ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА И ЗАДАЧИ ПО ИНФОРМАТИКА - ЕДНИ В ДРУГИ. КАК И ЗАЩО?

Антон Иванов Моллов, Бисерка Бончева Йовчева, Петър Йорданов Петров

РЕЗЮМЕ

Статията предлага методика за преобразуване на задача по математика в задача по информатика и обратно. Анализира се ефекта от това преобразуване и се правят определени изводи за бъдещо приложение на предложената методика при съставяне на авторски задачи за упражнение и за състезания както по математика, така и по информатика.

Ключови думи: образование, методика, информатика, математика, задачи.

Първо ще отговорим на въпроса „Защо е желателно и препоръчително съставянето на задачи в двете посоки?”: Известна задача по математика => Нова задача по информатика и обратно. По точно ще изброим в обобщен вид десет аргумента в подкрепа на такава дейност.

1. Пренос на оригинални идеи и подходи от едните в другите задачи.
2. Източник на идеи за нови задачи.
3. Възможност за показване и обучение в методология за съставяне на нови задачи.
4. Осмисляне на обобщението и конкретизацията не само за съставяне, но и за решаване на задачи.
5. Подчертаване на някои от най-важните свойства на алгоритмите: масовост, детерминираност и резултатност.
6. Създаване на предпоставки за търсене на различни подходи и решения на новата задача. Ако тя е задача по информатика и са построени няколко алгоритъма за решаването и, оценката на сложността на различните алгоритми е естествено в последствие.
7. Преходът от задача по математика към задача по информатика неминуемо води до усъвършенстване на умение за математическо моделиране.
8. Съставянето на задачи по описания начин извежда на преден план в явен вид взаимовръзката на математиката с информатиката, което може да бъде сериозен стимул за усъвършенстване на подготовката в по-слабата за ученика област.

9. Чрез съвместното решаване на двойка взаимосвързани задачи (в посочения смисъл) се получава доказателство за разликата в характера и възможностите на човешкото мислене и машината компютър, както и за симбиозата им.

10. Преобразуването на задача от едната област в задача от другата област е сравнително лесна за прилагане и стандартизиране процедура, тъй като и обобщението и конкретизацията и варирането на параметри на задачната ситуация не изискват специални умения.

Ще отбележим, че когато през осемдесетте години на миналия век се организират първите олимпиади и състезания по информатика предлаганите задачи са били предимно с математическа насоченост. Математическата тематика доминира и в някои от първите публикации посветени на извънкласната работа по информатика. Първи опити в това отношение са направени в Програмиране на рекурентни формули (РАХНЕВ& ГЪРОВ, 1988), Някои задачи по програмиране свързани с числата на Фибоначи (РАХНЕВ& ГЪРОВ, 1988), Бейсик в примери и задачи (РАХНЕВ& ГЪРОВ& ГАВРАИЛОВ, 1990) и др.

Първият илюстративен пример касае следните две задачи:

Задача 1.1. *В една стая има табуретки и столове. Всяка табуретка има три крака, а всеки стол – по 4 крака. Когато всички табуретки и столове са заети (на всеки от тях е седнал човек), броят на краката в стаята е 39. Колко са столовете?* (зад. 44, от (ГРОЗДЕВ С.& Н. СЪБЕВА , 2003))

Задача 1.2. Автопарк (Есенен турнир по информатика, Шумен, 2003, D3) (ЙОВЧЕВА Б.,&И. ИВАНОВА,2006, http://infoman.musala.com/.**).**

