

*Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика*

Снежана Гочева-Илиева, Христина Кулина

ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА 2

2019 г.
ПЛОВДИВ

Този учебник съдържа курс лекции по дисциплината „Приложна математика 2“, преподаван от авторите в продължение на няколко години на студентите от специалност „Софтуерни технологии и дизайн“ – бакалавърска програма, към *Факултета по математика и информатика* на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“.

Рецензенти:

1. Проф. д-р Михаил Тодоров, Технически университет - София
2. Проф. д-р Антон Илиев, ПУ „Паисий Хилендарски“
3. Доц. д-р Тодорка Терзиева, ПУ „Паисий Хилендарски“

e-book: ISBN 978-619-202-501-4

СЪДЪРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ ЗА УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМИ УРАВНЕНИЯ.....	7
1.1. Числени методи и математически модели	7
1.2. Грешки при приближени изчисления	15
1.3. Постановка на задачата за намиране на приближен корен на едно нелинейно уравнение	33
1.4. Метод на Нютон (метод на допирателните) и итерационен алгоритъм.....	37
1.5. Алгоритъм на метода на Нютон. Пример	45
1.6. Числено решаване на системи линейни алгебрични уравнения (СЛУ) с метод на простата итерация	59
1.7. Условия за сходимост на метода на простата итерация за системи линейни алгебрични уравнения	76
ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖАВАНЕ НА ТАБЛИЧНИ ДАННИ	79
2.1. Основни етапи при приближаване на функции, зададени в таблична форма.....	79
2.2. Задача на интерполирането	82
2.3. Интерполационен полином на Лагранж. Оценка на грешката от интерполиране. Примери	85
2.4. Метод на най-малките квадрати (МНК) с алгебрични полиноми	97
ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНО ОПТИМИРАНЕ.....	116
3.1. Кратка класификация на задачите за оптимизация	116
3.2. Обща задача на линейното оптимиране (ОЗЛО)	122

3.3. Решен пример на задача от линейното оптимиране в двумерен случай ($n=2$) с графичен метод.....	125
3.4. Канонична задача на линейното оптимиране (КЗЛО)	136
3.5. Базисен вид на КЗЛО. Основни теореми на ЛО	154
ГЛАВА 4. СИМПЛЕКС МЕТОД.....	166
4.1. Симплекс метод. Симплекс таблица	166
4.2. Алгоритъм на симплекс-метода.....	182
4.3. Намиране на начален опорен план с М-метод. Примери.....	183
ГЛАВА 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	192
5.1. Формулировка и съставяне на математически модел на транспортна задача – примери.	192
5.2. Общ вид на ТЗ. Теорема за разрешимост на ТЗ от затворен тип. Определяне ранга на ТЗ	198
5.3. Алгоритъм на транспортната задача за минимум	204
5.4. Намиране на начален опорен план на ТЗ	205
5.5. Цикли.....	213
5.6. Алгоритъм за преход към нов опорен план в ТЗ.....	215
5.7. Понятие за дуалност. Метод на потенциалите на Канторович	217
5.8. Примери за метода на потенциалите	223
5.9. Варианти на транспортната задача	227
ГЛАВА 6. ДИНАМИЧНО ОПТИМИРАНЕ	231
6.1. Основни понятия	231
6.2. Представяне на решенията с графи	235

6.3. Принцип за оптималност на Белман.....	242
6.4. Задача за разпределение на едномерен ресурс. Функционални уравнения на Белман.....	251
6.5. Графи, определения и представяния	267
6.6. Алгоритъм на Форд-Белман	275
6.7. Алгоритъм на Дийкстра.....	287
6.8. Алгоритъм на Флойд-Уоршел.....	295
ГЛАВА 7. КОМБИНАТОРИКА. ЕЛЕМЕНТИ ОТ ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ	297
7.1. Комбинаторика	297
7.2. Случайни събития. Класическа вероятност	311
7.2. Условна вероятност. Вероятност на сума и произведение от събития.....	324
7.3. Формула за пълната вероятност. Формула на Бейс.....	327
ГЛАВА 8. СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ. ЧИСЛОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ДИСКРЕТНИ И НЕПРЕКЪСНАТИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ	331
8.1. Случайни величини. Основни понятия	331
8.2. Дискретни случайни величини. Числови характеристики	334
8.3. Биномно разпределена дискретна случайна величина.....	346
8.4. Геометрично разпределена дискретна случайна величина	356
8.5. Непрекъснати случайни величини. Числови характеристики.....	359
8.6. Нормално разпределена случайна величина.....	362
8.6. Локална и интегрална гранични теореми.....	372
ГЛАВА 9. ЕЛЕМЕНТИ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА СТАТИСТИКА.....	376
9.1. Исторически бележки	376

9.2. Основни понятия	380
9.3. Първична обработка на данните	390
9.4. Точкови оценки	407
9.5. Интервални оценки	416
9.6. Корелационен анализ	422
9.7. Линеен регресионен анализ	437
9.8. Приложение на регресионния модел за предсказване	448
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Варианти на изпитни тестове	451
Вариант 1	451
Вариант 2	454
Вариант 3	457
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Таблици на стандартното нормално разпределение	461
ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Квантили на симетричното t – разпределение на Стюдънт.....	467
Литература	470

ГЛАВА 1. ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ ЗА УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМИ УРАВНЕНИЯ

1.1. Числени методи и математически модели

Основни характеристики на компютърното смятане

- Повишена скорост – около 10 млн. аритметични операции/сек за ПК
- Практически неограничена степен на точност
- Улеснен обмен на данните между различни програмни сегменти, програми, компютри и компютърни мрежи
- Високоэффективни паралелни изчисления
- Символни изчисления
- Качествена машинна графика за представяне на резултатите
- Използване на софтуерни системи за научни пресмятания като *Mathematica*, *MatLab*, *Maple*, и др.
- Онлайн разпределени облачни изчисления, и др.

Ще покажем, че с формален подход, някои задачи изискват стотици и хиляди години компютърни изчисления ...

Правило: Дори и с най-бърз компютър не можем наивно да прилагаме математическите определения и факти.

Пример 1.1. Пресмятане на детерминанти. Преговор.

А) Детерминанта от 2-ри ред ($n=2$):

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1 \quad (\text{изисква 3 аритметични операции}).$$

Б) Детерминанта от 3-ти ред ($n=3$):

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 5 = 27$$

(изисква 23 аритметични операции).

Задача. Като се приложи директно дефиницията, да се пресметне стойността на детерминанта от n -ти ред при $n=20$.

Решение: По дефиниция детерминантата на квадратна матрица от числа A с размерност $n \times n$ е число, което се задава с формулата

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} .$$

В този израз стойността на детерминантата A е число, равно на сумата от $n!$ произведения, където сумирането се отнася до всичките $n!$ на брой пермутации $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ от вторите индекси.

Във всяко събираемо има $n-1$ произведения, събираемите са $n!$, т.е. общият брой аритметични действия е приблизително

$$\text{Брой} = n \cdot n!$$

При $n = 20$ получаваме $\text{Брой} = 20 \cdot 20! = 20 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \dots 1 \approx 4,8 \cdot 10^{19}$.

В 1 година има средно $\text{Сек_година} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3,1 \cdot 10^7$ секунди и за всяка секунда се извършват $\text{Опер_секунда} = 1 \cdot 10^7$.

$$\frac{\text{Брой}}{\text{Сек_година} \cdot \text{Опер_секунда}} = \frac{4,8 \cdot 10^{19}}{3,1 \cdot 10^7 \cdot 10^7} \approx 1,5 \cdot 10^5 = 150\,000 \text{ години!}$$

За щастие съществуват много по-икономични числени методи, които за същата задача изискват едва около n^3 операции, т.е. при $n=20$ приблизително $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ и резултатът ще се появи на същия компютър за ... една хилядна част от секундата!

