ЮБИЛЕЙНА НАУЧНА СЕСИЯ – 30 години ФМИ
ПУ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 3–4.11.2000

КОРЕКТНОСТ НА ОПТИМИЗАЦИОННИТЕ ЗАДАЧИ И ИГРАТА НА БАНАХ–МАЗУР

Петър Стоянов Кендеров

Полският математик Мазур в Задача 43 от известната "Шотландска книга" (виж Молдин [M] и Улам [U]) описва една интересна математическа игра. Самата книга също е необичайна. Тя е нещо като дневник на един особен семинар и съдържа част от въпросите и разсъжденията на група учени, които преди Втората световна война са имали навика да се срещат и приказват на математически теми в заведението "Шотландското кафе" в град Лвов. Книгата се съхранявала от сервитьора на заведението и при поискване била "сервирана" заедно с останалите поръчки.

Описаната от Мазур математическа игра има топологичен характер и се формулира съвсем просто. Нека E е непразно подмножество на реалната права. Двама играчи A и B избират последователно, един след друг, отворени непразни интервали от правата. Играта започва с ход на играча A, който избира произволен отворен интервал I_0. Играчът B отговаря като избира кой да е интервал $I_1 \subset I_0$. След това A избира някой интервал $I_2 \subset I_1$, а B го последва с избор на интервал $I_3 \subset I_2$. Тази процедура се повтаря до безкрайност. Възникващата по този начин намаляваща редица от интервали $p = (I_n)_{n=0}^{\infty}$ се нарича "разиграване". По определение, играчът A печели разиграването p, ако $(\cap_{n=0}^{\infty} I_n) \cap E \neq \emptyset$. В противен случай това разиграване се печели от играча B.

Естествено, някои разигравания могат да бъдат спечелени от играча A, а други - от играча B. В зависимост от свойствата на множеството E обаче, единият играч може да има "печеливша стратегия", която да му позволява да печели всички разигравания, възникващи при прилагането на тази стратегия. Такава стратегия води до спечелване на разиграването независимо от това как прави изборите си другият играч. Точното определение на понятието "печеливша стратегия" ще бъде приведено по-долу. Тук ще се ограничим само с два прости примера, в които играчът A има печеливша стратегия.

Пример 1. Нека множеството E е ограничен и затворен интервал. В този случай играчът A има проста печеливша стратегия. Достатъчно е играчът A да се погрижи интервалът I_0 да е подмножество на E и, при $i \geq 1$, интервалите I_{2i} заедно с краищата да се съдържат в I_{2i-1}. Ако при избора на интервалите играчът A спазва тези правила, сечението $\cap_{i \geq 0} I_i$ на всяко разиграване ще е непразно и ще се съдържа в E.

Пример 2. Нека множеството E е съвкупността от всички ирационални числа. Стратегията за играча A и тук се определя съвсем просто. Подреждаме по произволен начин рационалните числа в редица $(r_i)_{i \geq 0}$. При i-тия си ход играчът A избира интервала I_{2i} така, че заедно с краищата си да се съдържа в I_{2i-1} и точката r_i да е извън него. Сечението на така избраните интервали не е празно и не съдържа рационални числа. Т.е. A печели всички породени чрез тази стратегия разигравания.

Съществуването на печеливша стратегия за някой от играчите не винаги е толкова просто и лесно установимо. Това зависи най-вече от свойствата на множеството E. Като правило, колкото по-голямо е множеството E, толкова по-вероятно е да съществува печеливша стратегия за играча A. Колкото по-малко е множеството E толкова повече нарастват шансовете за печеливша стратегия на играча B. В тази връзка веднага възниква въпросът за това кои множества ще считаме "големи" и кои "малки". Близката до ума идея да се използва за целта мярката на множеството E не дава добър резултат. По-подходящи се оказват топологичните подходи.