Група разузнавачи трябвало да проучат състоянието на автопарка на противника. За целта те проникнали в базата и установили, че противниците притежават леки автомобили (с по 4 колела), товарни автомобили (с по 6 колела) и мотори с кош (с по 3 колела). Те внимателно преброили превозните средства и установили, че общият брой колела е N, след което ги описали. За съжаление при изтеглянето, разузнавачите попаднали на засада и се наложило да прекосят река, при което част от документацията се намокрила и се загубила важна информация. Когато прегледали останалата информация, установили, че се чете ясно само броят на колелата. За да възстановят информацията се наложило да се напише програма, която намира всички различни комбинации на трите вида превозни средства за определения брой колела. Тъй като програмистът на групата бил много болен (много силно настинал при преминаването на реката) се налага вие да им помогнете като напишете програма CARS.EXE, която прочита от клавиатурата цялото число N(3<N<50) и отпечатва на отделни редове на екрана различните комбинации на превозните средства, *като ги подрежда на първо място броя на леките автомобили, на второ – броя на товарните автомобили и на трето – броя на моторите с кош.*

Преминаването от **Задача 1.1** към **Задача 1.2** може да стане със следните стъпки:

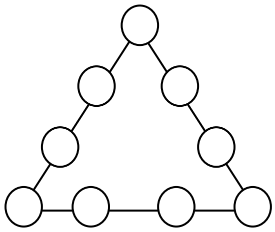
$$\textit{Задача}\,1.1 \xrightarrow[\text{(заета ттабуреткима 5 крака, заетстол - 6)}]{\text{математически модел}} 5x+6y=39$$

$$\xrightarrow{\text{обобщение}} \left| \begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \\ a_i, x_i, n, b - \text{естествени числа} \end{array} \right. \xrightarrow[n=3, a_1=4, a_2=6, a_3=3, b=N]{\text{конкретизация}} \textit{Задача}\,1.2.$$

Втората илюстрация е свързана със следните задачи:

Задача 2.1. Различни начини. (Зимни математически празници, Плевен, 2002, Турнир по информатика – D1) (КЕЛЕВЕДЖИЕВ Е., & З. ДЖЕНКОВА 2004, http://infoman.musala.com/.). *Да се направи програма* `ZAD1.EXE`, *която въвежда от клавиатурата естествено число* `S,5≤S≤50` *и извежда на екрана броя на начините, по които числото* `S` *може да се представи като сбор на три различни естествени числа.*

Задача 2.2. (Задача 899, а) от (МОЛЛОВ **,113)** *Поставете числата от 1 до 9 в кръгчетата на фигурата по такъв начин, че сборът от числата по всяка страна да бъде 20.*



Преобразуването от първата във втората задача е свързано с различните представяния на числото 15 като сбор на три различни събираеми. По конкретно: предвид, че сборът на числата по трите страни е 20.3=60, а сборът на числата от 1 до 9 е 45, то разликата 60-45=15 се получава като сбор на числата във върховете на триъгълника. Съществуват 8 различни представяния на числото 15 като сбор на три различни числа, от където се получават 5 различни решения на задачата.

Следващите илюстрации са от задочното състезание по информатика, което авторите проведоха на страниците на сп. „Математика +” през учебната 2009/2010 година.

Задача 3.1 (Задача 4. Фигури., сп. „М+", бр. 3, 2009 г.) *Дадени са две фигури – триъгълник със страни* a, b *и* c *и правоъгълник с дължина* d *и широчина* h. *Двете фигури трябва да се поставят една до друга така, че да не се припокриват и получената фигура да има най-малка обиколка.*

Да се опише словесно алгоритъм, който приема като входни данни петте числа a,b, c, d *и* h *и намира минималната възможна обиколка на фигура, образувана по посочения начин от правоъгълника и триъгълника.*

Задача 3.2. *Дадени са две фигури – триъгълник със страни 3, 4 и 5 и правоъгълник с дължина 1 и ширина 2. Да се поставят двете фигури една до друга така, че да не се припокриват и получената фигура да има най-малка обиколка (най-малката обиколка е 14).*

Задача 4.1. (Задача на Св. Георги Победоносец, 2002, (ДИМИТРОВ**,57))** *Вместо буквите да се запишат цифри така, че да е вярно равенството:*

КОШ + ШОК = 888

На различните букви отговарят различни цифри.

Всички цифри отгатни и непременно обясни.