Пример 1.2. Взрив на грешката от закръгляне

Задача. Да се пресметне приближената стойност на функцията $\sin(x)$ за $x = \pi / 6 + 2k\pi$ чрез формулата за разлагане в безкраен степенен ред:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Всички изчисления да се

извършват с точност $\varepsilon = 10^{-5}$ и докато пореден член стане по-малък от ε .

k	x	Sin(x) - приближено решение
0	$\pi/6$	0.50000
3	$\pi/6 + 6\pi$	0.74000
4	$\pi/6 + 8\pi$	0.98000
5	$\pi/6 + 10\pi$	1.22000
10	$\pi/6 + 20\pi$	7.22000
25	$\pi/6 + 50\pi$	12.02003
		...

Взрив на грешката!

Точното решение за всяко k е:
 $\sin(\pi/6 + 2k\pi) = \sin 30^\circ = 0,5$

Определение. **Числените методи** свеждат даден клас математически задачи до ефективни алгоритми, с помощта на които те могат да се решат с краен брой аритметични действия и в краен интервал от време, а грешката на резултата може да се оцени предварително. Те са изцяло ориентирани към пресмятания с компютър.

За да се реши дадена реална задача с числен метод, тя трябва предварително да бъде зададена в подходящ вид, наречен математически модел.

Определение. **Математическият модел** е приближено описание на даден клас реални явления с помощта на математическа символика.

Например: Изчисляването на обема на бензин в цистерна се свежда до тримерен интеграл, движението на спътник - до система диференциални уравнения с променливи коефициенти при зададени начални условия и т.н.

Изключително важно за всеки модел е той да бъде **адекватен**, т.е. достатъчно точно да отразява същността на моделираното явление или процес. Адекватността на модела се установява чрез проверката му в практиката, а най-добрият критерий за адекватност е, когато моделът може да **“предсказва”** достатъчно точно бъдещите състояния на процеса или явлението.

Когато моделът не дава достатъчно удовлетворително решение на поставената задача неговите параметри могат многократно да се коригират, а самият модел може да се променя. Тази последователност от промени в модела се нарича математическо моделиране.

Определение. **Математическото моделиране** е цикличен процес на създаване и уточняване на математически модели. Целта на този процес е получаването на достатъчно удовлетворителни резултати, в рамките на зададена допустима грешка.

Математическото моделиране преминава през следните основни етапи:

- 1. Постановка на задачата.**
- 2. Построяване на математически модел.**
- 3. Избор или разработване на числен метод.**
- 4. Съставяне на алгоритъм.**
- 5. Програмиране.**
- 6. Получаване на резултати от модела.**
- 7. Цикъл на моделирането до достигане на удовлетворителни резултати.**
- 8. Внедряване.**

1.2. Грешки при приближени изчисления

Основен въпрос при численото решаване на задачи е анализ на възможните грешки.

Различават се следните видове грешки:

- **неотстранима грешка** (грешка от експериментални данни)
- **грешка от изчисления** (от закръгляне и от аритметични действия)
- **грешка от числения метод**

Сумата от тези три грешки формира т.н. **пълна грешка**, която характеризира качеството на крайния резултат.

Приближаване на числа, абсолютна и относителна грешка

Нека x е дадено точно число, а $\tilde{x}$ е негово приближено.

Определение. Реалното число $\alpha(\tilde{x})$ се нарича **абсолютна грешка** на приближението $\tilde{x}$ на x , ако е горна граница на модула на тяхната разлика, т.е.

$$\alpha(\tilde{x}) \geq |x - \tilde{x}|. \quad (1.1)$$

Прието е (1.1) да се записва като равенство

$$\alpha(\tilde{x}) = |x - \tilde{x}|.$$

Ще отбележим, че абсолютната грешка зависи от мерната единица, например килограм, метър, унция и т.н. Ако разрешим неравенството (1.1) спрямо x ще получим: $\tilde{x} - \alpha(\tilde{x}) \leq x \leq \tilde{x} + \alpha(\tilde{x})$, което определя интервала $[\tilde{x} - \alpha(\tilde{x}), \tilde{x} + \alpha(\tilde{x})]$, в който се намира точното число.

Определение. Реалното число $\Delta(\tilde{x})$ се нарича **относителна грешка** на приближението $\tilde{x}$ на x , ако удовлетворява условието

$$\Delta(\tilde{x}) \geq \frac{\alpha(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}, \quad \tilde{x} \neq 0. \quad (1.2)$$

Записва се и като:

$$\Delta(\tilde{x}) = \frac{\alpha(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}, \quad \tilde{x} \neq 0.$$

Относителната грешка е безмерна величина и се изразява с проценти.

Пример 1.3. Дадено е числото $x = \frac{2}{7}$. Да се намерят относителните и абсолютните грешки на две негови приближения: $\tilde{x}_1 = 0,286$ и $\tilde{x}_2 = 0,2857$.

Решение. Имаме $x = 2 / 7 = 0,285714285...$

За абсолютните грешки намираме:

$$|x - \tilde{x}_1| = |-0,00028571...| \leq \alpha(\tilde{x}_1), \quad |x - \tilde{x}_2| = |0,00001428...| \leq \alpha(\tilde{x}_2)$$

Можем да изберем например: $\alpha(\tilde{x}_1) = 0,00028$ или $\alpha(\tilde{x}_1) = 0,0003$.

Съответно за $\tilde{x}_2$: $\alpha(\tilde{x}_2) = 0,00002$, $\alpha(\tilde{x}_2) = 0,00005$ или $\alpha(\tilde{x}_2) = 0,0001$.

За относителните грешки намираме:

$$\Delta(\tilde{x}_1) = \frac{\alpha(\tilde{x}_1)}{|\tilde{x}_1|} = \frac{0,0003}{0,286} = 0,001048... \leq 0,002, \text{ т.е. } \Delta(\tilde{x}_1) = 0,2\%.$$

$$\Delta(\tilde{x}_2) = \frac{\alpha(\tilde{x}_2)}{|\tilde{x}_2|} = \frac{0,00005}{0,2857} = 0,000175... \leq 0,0002, \text{ или } \Delta(\tilde{x}_2) = 0,02\%.$$

Пример 1.4. Да се определи абсолютната и относителната грешка на числото $b=81,002$.

Решение. В случая не знаем дали b е точно число или приближено. Затова формално считаме, че последната цифра се явява резултат от правилата на закръгляне до третия знак, т.е. абсолютната грешка е $\alpha(b) = 0,0005$.

Интервалът, в който се намира числото е: $(81,0015; 81,0025)$.

Относителната му грешка е:

$$\Delta(b) = \frac{\alpha(b)}{|b|} = \frac{0,0005}{81,002} = 0,000006172...,$$

т.е. $\Delta(b) = 0,0007\%$.

Пример 1.5. Дадено е приближеното число $\tilde{z} = 0,00123$. Да се определят абсолютната и относителната му грешка.

Решение. Абсолютната грешка е: $\alpha(\tilde{z}) = 0,000005$, а относителната

$$\Delta(\tilde{z}) = \frac{\alpha(\tilde{z})}{|\tilde{z}|} = \frac{0,000005}{0,00123} = 0,004065..., \text{ т.е. } \Delta(\tilde{z}) = 0,41\%.$$

Забележка. Обърнете особено внимание на последния резултат! Той показва, че относителните грешки на числа, близки до нулата, са големи!

Следователно, следва да се избягва деление на малки числа.

Задача. Да се определи кое претегляне е по-точно: (а) на жп вагон с тегло 45 т и грешка $\alpha_1 = 50$ кг, или (б) на лекарство с тегло 0.5 грама и грешка $\alpha_2 = 0,001$ грама.