Едно множество се нарича "*никъде гъсто*", ако затворената му обвивка няма вътрешни точки. Множество, което може да се представи като изброима сума на никъде гъсти множества, се нарича "*множество от първа Берова категория*"(или просто "*множество от първа категория*"). Типичен пример за множество от първа категория е множеството на рационалните числа. Множествата от първа категория съответстват на представите ни за "малко" множество. Те са топологичният аналог на множествата с мярка нула. Знаменитата теорема на Бер твърди, че едно пълно метрично пространство не може да е от първа категория. Т.е. пълните метрични пространства са "големи" множества. В тях допълнението на едно множество от първа категория също се счита за голямо и се нарича "резидуално", т.е. "остатъчно". Едно резидуално подмножество на пълно метрично пространство по необходимост съдържа сечението на изброимо много отворени множества, които са "*навсякъде гъсти*" (т.е. затворената им обвивка съвпада с цялото пространство). Типичен пример за резидуално множество е съвкупността на ирационалните числа. Резидуалните множества са топологичен аналог на множествата с пълна мярка. Ако някое свойство има място за точките от такова множество ще казваме, че свойството е изпълнено "*почти навсякъде*" или за "мнозинството (болшинството) от точките".

Във връзка с описаната по-горе игра Мазур отбелязва, че следните две твърдения са верни:

а) ако множеството E е резидуално в някой интервал на реалната права, то играчът A има печеливша стратегия;

б) ако E е от първа категория, то играчът B има печеливша стратегия.

В Проблем 43 Мазур изказва хипотезата, че обратните импликации също са в сила. За решаването на тази задача е обявена награда - бутилка вино.

На 4 август 1935 година Банах пише в Шотландската книга "Хипотезата на Мазур е вярна". Няма писмени сведения обаче, от които да личи какво е имал предвид Банах. Той не е публикувал доказателство за това си твърдение. Около 20 години по-късно Окстоби [О] публикува доказателство за хипотезата на Мазур. Окстоби разглежда по обща постановка, при която действието се развива в общо топологично пространство X, E е произволно непразно подмножество на X, а играчите избират произволни множества, които в известен смисъл са близки до отворените. Той доказва, че играчът B има печеливша стратегия тогава и само тогава, когато E е от първа категория в X. Ако X е пълно метрично пространство Окстоби доказва, че играчът A има печеливша стратегия точно тогава, когато множеството E е резидуално в някое отворено подмножество на X.

Впоследствие тази топологична игра е обект на интерес от страна на много изследователи. Различни нейни варианти се оказват много полезни при изучаването на въпроси от Общата топология, Геометрията на банаховите пространства, Логиката, Нелинейния анализ, Теорията на числата, Дескриптивната теория на множествата и др. Най-широко разпространение засега има следният вариант на играта. Действието се развива в произволно топологично пространство X. Двама играчи, наречени α и β участват в играта. Играчът β започва пръв играта като избира произволно непразно отворено множество U_1, а α отговаря като избере непразно отворено множество $V_1 \subset U_1$. След това β отново избира непразно отворено подмножество $U_2 \subset V_1$ и α прави следващия си избор на отворено непразно множество $V_2 \subset U_2$. В процеса на играта възниква намаляваща безкрайна редица p от отворени непразни множества $U_1 \supset V_1 \supset U_2 \supset V_2 \supset \cdots$, която ще наричаме "*разиграване*". По определение, играчът α печели дадено разиграване $p = (U_i, V_i)_{i=0}^{\infty}$, ако $\cap_{i=0}^{\infty} U_i = \cap_{i=0}^{\infty} V_i \neq \emptyset$. В противен случай β печели разиграването p. Тази игра ще означаваме с $BM(X)$ и ще наричаме "игра на Банах - Мазур". Фактът, че играчът β прави първия ход в играта $BM(X)$ не е съществен. Винаги можем да считаме, че играчът α започва пръв със задължителен избор - цялото пространство X, а след това играта продължава с избора на β, след това на α и т.н.