Задача 4.2. (Задача 2: РЕБУС, сп. „М+", бр. 4, 2009 г.) *Нека е дадена цифра* ***K****. Да се опише алгоритъм, който по дадено* ***K*** *намира и извежда всички решения на ребуса:*

РИМ+МИР=KKK.

Ако ребусът няма решение, алгоритъмът да съобщава „`No Solution`*".*
На различните букви съответстват различни цифри.

Задача 5.1. (Математичиско състезание „Св. Георги Победоносец", 2001, (ДИМИТРОВ**,108))** *Кои три цифри трябва да се задраскат в числото* 2416375 *така, че от останалите цифри, без да се разместват, да се получи възможно най-малкото число?*

Задача 5.2. (Задача 4. Числа, сп. „М+", бр. 4, 2009 г.) *Дадено е четирицифрено число* ***N****. Да се състави алгоритъм, който въвежда числото* ***N*** *и извежда най-малкото цяло число, което може да се получи от* ***N*** *чрез задраскване на точно две цифри.*

По подобен начин са получени още **Задача 3. Числа, Задача 4. Облицовка на вана, сп. „М+", бр. 1, 2010 г.**

Ще направим някои важни **бележки**:

1. **Има задачи, които не се нуждаят от никакви преобразувания, т.е. те могат да се разглеждат и като задачи по математика и като задачи по информатика.**

Такава е, например, следната задача:

Задача Числа. (Есенен турнир по информатика, Шумен, 2001, задача D3) (КЕЛЕВЕДЖИЕВ Е., & З. ДЖЕНКОВА 2004, http://infoman.musala.com/**)**

а) За числото 135 е изпълнено $135 = 1 + 3.3 + 5.5.5$

Намерете всички трицифрени числа с това свойство, т.е. *abc = a + b.b + c.c.c*

б) За числото 1676 е изпълнено 1676 = 1 + 6.6 + 7.7.7 + 6.6.6.6

Намерете всички четирицифрени числа с това свойство, т.е.

abcd = a + b.b + c.c.c + d.d.d.d

Като задача по информатика, тя е добро упражнение към темата „Съчетаване на цикли и разклонения" (4,79). Като задача по математика, обаче, образователната и стойност е съмнителна, ако трябва да се решават чрез изчерпване уравненията

$$\overline{abc} = a + b \cdot b + c \cdot c \cdot c$$

$$\overline{abcd} = a + b \cdot b + c \cdot c \cdot c + d \cdot d \cdot d \cdot d$$

Еднакво стойностна и като задача по математика и като задача по информатика е и следната:

Задача Антена (XVII Републиканска студентска олимпиада по програмиране, София, 15 Май 2005). *Във връзка с развитието на мрежовите комуникации в своята държава, през девет земи в десета, баба Яга наела компанията "Дядо Торбалан Телеком" (ДТТ). Компанията решила да постави антена, която да осигурява връзка между всички села в държавата. От ДТТ установили координатите на всяко село* `(xi,yi.` *Станало ясно, че* `0≤xi≤1000, 0≤yi≤1000`*. За да може качеството на връзката да е максимално, се налага антената да се постави на такова място, че сумата от квадратите на разстоянията от нея до всяко село да е минимална.*

Да се състави програма, която определя координатите на мястото на антената.

Програмата трябва да може да обработва по няколко тестови примера като от стандартния вход се въвежда едно цяло число `T`*, след което се въвеждат тестовите примери по следния начин: за всеки тестов пример от стандартния вход се въвежда цяло число* `N (2≤N≤30000)`*, а на следващите* `N` *реда – по две цели числа, разделени с интервал, като всяка двойка задава координатите на едно село.*

За всеки тестов пример на стандартния изход се извежда единствен ред, на който се отпечатат две числа, разделени с интервал - координатите на антената.