Грешки от изчисления

Нека x и y са точни, а $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ са съответни на тях приближени числа. Означаваме $z = x + y$ и $\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$. За абсолютната грешка на сумата намираме:

$$\alpha(\tilde{z}) = |z - \tilde{z}| = |x + y - \tilde{x} - \tilde{y}| \leq |x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| \leq \alpha(\tilde{x}) + \alpha(\tilde{y}),$$

или

$$\alpha(\tilde{x} + \tilde{y}) \leq \alpha(\tilde{x}) + \alpha(\tilde{y}).$$

Това показва, че при събиране теоретичната абсолютна грешка на сумата е равна на сумата от абсолютните грешки на събираемите.

Аналогично се доказват подобни оценки за всички аритметични действия. Валидна е следното по-общо твърдение:

Теорема. Нека $u = f(x)$ е произволна диференцируема функция на x , където $f(x)$ се разглежда като последователност от аритметични действия над x . Ако $\tilde{x}$ е приближение на x и $\tilde{u} = f(\tilde{x})$ е съответното приближение на u . Тогава абсолютната грешка на резултата е непрекъснатата функция на грешката $\tilde{x}$.

Доказателство. Нека предположим, че $f(x)$ е диференцируема функция в околност на x . Тогава по теоремата за средните стойности:

$$\alpha(\tilde{u}) = |u - \tilde{u}| = |f(x) - f(\tilde{x})| = |f'(\xi)(x - \tilde{x})| \leq |f'(\xi)| |x - \tilde{x}| \leq |f'(\xi)| \alpha(\tilde{x}).$$

При ограничена първа производна получаваме:

$\alpha(\tilde{u}) \leq M \alpha(\tilde{x})$, $M = \text{const}$, с което теоремата е доказана.

От тази теорема в частност следва, че с точност до константа за основните аритметични действия, са изпълнени оценките

$$\alpha(x - y) = \alpha(x) + \alpha(y), \quad \alpha(x \cdot y) = \alpha(x) + \alpha(y), \quad \alpha(x / y) = \alpha(x) + \alpha(y), \quad y \neq 0.$$

Реално, при извършване на огромен брой изчисления, поради различните знаци на приближенията (с недостиг или с излишък) абсолютните грешки се компенсират и сумарната грешка е малка. Не са рядко изключение обаче и случаите, в които грешките само се натрупват и могат да доведат до резултати, клонящи към безкрайност. Този феномен се нарича “взрив на грешката” или изчислителна неустойчивост. Той може да се прояви независимо от точността (броят на знаците след десетичната запетая) на участващите числа.

Неустойчивост на грешката

Определение. **Неустойчивост на грешката от изчисления** (абсолютна или относителна) се нарича случаят, когато “малки” грешки във входните данни водят до “големи” грешки в резултата.

В увода бе приведен пример за взрив на грешката при сумиране на функцията $\sin(x)$ (виж Пример 1.3). Ще приведем още един характерен пример, свързан с неустойчивостта на изчисленията.

Пример 1.6. Неустойчивост на относителната грешка при изваждане на близки числа.

Нека разгледаме близките числа $x = 2,123$ и $y = 1,985$. Разликата им е $z = x - y = 0,138$. Имаме:

$$\alpha(x) = \alpha(y) = 0,0005, \quad \alpha(z) = \alpha(x) + \alpha(y) = 0,001,$$

$$\Delta(x) = \frac{\alpha(x)}{|x|} = \frac{0,0005}{2,123} = 0,0002355..., \quad \Delta(x) = 0,025\%,$$

$$\Delta(y) = \frac{\alpha(y)}{|y|} = \frac{0,0005}{1,985} = 0,0002518..., \quad \Delta(y) = 0,026\%,$$

$$\Delta(z) = \frac{\alpha(z)}{|z|} = \frac{0,001}{0,138} = 0,00724..., \quad \Delta(z) = 0,73\%.$$

За отношението на относителните грешки получаваме $0,3 / 0,025 \approx 29$, т.е. относителната грешка на разликата е 29 пъти по-голяма спрямо относителната грешка на x и y .

Забележка. Един начин за избягване изваждането на близки числа е тяхното “раздалечаване” чрез рационализиране.

Например:

$$\sqrt{101} - 10 = \frac{(\sqrt{101} - 10) \cdot (\sqrt{101} + 10)}{\sqrt{101} + 10} = \frac{1}{\sqrt{101} + 10}.$$

Правила при действия с приближени числа

Редът на грешката зависи както от точността на началните данни, така и от този на междинните резултати.

- **Намира се приближеното число от началните данни с най-голяма грешка, която определя и грешката на резултата. Нека тя е например в k -тия знак след десетичната запетая.**
- **Останалите начални данни могат да се закръглят с 1-2 знака повече от k .**
- **Всички междинни резултати се извършват с 1-2 знака след k .**
- **Избягва се по възможност изваждане на близки числа и деление на числа, близки до 0.**
- **Резултатът закръгляме до k -ти знак след десетичната запетая, ако няма и друг тип грешка – например от числения метод.**

Забележка. Математически, физични и други константи да се задават с възможно по-голяма точност. Например заместването $\pi = 3,14$ може да влоши точността на крайния резултат до два знака след десетичната запетая.

Грешки от числения метод

Всяка решавана задача може да се запише формално в явен вид:

$$y = A(x), \quad x \in R_1, \quad y \in R_2, \quad (1.3)$$

или в неявен вид:

$$A(x, y) = 0, \quad A: R_1 \rightarrow R_2, \quad (1.4)$$

където се търси y по дадено x , или x по дадено y (обратна задача). Тук са използвани означенията R_1, R_2 за съответните пространства, към които принадлежат x и y , а A е оператор (последователност от действия), преобразуващ x в y .

За да оценяваме "близостта" на елементите, ще считаме, че съответните пространства са нормирани и ще означаваме нормите им съответно с $\|\cdot\|_{R_1}, \|\cdot\|_{R_2}$.

При прилагането на даден числен метод, той от своя страна работи обикновено в подпространства на дадените, например

$\overline{R_1} \subset R_1$, $\overline{R_2} \subset R_2$, а операторът A се заменя с приближен $\tilde{A}$. Така получаваме задачата:

$$\tilde{y} = \tilde{A}(\tilde{x}), \quad (1.5)$$

където $\tilde{x}$ е някакво приближение до началните данни (получено чрез измерване, при закръгляне и т.н.), а $\tilde{y}$ е приближение, получено от избрания числен метод.

Решаването на конкретна задача от класа (1.5) със зададени значения на x ще доведе до допускане на изчислителни грешки, т.е. до приближена задача от вида:

$$\tilde{\tilde{y}} = \tilde{\tilde{A}}(\tilde{\tilde{x}}).$$

За разликата от точното и приближеното решение имаме:

$$y - \tilde{\tilde{y}} = (y - \tilde{y}) + (\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}})$$

и използвайки свойствата на нормите, получаваме оценката:

$$\|y - \tilde{\tilde{y}}\|_{\overline{R_2}} \leq \|y - \tilde{y}\|_{\overline{R_2}} + \|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\|_{\overline{R_2}}. \quad (1.6)$$

Това показва, че пълната грешка на резултата не надминава сумата от грешката на избрания числен метод и изчислителната грешка. Стои проблемът за оценяване на тези две грешки.

Един пример за задача от вида (1.3)-(1.4) е изчисляването на определен риманов интеграл от реална функция $I = \int_a^b f(t) dt$. Начални данни са a, b и функцията $f(t)$, операторът A е действието интегриране. Търсеният резултат е числото I . Пространствата са: $R_1 = C_{[a,b]}$, $R_2 = R$.

При използването на числен метод за пресмятане на интеграла, например, чрез квадратурна формула, се работи в пространствата $\overline{R_1} = R$ и $\overline{R_2} = R$ (R са реалните числа), а операторът $\tilde{A}$ е крайна сума, зависеща от параметър, например стъпка h . Обикновено, приближеното значение на интеграла се получава с някаква грешка, пропорционална на степен на стъпката.