Понятието "*стратегия*" s за играча α в $BM(X)$ се определя индуктивно (рекурсивно) по дължината на (крайните) разигравания. "Разиграване с дължина единица" е просто едно произволно непразно отворено множество U_1. Интерпретираме го като ход на играча β в $BM(X)$. На всеки такъв ход U_1 играчът α отговаря (чрез стратегията s), с избор на непразното отворено множество $s(U_1) \subset U_1$. Следователно, на този етап, стратегията s е изображение, което съпоставя на всяко непразно отворено отворено множество $U_1 \subset X$ някое (еднозначно определено) отворено и непразно множество $s(U_1) \subset U_1$. Ако U_2 е произволно отворено непразно подмножество на $s(U_1)$, то тройката $(U_1, s(U_1), U_2)$ е е едно "легитимно" крайно разиграване (с дължина 2, колкото са ходовете на β), на което α отговаря като избира (чрез стратегията s) отворено множество $s(U_1, s(U_1), U_2) \subset U_2$. Прочее, можем да определим стратегията s като изображение, което на всяка намаляваща крайна редица от вида

$$(U_1, s(U_1), U_2, s(U_1, s(U_1), U_2), U_3, \ldots, s(U_1, s(U_1), U_2, \ldots, s(U_1, s(U_1), \ldots, U_{n-1}), U_n)$$

съпоставя отворено непразно множество $s(U_1, s(U_1), \ldots, U_n) \subset U_n$.

Без ограничение на общността можем да си мислим, че стратегията s зависи само от ходовете на β. В този смисъл записът $s(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ също е напълно легитимен. Разиграването $p = (U_i, V_i)_{i=0}^{\infty}$ се нарича "*s-разиграване*", ако $V_i = s(U_1, U_2, \ldots, U_i)$ за всяко $i \geq 1$. Стратегията s се нарича "*печелившa за играча α*", ако всяко s-разиграване се печели от α. Ако стратегията s зависи само от последния ход на β, тя се нарича "*тактика*" или "*стационарна стратегия*". По аналогичен начин се определя понятието "*печеливша стратегия*"или "*печеливша тактика*" за играча β. Съгласно резултат на Дебс [D], едно пространство X може да допуска печеливша стратегия, но да не допуска печеливша тактика. Съществуването или несъществуването на печеливша стратегия за някой от играчите отразява топологичните свойства на пространството X. Топологичното пространство X се нарича "*пространство на Бер*", ако сечението на изброимо много отворени и гъсти в X множества е гъсто в X. От трудовете на Окстоби [O], Кром [K], Маккой [MC] и Сен-Реймон [SR] се вижда, че X е пространство на Бер тогава и само тогава, когато играчът β няма печеливша стратегия в играта $BM(X)$. Наличието на печеливша стратегия за α може да се изрази по еквивалентен начин чрез пространството $C(X)$ от непрекъснатите и ограничени в X реално-значни функции, снабдено с обичайната норма $||f||_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Тази норма поражда метрика, относно която $C(X)$ е пълно метрично пространство. В сила е следното твърдение (Кендеров и Ревалски [KR]):

Пространството X допуска печеливша стратегия за играча α точно тогава, когато множеството $\{f \in C(X) : f$ достига минимума си в $X\}$ е резидуално в $C(X)$.

С всяка функция $f \in C(X)$ можем да асоциираме една оптимизационна задача, която ще бележим с (X, f):

$$\inf\{f(x) : x \in X\} =: \inf(X, f).$$

Спометият резултат може да се изкаже и така: болшинството от минимизационните задачи в X имат решение точно тогава, когато играчът α има печеливша стратегия.

Сред свойствата на оптимизационната задача (X, f) с важността си се открояват следните три:

(а) задачата (X, f) има решение (съществуване на решение);

(б) множеството от решения на задачата (X, f) се състои от само една точка (единственост на решението);

(в) при малка промяна на функцията f множеството от решения не се променя съществено (устойчивост на решението).

Взети заедно, тези три свойства формират представата за "*коректност*" на оптимизационната задача (X, f). Тези свойства са автоматично изпълнени, ако е в сила следното условие, известно като "*коректност по Тихонов на задачата (X, f)*":

ако редицата от числа $(f(x_i))_{i=0}^{\infty}$ клони към $\inf(X, f)$, то редицата от точки $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ е сходяща

С други думи, изисква се минимизиращите редици в X да са сходящи.