За да се оцени трудността и в двете области, предлагаме авторския анализ и решение на Бисерка Йовчева:

В задачата се търси точка с координати `(x,y)`, такава че следната функция да има минимум:

$$f(x,y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2$$

Тъй като функцията е съставена от сума от положителни, независими събираеми, то минимумът и се постига в точката, в която имат минимум следните две функции:

$$f_1(x)=(x-x_1)^2+\cdots(x-x_n)^2$$

$$f_2(x)=(y-y_1)^2+\cdots(y-y_n)^2$$

За да се намерят двата минимума е необходимо да се намерят първите производни на двете функции и да се решат уравненията:

$$f_1'(x)=0 \text{ и } f_2'(y)=0$$

Съответно:

$$f_1'(x)=2(x-x_1)+2(x-x_2)+\cdots+2(x-x_n)=0$$

и

$$f_2'(x)=2(y-y_1)+2(y-y_2)+\cdots+2(y-y_n)=0$$

От където чрез преобразувания получаваме:

$$x=\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} \text{ и } y=\frac{y_1+y_2+\cdots y_n}{n}$$

От тук нататък остава да се напише програма, която за всеки тестов пример прочита входните данни, пресмята двете величини x и y и ги извежда на стандартния изход.

Очевидно разгледаната задача не изисква особено задълбочени умения по програмиране, за да бъде реализирана програмно, докато математическите знания, необходими за моделирането и надхвърлят рамките на стандартния училищен курс.

2. Промяната на задачната ситуация за получаване на нова задача чрез включване на допълнителни идеи, оптимизационни моменти и други прийоми може да направят новата задача по-целесъобразна за дисциплинната и област, по-богата на идеи, а и дава възможност да се контролират нейната сложност и трудност.

Така, преобразувайки **Задача 2.1.** „директно” може да се получи следната

Задача 2.3. *Числото 9 може да се представи по три начина като сбор на три различни числа: 9=1+2+6=1+3+5=2+3+4. По същия начин числото 10 може да се представи по четири начина като сбор на три различни числа: 10=1+2+7=1+3+6=1+4+5=2+3+5. По колко начина може да се представи числото 15 като сбор на три различни числа.*

Очевидно **Задача 2.2** може да се получи от **Задача 2.3.,** допълвайки последната с идеята за сбора на числата в трите кръгчета по върховете на триъгълника и е по-трудна за малките ученици, за които е предназначена.

3. Като задачи от съответната дисциплинна област задачата-прототип и новата задача могат да се различават изключително много по сложност и трудност.

Задача 6.1. (Великденско математическо състезание, 1998 г., 2,76) *В кутия има 12 бели, 10 зелени и 8 сини топчета. Без да гледаме изваждаме няколко от тях. За да сме сигурни, че сред извадените има поне 7 зелени топчета, колко най-малко трябва да извадим?*

Задача 6.2. Желирани мечета

Чип и Дейл обожават да ядат желирани мечета. Веднъж Чип решил да изненада Дейл, като му подари за рожденният ден точно K желирани мечета, които са от един и същ цвят. В магазина продават опаковки в които има точно 20 желирани мечета. Мечетата във всяка опаковка могат да са във всякакви комбинации от 6 различни цвята (дори може да са 20 мечета от един и същ цвят). Тъй като опаковките не били прозрачни, Чип не можел да разбере по колко мечета има от всеки цвят в някоя опаковка.

Помогнете на Чип като напишете програма whelp, която определя, колко най-малко опаковки трябва да купи за да си гарантира, че ще има K желирани мечета от един и същ цвят.

Задача 6.1. е с нормална трудност за четвъртокласници (в най-лошия случай ще извадим всички бели и всички сини топчета и е достатъчно да се извадят още 7 от останалите).