Определение. Казваме, че $\psi = O(\varphi)$, ако съществува константа $M \geq 0$, такава, че за функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ е вярно неравенството $|\psi(x)| \leq M |\varphi(x)|$ в определена област. Символът O се нарича символ на Ландау и се чете "о-голямо".

Чрез този символ например точността на даден метод може да се представи във вида $O(h^s)$, където h е малък параметър.

Друг изключително важен проблем, освен оценка на грешката в (1.6), касае поведението на решението на изходната задача (1.3)-(1.4), както и това на числения метод.

Определение. Решението на задача (1.3) е устойчиво по начални данни, когато е вярно неравенството: $\|y - \tilde{y}\|_{\overline{R_2}} \leq C \|x - \tilde{x}\|_{\overline{R_1}}. \quad (1.7)$

Това неравенство означава, че решението y зависи непрекъснато от x , т.е. **малки грешки в изходните данни водят до малки грешки в резултата.**

При типично неустойчива задача, незначителни промени в данните (след закръгляне) водят до големи грешки, а понякога и до съвсем неверни решения. Това беше демонстрирано в Пример 1.2 с възможен взрив на грешката.

Определение. Ще казваме, че задачата (1.3) е **коректна**, когато са изпълнени следните условия:

- 1⁰) съществува решение y ,
- 2⁰) решението е единствено в подобласт на R_2 ,
- 3⁰) решението е устойчиво по начални данни.

Освен неустойчивост по начални данни има и други типове неустойчивост, например неустойчивост относно коефициентите на задачата, относно дясната част и пр.

В други случаи, макар и изходната задача да е коректно поставена, може да се окаже неустойчив избрания числен метод. Аналогично на горното определение един **ЧМ** ще наричаме **коректен**, когато

съществува единствено и устойчиво по начални данни решение на задача (1.5) в някаква подобласт на $\bar{R}_1$. Има много случаи на неустойчиви, т.е. некоректни числени методи, например численото диференциране, решаване на диференциални задачи и други.

Определение. Ще казваме, че един числен метод, зависещ от параметър h е сходящ, когато полученото по метода приближено решение y_h е сходящо по норма към точното решение y на задача (1.3), т.е. $\|y - y_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Следователно основните изисквания за правилно прилагане на даден числен метод са: изходната задача да е коректна, а численият метод да е устойчив и сходящ.

1.3. Постановка на задачата за намиране на приближен корен на едно нелинейно уравнение

Дадено е уравнение от вида $f(x) = 0$, на което търсим корените.

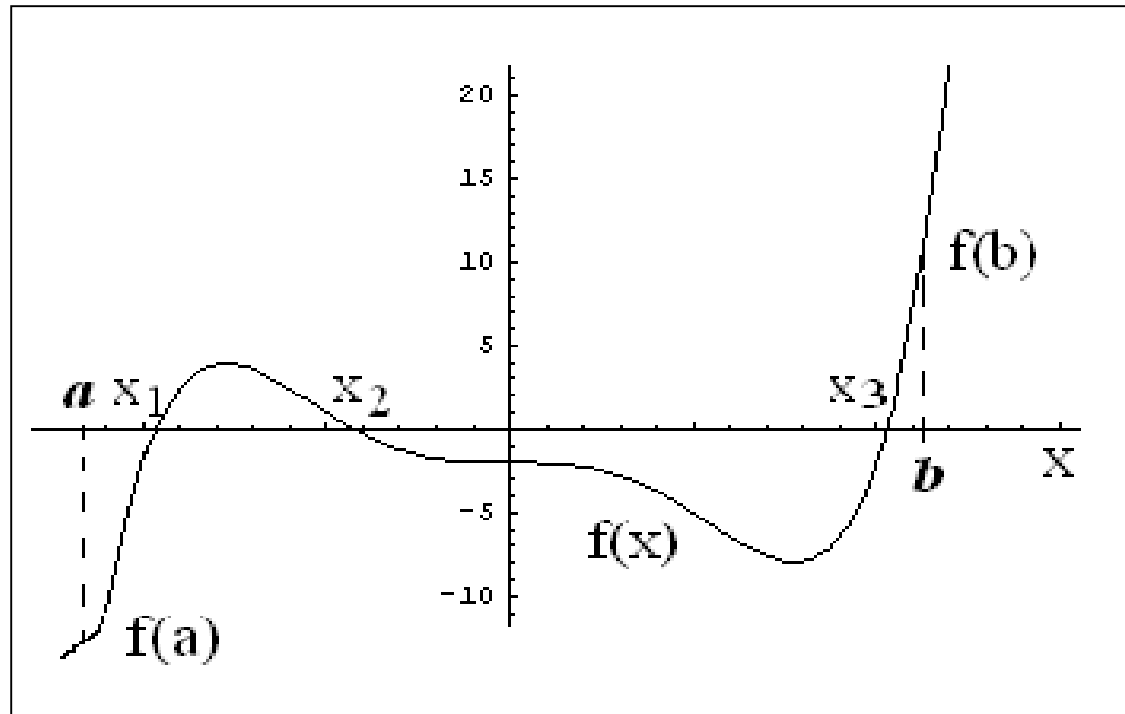
<i>Въпроси</i>	<i>Методи за решаване</i>
1. Съществуват ли корени, брой, вид (реални, комплексни), кратност (прости, двойни ...)?	Графични, аналитични емпирични
2. Местоположение на корените (локализация)	Графични, аналитични емпирични
3. Уточняване на корените с дадена точност	Числени методи

Целта ни е да намерим методи, които да работят за възможно по-голям клас от уравнения, т.е. функции $f(x)$. Различните методи са приложими при различни условия.

В нашия курс ще търсим предимно **реални** корени на уравнението $f(x) = 0$.

Основен факт от математическия анализ

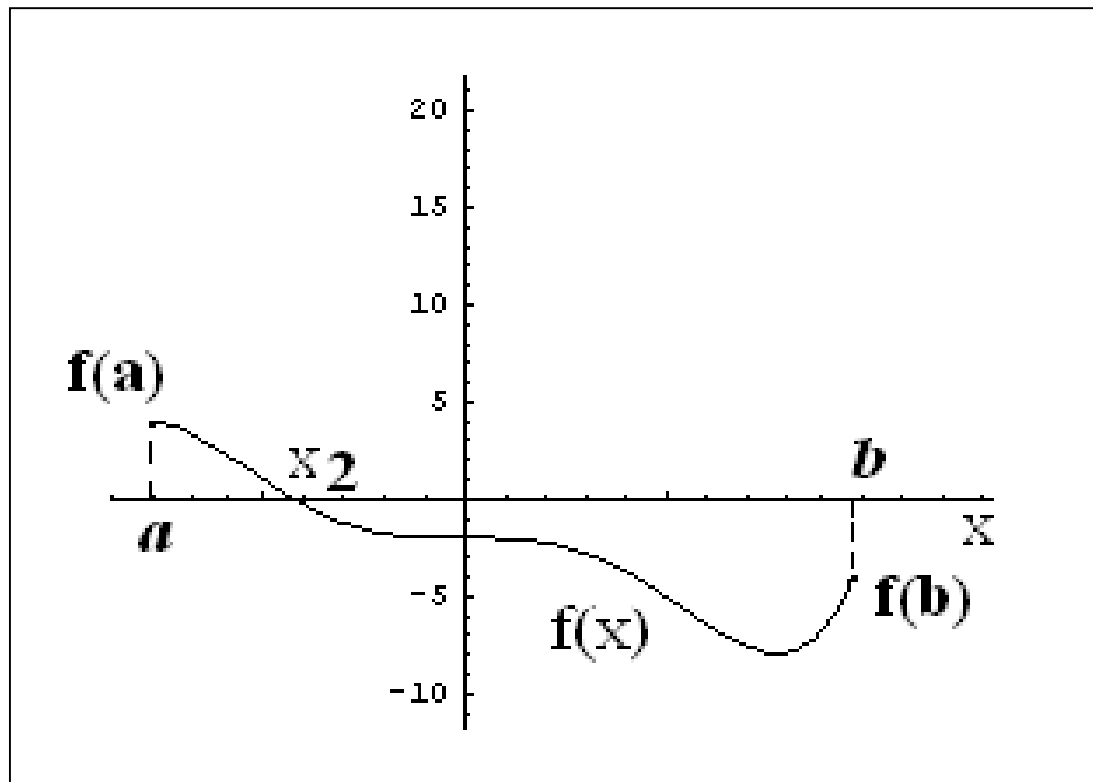
Нека $f(x)$ е реална функция, дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал $[a, b]$. Ако в краищата a, b функцията има различни знаци, т.е. произведението $f(a)f(b) < 0$, то в интервала има поне един реален корен. Това е илюстрирано на Фиг. 1.1.