Поради непрекъснатостта на f, границата на редицата $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ е решение на задачата (X, f). Лесно се вижда, че това решение е всъщност единствено.

Възниква естественият въпрос: За кои пространства X болшинството от оптимизационните задачи (X, f), $f \in C(X)$, са коректни по Тихонов?

Отговорът се дава от следната теорема ([CKR1], [CKR2], [CKR3]):

За пространството X следните условия са еквивалентни:

(а) Множеството от функции $f \in C(X)$, за които задачата (X, f) е коректна по Тихонов е резидуално;

(б) играчът α има стратегия s, пораждаща s-разигравания $p = (U_i, V_i)_{i=1}^{\infty}$, за които сечението $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ се състои от само една точка и за тази точка множествата $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ образуват база от околности;

(в) Пространството X съдържа гъсто метризуемо с пълна метрика подмножество X'.

Забележки

1) Интересна информация за "взаимодействието" между играта $BM(X)$ и свойствата на пространствата X и $C(X)$ се съдържа в статията на Дебс и Сен-Реймон [DSR]. Обзорната статия на Телгарски [T], както и статията на Шоке [Ch] са важен източник на информация за развитието на топологичните игри.

2) С помощта на континуум хипотезата може да се докаже, че съществуват пространства X (дори подмножества на единичния интервал), за които никой от двамата играчи в играта $BM(X)$ няма печеливша стратегия. Такива са, например, т.н. "множества на Бернщайн" в единичния интервал. Те се характеризират с това, че всеки неизброим компакт пресича както множеството, така и допълнението му.

Литература

[Ch] Choquet, G.: 'Une classe régulières d'espaces de Baire', *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **246**(1958), 218–220.

[CKR1] Coban, M.M., Kenderov, P.S. and Revalski, J.P.: 'Topological spaces related to the Banach-Mazur game and the generic well-posedness of optimization problems', *Set-Valued Analysis*, **3**(1995), 263–279.

[CKR2] Coban, M.M., Kenderov, P.S. and Revalski, J.P.: 'Generic well-posedness of optimization problems and the Banach-Mazur game', *Recent Developments in Well-posed Variational Problems,Editors Roberto Lucchetti and Julian Revalski, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers*, (1995), 117–136.

[CKR3] Coban, M.M., Kenderov, P.S. and Revalski, J.P.: 'Generic well-posedness of optimization problems in topological spaces', *Mathematica*, **36**(1989), 301–324.

[D] Debs, G.: 'Strategies gagnantes dans certains jeux topologiques', *Fund. Math.* **126**(1985), 93–105.

[DSR] Debs, G. and Saint-Raymond, J.: 'Topological games and optimization problems', *Mathematika* **41**(1994), 117–132.

[K] Krom, M.R.: 'Infinite games and special Baire space extensions', *Pacific J. Math.* **55**,No2,(1974), 483–487.

[KR] Kenderov, P.S. and Revalski, J.P.: 'The Banach-Mazur game and generic existence of solutions to optimization problems', *Proc. Amer. Math. Soc.* **118**(1993), 911–917.

[M] Mauldin, R.D. (ed.): *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*, Birkhauser-Verlag, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.

[MC] McCoy, R.A.: 'A Baire space extension', *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33**(1972), 199–202.

[O] Oxtoby, J.: 'The Banach-Mazur game and the Banach category theorem', in: *Contributions to the theory of games*, Vol. III, Annals of Math. Studies, **39**, Princeton 1957, 159–163.

[SR] Saint-Raymond, J.: 'Jeux topologiques et espaces de Namioka', *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**(1983), 499–504.

[T] Telgárski, R.: 'Topological games: On the fifth anniversary of the Banach-Mazur game', *Rocky Mount. J. Math.*, **17**(1987), 227–276.

[U] Ulam, S.M.: *The Scottish Book*, A LASL monograph, Los Alamos Scientific Laboratory, Second Edition, 1977.