho\overrightarrow{CM}$,

$$\overrightarrow{PK} = \delta\overrightarrow{PQ}.$$

За $\triangle PQC$ прилагаме правилото

$$\overrightarrow{CK} = \delta\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{CK} = (1 - \delta)\overrightarrow{CP} + \delta\overrightarrow{CQ}.$$

За $\triangle ABC$ прилагаме правилото

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}.$$

За $\triangle ABC$ прилагаме правилото

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Остава да пресметнем $\overrightarrow{CQ}$:

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

Заместваме представянията за $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{CQ}$. Получаваме

$$\overrightarrow{CK} = \frac{2(1-\delta)}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1+\delta}{3}\overrightarrow{CB}.$$

От друга страна

$$\overrightarrow{CK} = \rho\overrightarrow{CM}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{\rho}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{\rho}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Понеже $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ образуват база в равнината, получаваме системата:

$$\begin{cases} \frac{2(1-\delta)}{3} = \frac{\rho}{2} \\ \frac{1+\delta}{3} = \frac{\rho}{2} \end{cases}.$$

Като решим системата относно ρ и δ , получаваме $\rho = \frac{8}{9}$, $\delta = \frac{1}{3} \Rightarrow$

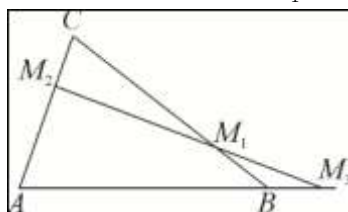
$$\overrightarrow{CK} = \frac{8}{9}\overrightarrow{CM},$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CM} - \frac{8}{9}\overrightarrow{CM} = \frac{1}{9}\overrightarrow{CM},$$

$$\frac{CK}{KM} = \frac{\frac{8}{9}|\overrightarrow{CM}|}{\frac{1}{9}|\overrightarrow{CM}|} = \frac{8}{1}.$$

Сега, ако се сравни с решението, дадено в учебника (стр. 317), ще се види колко по-кратко е това решение.

2. Теорема на Менелай. Нека точките M_1 , M_2 и M_3 лежат съответно на страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$, като $\alpha_1 = \frac{\overline{M_1B}}{\overline{M_1C}}$, $\alpha_2 = \frac{\overline{M_2C}}{\overline{M_2A}}$, $\alpha_3 = \frac{\overline{M_3A}}{\overline{M_3B}}$.



Фиг. 3

Необходимото и достатъчно условие точките M_1 , M_2 и M_3 да лежат на една права е $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$.

Преди да започнем доказателството, ще изразим векторите $\overrightarrow{CM_1}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{AM_3}$ и $\overrightarrow{CM_3}$ по подходящ начин.

$$\frac{\overrightarrow{M_1B}}{\overrightarrow{M_1C}} = \alpha_1 \Rightarrow \overrightarrow{M_1B} = \alpha_1 \overrightarrow{M_1C}, \quad \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM_1} = -\alpha_1 \overrightarrow{CM},$$

$$(1) \quad \overrightarrow{CM_1} = \frac{1}{1-\alpha_1} \overrightarrow{CB}.$$

По същия начин от $\frac{\overrightarrow{M_2C}}{\overrightarrow{M_2A}} = \alpha_2$ и $\frac{\overrightarrow{M_3A}}{\overrightarrow{M_3B}} = \alpha_3$ ще получим:

$$(2) \quad \overrightarrow{CM_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1} \overrightarrow{CA},$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AM_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - 1} \overrightarrow{AB}.$$

За $\triangle ABC$ прилагаме правилото. От $\overrightarrow{AM_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - 1} \overrightarrow{AB}$:

$$(4) \quad \overrightarrow{CM_3} = -\frac{1}{\alpha_3 - 1} \overrightarrow{CA} + \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - 1} \overrightarrow{CB}.$$

Необходимост: Понеже точките M_1 , M_2 и M_3 лежат на една права, имаме:

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \rho \overrightarrow{M_2M_1}.$$

За $\triangle M_2M_1C$ прилагаме правилото. От $\overrightarrow{M_2M_3} = \rho \overrightarrow{M_2M_1}$:

$$\overrightarrow{CM_3} = (1-\rho) \overrightarrow{CM_2} + \rho \overrightarrow{CM_1}.$$

Като заместим (1) и (2) в последното равенство получаваме:

$$\overrightarrow{CM_3} = \frac{(1-\rho)\alpha_2}{\alpha_2 - 1} \overrightarrow{CA} + \frac{\rho}{1-\alpha_1} \overrightarrow{CB}.$$

Като използваме представянето (4) за $\overrightarrow{CM_3}$ и последното равенство, ще получим системата:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{(1-\rho)\alpha_2}{\alpha_2 - 1} = -\frac{1}{\alpha_3 - 1} \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - 1} = \frac{\rho}{1-\alpha_1} \end{array} \right.$$

При фиксирани α_1 и α_2 , неизвестни са ρ и α_3 .

Изразяваме ρ от второто уравнение и заместваме в първото: $\rho = \frac{\alpha_3(1-\alpha_1)}{\alpha_3 - 1}$.

След преработка получаваме $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$.

Достатъчност: Нека $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$. Оттук $\alpha_3=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$. Заместваме α_3 в (4).

Получаваме:

$$\overrightarrow{CM_3} = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{CB}.$$

Но $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{CM_1} - \overrightarrow{CM_2} = \frac{1}{1-\alpha_1}\overrightarrow{CB} - \frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}\overrightarrow{CA}$. Използвами сме (1) и (2).

Остава да пресметнем $\overrightarrow{M_2M_3}$:

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{CM_3} - \overrightarrow{CM_2} = -\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{(\alpha_2-1)(1-\alpha_1\alpha_2)}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{CB}.$$

Използвами сме (2) и последното представяне за $\overrightarrow{CM_3}$.

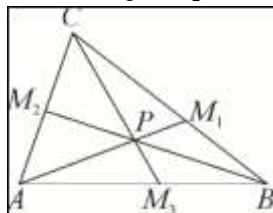
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_2M_3} &= -\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{(\alpha_2-1)(1-\alpha_1\alpha_2)}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{CB} = \\ &= \frac{(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1\alpha_2} \left[-\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{1-\alpha_1}\overrightarrow{CB} \right] = \\ &= \frac{(1-\alpha_1)}{1-\alpha_1\alpha_2}\overrightarrow{M_2M_1} \Rightarrow M_3 \in M_2M_1.\end{aligned}$$

3. Теорема на Чева. Даден е $\triangle ABC$. Нека точките M_1 , M_2 и M_3 лежат съответно на страните BC , CA и AB . Нека $\alpha_1 = \frac{\overline{M_1B}}{\overline{M_1C}}$, $\alpha_2 = \frac{\overline{M_2C}}{\overline{M_2A}}$,

$\alpha_3 = \frac{\overline{M_3A}}{\overline{M_3B}}$. Необходимото и достатъчно условие правите AM_1 , BM_2 и CM_3

да се пресичат в една точка или да са успоредни е $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-1$.

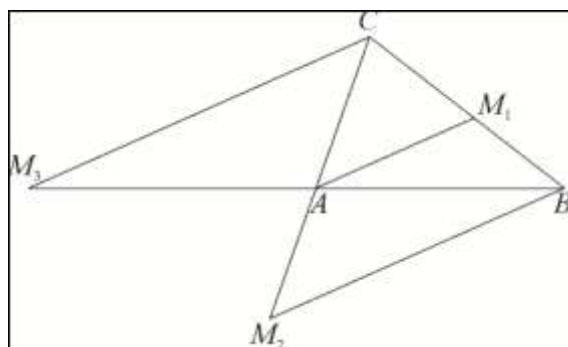
Упътване. а) Ако правите AM_1 , BM_2 и CM_3 се пресичат в точка P , положете $\overrightarrow{M_2P} = \rho\overrightarrow{M_2B}$, $\overrightarrow{AP} = \delta\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{CP} = \varepsilon\overrightarrow{CM_3}$ и използвайте лемата, като вземете предвид, че при фиксирани α_1 и α_2 , неизвестни са α_3 , ρ , δ и ε .