Фиг. 1.1

Очевидно функцията $f(x)$ е непрекъсната. Освен това тук $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$, т.е. $f(a)f(b) < 0$. В случая уравнението $f(x) = 0$ има нечетен брой реални корени: x_1, x_2, x_3 .

На следващата Фиг. 1.2 е намален първоначалният интервал $[a, b]$ така, че е спазено условието $f(a)f(b) < 0$ и е локализиран само един реален корен (в случая x_2).



Фиг. 1.2. Локализиране на интервала.

Локализацията на корен е намирането на интервал $[a, b]$, в който съществува (поне) един реален корен. Локализирането е по-нестандартна процедура, но можем да посочим следните начини:

- **графичен**: строяваме графиката на функцията $f(x)$ и намираме приблизителната ѝ пресечна точка с оста Ox и интервал около нея,
- **аналитичен**: като използваме някои теореми от алгебрата, например в случая за корени на полиноми,
- **емпиричен**: с използване на априорна информация за физическия смисъл на решаваното уравнение и корените, на базата на експерименти.

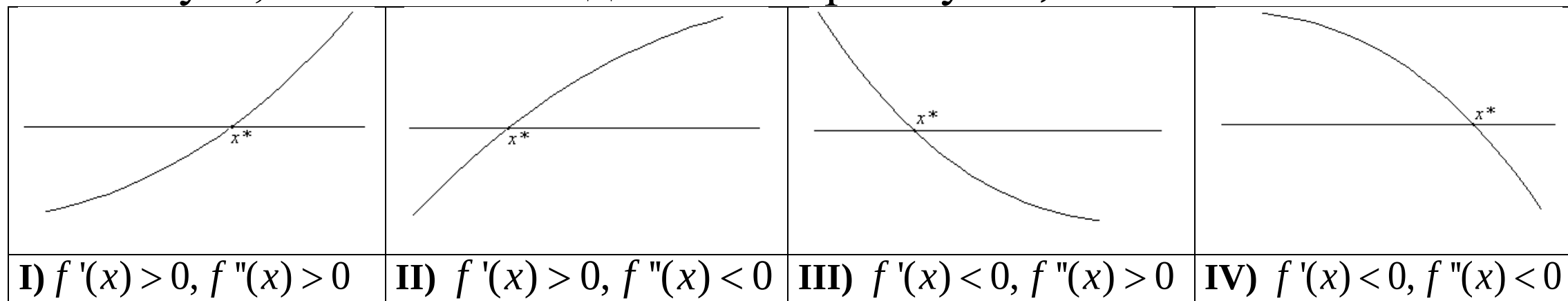
Уточняването на корена представлява следното: При предварително намерен интервал $[a, b]$, съдържащ корена x^* и зададено положително число ε , наричано точност, се търси точка $\tilde{x} \in [a, b]$, за която е в сила $|x^* - \tilde{x}| \leq \varepsilon$. Тази точка $\tilde{x}$ се приема за приближение на корена x^* .

1.4. Метод на Нютон (метод на допирателните) и итерационен алгоритъм

Условия за прилагане на метода на Нютон:

- а) $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ са дефинирани и непрекъснати в интервал $[a, b]$,
- б) $f(a)f(b) < 0$ - функцията има различни знаци в a и b ,
- в) $f'(x)$, $f''(x)$ са с постоянни знаци в $[a, b]$.

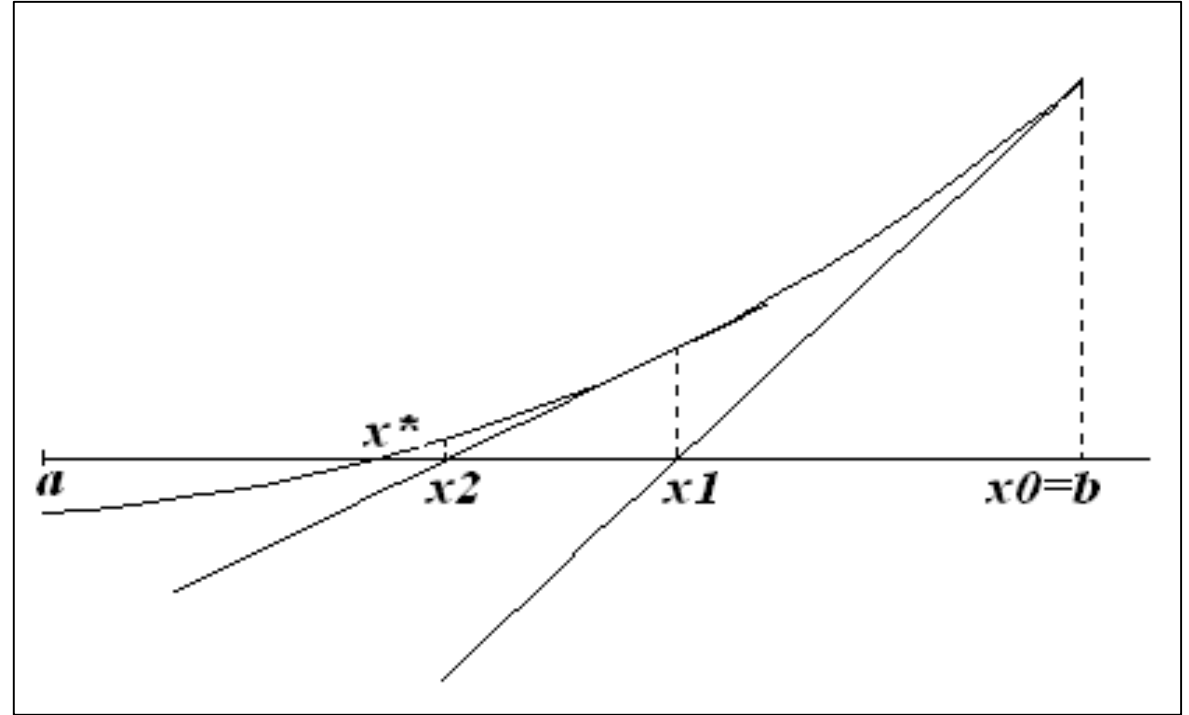
Не е трудно да се съобрази, че тези условия гарантират съществуването на точно един реален корен x^* в $[a, b]$. От в), производните не трябва да стават нула, т.е. имаме следните четири случая, показани на Фиг. 1.3.



Фиг. 1.3.

Идея на метода на Нютон (за случай I от Фиг. 1.3):

От единия край на интервала ($x_0 = b$) се построява допирателната към $f(x)$ и за първо приближение (итерация) x_1 към корена x^* се взима пресечната точка на допирателната с оста Ох. На следващата итерация се построява допирателната към $f(x)$ в точката x_1 и се получава x_2 като пресечна точка на допирателната с оста Ох и т.н.