За да се оцени трудността на **Задача 6.2**. публикуваме авторско решение на Петър Петров (според нас задачата е подходяща за група D в състезанията по информатика):

Сигурно е, че в една опаковка има 20 желирани мечета, но не е известно какъв цвят има всяко от тях. Ето защо е необходимо да се разглежда винаги най-лошият случай. Това е когато цветовете са разделени приблизително по равно (тъй като 20 не се дели целочислено на 6) получаваме следното възможно разпределение (разпределенията може да са няколко „най-лоши”):

```
4 4 3 3 3 3
```

Ако се окаже, че това разпределение не е достатъчно (т.е. няма достатъчно мечета от един и същ цвят) се налага да се купи още едно пакетче. Сега вече трябва да се определи кой е най-лошият случай при покупка на 2 пакетчета. Това е случаят, в който броят на мечетата от един и същ цвят ще е възможно най-малък. Следователно една от възможностите е следната:

```
4 4 3 3 3 3
3 3 4 4 3 3
```

Ако отново се окаже, че не достигат трябва да се купи ново пакетче: Тъй като отново се търси минимален брой мечета от всеки цвят, най-лошият вариант за три пакетчета ще е следният:

```
4 4 3 3 3 3
3 3 4 4 3 3
```

3 3 3 3 4 4

Лесно се забелязва се, че при покупка на слеващо пакетче нещата ще се повторят. Следователно за намирането на минималният брой пакети е необходимо образуването на следната сума 4+3+3+4+3+3+4... . Номерът на стъпката, при която сумата ще стане по-голяма или равна на търсения брой мечета, е верният отговор на задачата.

ЛИТЕРАТУРА

ГРОЗДЕВ С.& Н. СЪБЕВА (2003) *Подготовка за Европейско кенгуру*. София: Математическа библиотека. Съюз на математиците в България, №5.

ДИМИТРОВ Д. И ДР., *Математически състезания в тестове и задачи 2-4 клас.* София : Регалия 6.

ЙОВЧЕВА Б.,&И. ИВАНОВА,(2006) *Първи стъпки в програмирането на C/C++*. София: КЛМН.

КЕЛЕВЕДЖИЕВ Е., & З. ДЖЕНКОВА (2004) *Алгоритми. Програми и задачи*. София: Регалия 6.

МОЛЛОВ А. *Задачи за извънкласна работа по математика I – IV клас*. Бургас: ДИМАНТ.

РАХНЕВ,А.&К.ГЪРОВ (1988) *Програмиране на рекурентни формули*, сп. Математика, бр. 4, София.

РАХНЕВ,А.&К.ГЪРОВ (1988), *Някои задачи по програмиране свързани с числата на Фибоначи*, сп. Математика, бр. 8, София

РАХНЕВ,А.&К.ГЪРОВ&О.ГАВРАИЛОВ (1990) *Бейсик в примери и задачи,* Изд. Народна просвета, София.

http://www.math.bas.bg/infos/.*Сайт за националните състезания по информатика за ученици*

http://infoman.musala.com/. *Български информатически портал, списание и онлайн библиотека.*

Благодарности: Статията е финансирана от фонд „Научни изследвания” към Шуменския университет „Епископ Константин Преславски” по проект № РД05-336/12.03.2010

Шуменски Университет “Епископ Константин Преславски”
Факултет по математика и информатика
Катедра “Методика на обучението по математика и информатика”
Антон Иванов Моллов
a_mollov@abv.bg

Катедра “Информатика”
Бисерка Бончева Йовчева
bissy_y@yahoo.com

Петър Йорданов Петров
peshoto_bg@yahoo.com

PROBLEMS IN MATHEMATICS AND PROBLEMS IN INFORMATICS – MERGING TOGETHER. HOW AND WHY?

Anton Ivanov Mollov, Biserka Boncheva Yovcheva, Petar Yordanov Petrov

ABSTRACT

In the article is presented a methodology to transform a problem from mathematics into a problem from informatics and vice versa. Analyze the effect of this transformation and make certain conclusions about the future application of the proposed methodology in constructing original problems for practice and competitions, both in mathematics and informatics.

KEY WORDS: education, informatics, didactics, problems, mathematics

Konstantin Preslavsky Unyversity of Shumen
Faculty of Mathematics and Computer Sciense
Department of Methodology of Teaching Mathematics and Informatics
Anton Ivanov Mollov
a_mollov@abv.bg

Department of computer science
Biserka Boncheva Yovcheva
bissy_y@yahoo.com

Petar Yordanov Petrov
peshoto_bg@yahoo.com