Фиг. 4

б) Ако правите AM_1 , BM_2 и CM_3 са успоредни, положете $\overrightarrow{BM_2} = \rho \overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{CM_3} = \delta \overrightarrow{AM_1}$. При фиксирано α_1 , неизвестни са α_2 , α_3 , ρ и δ .

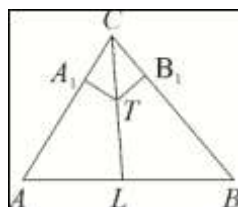
При доказателството на достатъчността използвайте, че $\alpha_3 = -\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}$.



Фиг. 5

Накрая ще използваме достатъчността на лемата, за да решим следната задача:

4. Даден е $\triangle ABC$. Нека CL е ъглополовяща за ъгъл ACB ($L \in AB$). Изразете $\overrightarrow{CL}$ чрез $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.



Фиг. 6

Решение: Нека $\overrightarrow{CA_1} = \frac{1}{|\overrightarrow{CA}|} \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{|\overrightarrow{CB}|} \overrightarrow{CB}$. Тогава $|\overrightarrow{CA_1}| = \frac{1}{|\overrightarrow{CA}|} |\overrightarrow{CA}| = 1$.

Аналогично $|\overrightarrow{CB_1}| = 1$.

Нека $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CB_1}$. Оттук следва, че $T \in CL$, защото четириъгълникът A_1TB_1C е ромб и диагоналите му са ъглополовящи.

Тогава $\overrightarrow{CL} = \rho \overrightarrow{CT} = \frac{\rho}{|\overrightarrow{CA}|} \overrightarrow{CA} + \frac{\rho}{|\overrightarrow{CB}|} \overrightarrow{CB}$. Като използваме достатъчността по

лемата, ще получим:

$$\frac{\rho}{|\overline{CA}|} \overline{CA} + \frac{\rho}{|\overline{CB}|} \overline{CB} = 1 \Rightarrow \rho = \frac{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|}{|\overline{CA}| + |\overline{CB}|}.$$

Следователно:

$$\overline{CL} = \frac{|\overline{CB}|}{|\overline{CA}| + |\overline{CB}|} \overline{CA} + \frac{|\overline{CA}|}{|\overline{CA}| + |\overline{CB}|} \overline{CB}.$$

Заклучителни бележки:

Така предложената теорема в началото показва как след въвеждането на база на вектори, в учебника за профилирана подготовка задачите могат да се решават по-кратко. От друга страна, като използваме координати на вектор, ние можем да изградим курс по аналитична геометрия в средното училище и да изведем уравнение на права.

ЛИТЕРАТУРА

PASKALEV, G. & PASKALEVA, Z., (2005) Mathematics for the 11th grade – specialized preparation, Sofia, Archimed, pp. 317-319 (in Bulgarian).

Благодарности: Изказвам благодарност на проф. дпн Сава Гроздев за ценните препоръки, които ми даде при написването на тази статия.

A WAY OF SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS, RELATED TO AFFINE OPERATIONS WITH VECTORS IN THE PLANE

Kliment Vassilev

ABSTRACT

This article discusses a mathematical problem on vectors, given in a mathematical textbook for the 11th grade for specialized preparation. A theorem is proven, with the aid of which the mathematical problem is solved more easily. For its illustration is given the proof of the theorem of Menelaus and is found the bisector vector in the triangle. The theorem of Ceva is given with appropriate guidance how it can be proven.

Keywords: vector, triangle, bisector, Menelaus, Ceva.

Kliment Vassilev
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Science
Sofia 1113, Akad. G. Bonchev Str., Block 8
kimivas@abv.bg