Фиг. 1.4.

Така получаваме безкрайната редица от приближения: $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$

По-нататък с теоремата за неподвижната точка ще покажем, че:

- а) редицата е сходяща и клони към корена на уравнението $f(x) = 0$,
- б) скоростта на сходимост е квадратична.

Важен момент от метода на Нютон е изборът на началното приближение x_0 . Тъй като $x_1, \dots, x_k, \dots$ трябва да остават вътре в интервала $[a, b]$, то от геометрични съображения не трудно да се съобрази, че: за случаите I) и IV) $x_0 = b$, а за случаите II) и III) $x_0 = a$.

Еквивалентно условие е:

Да се избере x_0 в онзи край на интервала $[a, b]$, за който е изпълнено

$$f(x_0) f''(x_0) > 0. \quad (1.8)$$

Извод на итерационната формула на Нютон

Един елегантен и формален начин за извод на формулата на метода на Нютон е да приведем изходното уравнение $f(x) = 0$ в т. нар. нормален

вид $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, или по-общо

$$x = \varphi(x). \quad (1.9)$$

Очевидно всяко решение на уравнението $f(x) = 0$ е решение и на уравнение (1.9) и обратно (Защо?).

Нека изберем някакво начално приближение x_0 и го заместим в (1.9). Ще получим приближение x_1 , или първа итерация.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

От полученото x_1 определяме аналогично $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ и т.н.

Ако сме намерили x_k , следващото приближение x_{k+1} се пресмята по формулата:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.10)$$

или записано като **общ итерационен явен едностъпков метод**:

$$x_0, \quad x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.11)$$

Втори извод на формулата на Нютон – с уравнение на допирателната

Уравнението на допирателната d към кривата $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$ е:

$$d : y = k.x + b, \quad (1.12)$$

където $k = f'(x_0) = \operatorname{tg}(\alpha)$ е наклонът на правата d , която сключва ъгъл α с оста Ox . Тъй като искаме правата да минава през $(x_0, f(x_0))$, заместяваме тази точка в общия вид (1.12) и получаваме $f(x_0) = k.x_0 + b$, откъдето $b = f(x_0) - k.x_0$. Така уравнението на допирателната е:
 $d : y = f'(x_0).x + f(x_0) - f'(x_0).x_0$.

В метода на Нютон следващото приближение x_1 е пресечната точка на допирателната с Ox . Намираме го като положим $y = 0$, $x = x_1$ и намираме

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

По-нататък, при известно x_k следващото приближение x_{k+1} се изчислява по формула (1.10).

За изследване на сходимостта на метода на Нютон и други подобни итерационни методи (на хордите, комбиниран и др.), както и за други методи от този тип е валидна по-общата **теорема за неподвижната точка**. Тази теорема се използва и за много по-широки класове от математически задачи и е една от централните теореми в математиката.

Критерии за прекъсване на итерационния процес при достигане на зададена точност

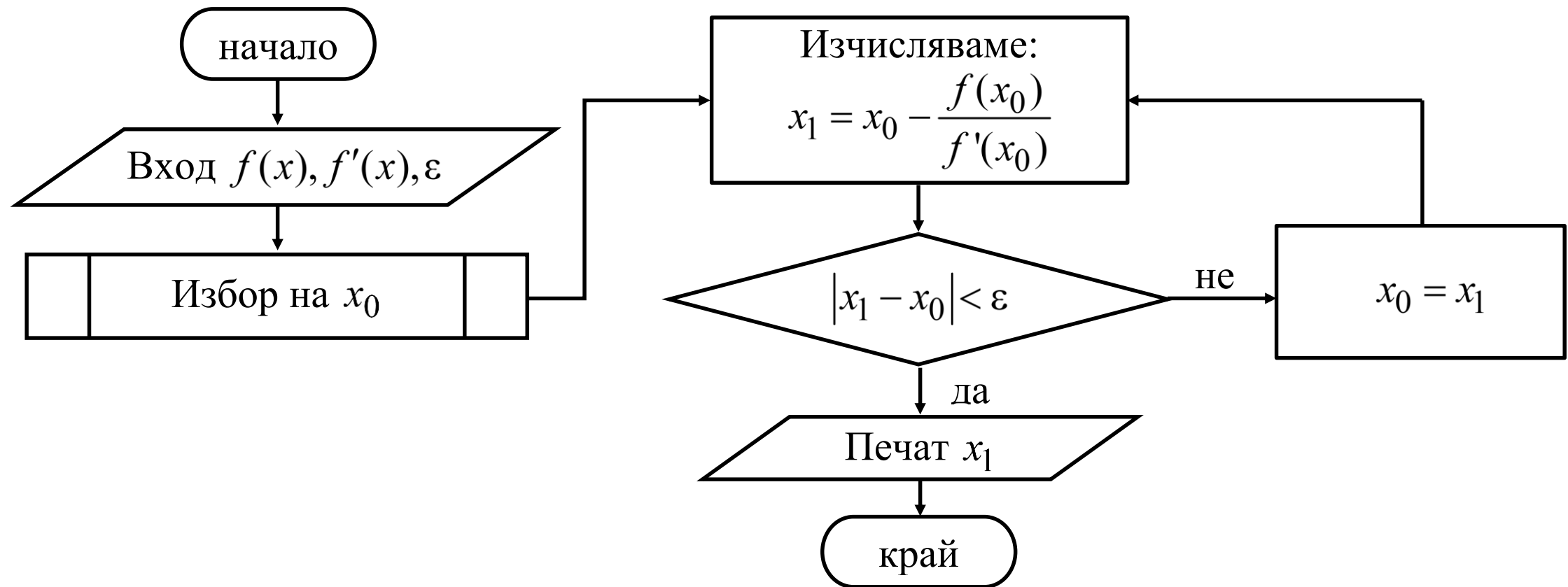
Нека коренът се търси със зададена точност $\varepsilon > 0$. Прекратяването на изчисленията по формула (1.10) може да стане при изпълнение на поне едно от следните условия:

- Когато $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ - прекъсване по абсолютна грешка
- Когато $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < \varepsilon$ - прекъсване по относителна грешка
- Когато $|f(x_k)| < \varepsilon$ - прекъсване по стойност на функцията.

Тези критерии са приложими и при други итерационни методи за решаване на уравнения.

1.5. Алгоритъм на метода на Нютон. Пример

Итерационният алгоритъм служи за уточняване на търсения реален корен на уравнението $f(x) = 0$ със зададена точност ε . Алгоритъмът е:



Фиг. 1.5. Блок схема на алгоритъма на метода на Нютон.

Пример 1.7. При химична реакция $\text{CO} + \frac{1}{2}\text{O}_2 \rightleftharpoons \text{CO}_2$ процентът на разлагане x на 1 мол въглероден диоксид CO_2 се описва със закона $\left(\frac{p}{k^2} - 1\right)x^3 + 3x - 2 = 0$, където p е налягането на CO_2 в атмосфери, а k е равновесна константа. Да се намери x за $k = 1,648$ (съответства на температура 2800 K) и $p = 1 \text{ atm}$ с точност 0,0001.

Решение: За да решим уравнението по метода на Нютон трябва да начертаяме графиката на функцията и да преценим в какъв интервал да търсим корен, а също и да проверим условията за избор на начално приближение x_0 .

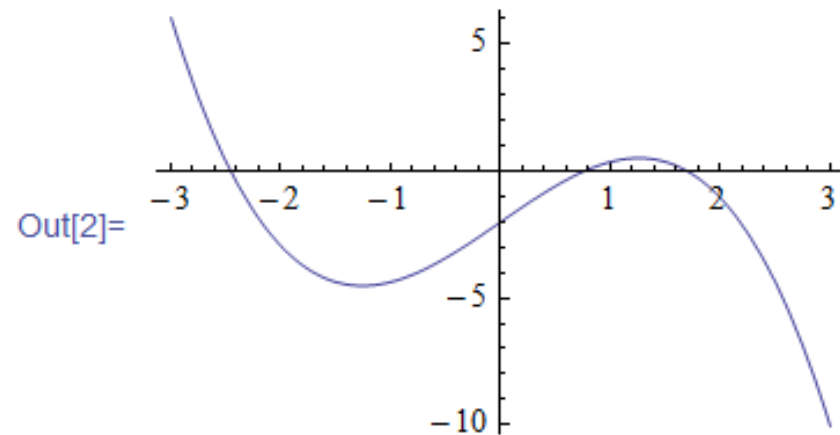
На Фиг. 1.6. е дадена графиката, построена с Wolfram Mathematica.

```
In[1]:= f[x_] := (1 / 1.648^2 - 1) x^3 + 3 x - 2
```

```
(* Дефиниране на функцията f(x) *)
```

```
Plot[f[x], {x, -3, 3}]
```

```
(* Начертаване на графиката в интервала [-3, 3].*)
```

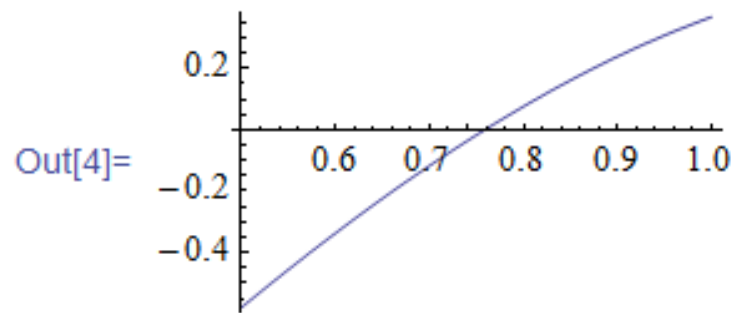


Фиг. 1.6.

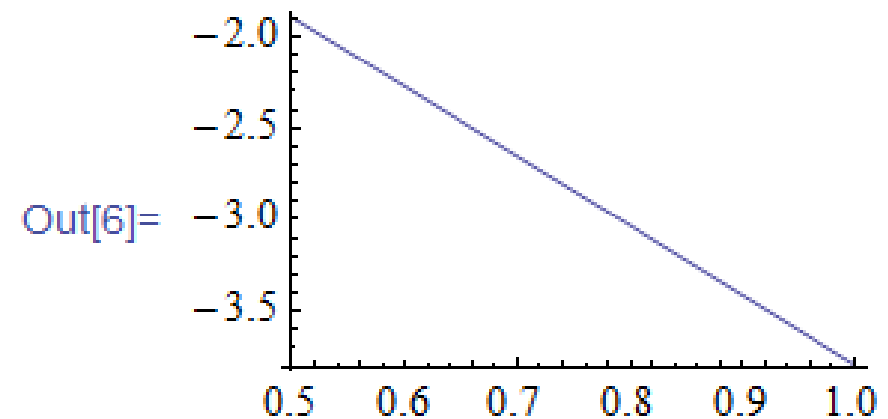
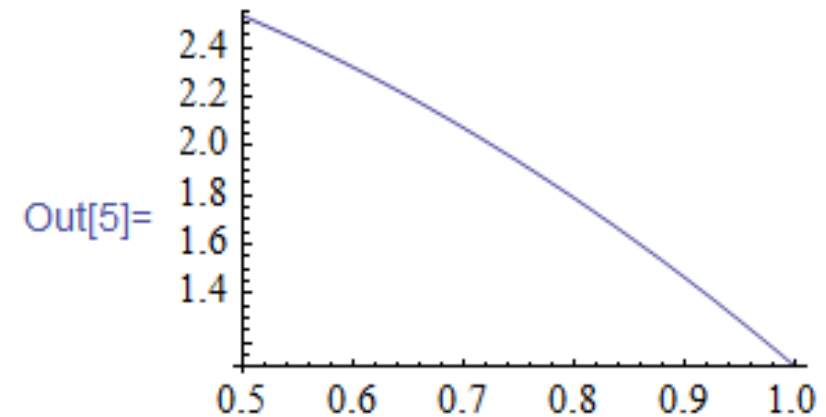
Графиката на функцията пресича оста Ox в три точки, които са реалните корени на уравнението. Търсеният процент на разлагане трябва да е положително число, по-малко от 1. Следователно търсеният корен е в интервала $[0,1]$. За по-бърза сходимост избираме работен начален интервал $[a,b]=[0,5; 1]$.

Начертаваме графиката в този интервал и проверяваме условията на метода на Нютон. По-специално първата и втората производни не трябва да се анулират никъде в интервала, където ще се прилага итерационната формула.

```
In[3]:= a = 0.5; b = 1.; epsi = 0.0001;  
(* Задаване на интервала и точността *)  
Plot[f[x], {x, a, b}]  
Plot[f'[x], {x, a, b}]  
Plot[f''[x], {x, a, b}]
```



Фиг. 1.7.



Десните графики показват, че $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$. Съгласно правилата, избираме начално приближение $x_0 = a$. Алгоритъмът води до:

```

In[12]:= x0 = a;
For[i = 1, i < 6, i++,
    x1 = x0 -  $\frac{f[x0]}{f'[x0]}$ ;
    Print[" i=", i, "    x1=", x1, "    разлика=", Abs[x1 - x0]];
    x0 = x1; ]

```

i=1	x1=0.729192	разлика=0.229192
i=2	x1=0.757999	разлика=0.0288068
i=3	x1=0.758607	разлика=0.000608076
i=4	x1=0.758608	разлика= 2.78318×10^{-7}
i=5	x1=0.758608	разлика= 5.83977×10^{-14}

Виждаме, че точността 0,0001 се постига след 4 итерации.

Отговор: Процентът на разлагане е $x = 0.7586\%$.

Някои предварителни понятия от функционалния анализ

Определение. Едно множество X с елементи (точки) $x, y, z, \dots$ се нарича **метрично пространство**, ако за всяка наредена двойка елементи $x, y \in X$ е съпоставено реално число $d(x, y)$ (разстояние между x, y , или метрика), такова че за всички $x, y, z \in X$:

1⁰) $d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = 0$ тогава и само тогава, когато $x = y$,

2⁰) $d(x, y) = d(y, x)$ - симетричност,

3⁰) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (неравенство на триъгълника).

Определение. Казваме, че една редица от точки $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots \in X$ е **сходяща по метрика** в X , ако съществува точка $a \in X$, такава че числовата редица от разстоянията им до a е сходяща, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x^{(k)}, a) = 0.$$

Определение. Казваме, че една редица от точки $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots \in X$ е **фундаментална редица (или редица на Коши)**, ако съществува границата $\lim_{k,m \rightarrow \infty} d(x^{(m)}, x^{(k)}) = 0$.

Определение. Казваме, че X е **пълно метрично пространство**, ако всяка фундаментална редица е сходяща в X (границата ѝ е точка от X).

Определение. Нека операторът (изображението) $\varphi: X \rightarrow X$ съпоставя на всяка точка $x \in X$ нова точка $\varphi(x) \in X$.

Казваме, че φ е **свиващ оператор в X** , ако съществува реално число $q, 0 < q < 1$, такова че за всички $x, y \in X$ е изпълнено $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q \cdot d(x, y)$.

Определение. Точката $x^* \in X$ се нарича **неподвижна точка** на свиващия оператор φ , ако съвпада с изображението си:

$$x^* = \varphi(x^*). \quad (1.13)$$

Следователно, неподвижната точка е решение на уравнението (1.13).

Пример 1.8. а) Реалните числа и комплексните числа са метрични пространства с метрика $d(x, y) = |x - y|$.

б) Векторните пространства са метрични, напр. пространството на n -мерните вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ е метрично с метрика $d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$ - евклидовото разстояние между векторите $\vec{a}, \vec{b}$, зададени с координатите им.

Теорема за неподвижната точка (н. т.)

Нека X е пълно метрично пространство и $\varphi(x)$ е свиващ оператор в X . Тогава $\varphi(x)$ притежава единствена неподвижна точка $x^* \in X$, която се получава като граница на явния едностъпков итерационен процес:

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

при $k \rightarrow \infty$ за произволен елемент $x^{(0)} \in X$, наричан начално приближение.

Теорема за неподвижната точка (усилена формулировка)

Във формулировката на горната теорема може да се уточни, че $\varphi(x)$ е достатъчно да бъде свиващ оператор само в някаква околност Ω_α на избраното начално приближение $x^{(0)}$.

Сходимость на метода на Ньютон

(следствие от Теорема за н.т.)

Теорема. Нека в достатъчно малка околност на корена x^* са изпълнени условията за метода на Ньютон, т.е. съществува единствен реален прост корен. Тогава методът (1.10) е сходящ при произволно начално приближение x_0 от тази област и скоростта на сходимость е квадратична.

Квадратична сходимость означава, че грешката от поредното $k+1$ -во приближение е приблизително равна на квадрата на предишното k -то приближение. (Предполага се, че $\varphi''(x)$ не е много голяма в областта.).

Например, ако за някое k имаме достигната точност 10^{-2} , на следващото приближение $k+1$ грешката ще бъде 10^{-4} , на $k+2$ - 10^{-8} и т.н.

Поради горните качества на метода на Нютон, той е сред най-предпочитаните за решаване на уравнения. Лесно се обобщава и за случая на системи нелинейни уравнения.

Може да се покаже, че за грешката на метода на Нютон е валидна оценката:

$$\left| x^* - x_n \right| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2,$$

$$\text{където } M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Следователно, за достигане на зададена точност ε на n -то приближение, достатъчно е да е изпълнено

$$\frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon.$$

Обобщение: Метод на Нютон за системи нелинейни уравнения

Постановка на задачата:

Търсят се решенията на система от n нелинейни уравнения с n неизвестни:

$$\left| \begin{array}{lcl} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ \dots & & . \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

Извод на метода на Нютон

Ако въведем векторен запис, ще получим: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$,

където $\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{0}$ е нулевият вектор.

Въвеждаме якобиана:

$$jac(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и нека в околност на някакъв корен съществува обратната матрица

$$J(\vec{x}) = jac^{-1}(\vec{x}).$$

Тогава веднага получаваме следното обобщение на метода на Нютон:

$$\vec{x} = \vec{x} - J(\vec{x})\vec{F}(\vec{x})$$

и съответния му итерационен процес:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J(\vec{x}^{(k)})\vec{F}(\vec{x}^{(k)}), k=0,1,2, \dots \quad (1.15)$$

За прилагане на формула (1.15) е необходимо да се решават следните трудни подзадачи:

- локализиране на корен,
- намиране на подходящо начално приближение $\vec{x}^{(0)}$,
- обръщане на матрицата jac на всяка итерация k .

Програмирани методи и примери за решаване на уравнения и системи уравнения с *Wolfram Mathematica* може да намерите на:

http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/numanmenu/programs_list.htm

1.6. Числено решаване на системи линейни алгебрични уравнения (СЛУ) с метод на простата итерация

Системи линейни уравнения, детерминанти и обратни матрици

Постановка на задачата. Търси се решението на системата линейни алгебрични уравнения

$$Ax = b,$$

където A е матрица с реални коефициенти с размерност $n \times n$,
 x – вектор на неизвестните, b – дясна част:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

В разгънат вид системата е:

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \cdots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$$

Без ограничения на общността ще считаме, че задачата е коректна, т.е. съществува единствено решение на тази система. Както е добре известно от линейната алгебра, необходимо и достатъчно условие за това е детерминантата $\det A \neq 0$.

В курса по Линейна алгебра са изучавани методът на Гаус и методът на Гаус-Жордан. В нашия курс ще покажем как се изчислява решението на задачата с помощта на система *Mathematica*.

Пример 1.9. Да се реши системата уравнения, да се намери детерминантата и обратната матрица.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ \quad + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}.$$

Решение: Записваме и изпълняваме следните няколко клетки в *Mathematica*:

Решаване на системи уравнения от вида $A \cdot x = b$,
намиране на детерминантата и обратната матрица на A .

```
a = {{2, 1, 2, 3}, {-2, 3, 2, -3}, {0, 4, 2, 3}, {1, 1, 1, 1}};
MatrixForm[a]
b = {-1, 2, 4, 5}; MatrixForm[b]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
xx = LinearSolve[a, b]
```

```
{ 169/20 , 73/10 , -141/20 , -37/10 }
```

```
(* Проверка на решението със заместване *)
```

```
a.xx - b
```

```
{0, 0, 0, 0}
```

```
(* Детерминанта на матрицата A *)
```

```
Det[a]
```

```
20
```

(* Обратна матрица *)

`obr = Inverse[a] ; MatrixForm[obr]`

$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{19}{20} & \frac{7}{20} & -\frac{1}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Отговор.

Точното

решение

е:

$$x_1 = \frac{169}{20}, \quad x_2 = \frac{73}{10}, \quad x_3 = -\frac{141}{20}, \quad x_4 = -\frac{37}{10},$$

детерминантата е =20, обратната матрица – получената по-горе.

Метод на простата итерация за системи линейни алгебрични уравнения

За да построим процеса на проста итерация, аналогично на итерационните методи за едно уравнение, изходният вид на системата трябва да е от тип $x = \varphi(x)$ с процес $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$

Най-често привеждането към такъв вид става така: първото уравнение се дели на a_{11} и всички останали членове се прехвърлят отдясно, второто уравнение се дели на a_{22} и т.н. Така от всяко уравнение се изразява неизвестното x_i от i -тия ред на системата. Стигаме до вида:

$$x = Cx + d \quad (1.16)$$

и итерационен процес, наречен проста итерация или метод на Якоби:

$$x^{(0)}, \quad x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.17)$$

където $x^{(0)}$ е произволно начално приближение.

От (1.17) последователно изчисляваме редицата от приближения:

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots \quad (1.18)$$

Както при итерационните методи за едно уравнение, формулата (1.17) определя явен процес, т.е. заместваме известна стойност $x^{(k)}$ в дясната част и изчисляваме следващото приближение $x^{(k+1)}$. Повтаряме процеса и получаваме последователно редицата (1.18).

Критерии за прекъсване на итерационния процес

За получаване на решение с желана точност ε използваме някой от следните критерии:

- 1) $\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$ - по абсолютна грешка,
- 2) $\frac{\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|}{\left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$ - по относителна грешка.

Може и със заместване в уравненията.

Пример за метода на проста итерация

Пример 1.10. Да се реши по метода на проста итерация системата:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = -14 \end{cases} \quad (1.19)$$

С директна проверка се вижда, че точното решение е: $x = (1, 2, 3)$.

Решение. 1) Привеждане към вид, удобен за итерация:

Делим първото уравнение на 10, второто на 5 и третото на (-5) и изразяваме неизвестните от главния диагонал:

$$\begin{cases} x_1 = -0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.3 \\ x_2 = -0.2x_1 + 0.4x_3 + 1 \\ x_3 = -0.2x_1 + 0.2x_2 + 2.8 \end{cases}$$

Тук матрицата C и дясната част от (1.16)-(1.17) са:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0.4 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 2.8 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

2) Записваме формулите за пресмятане по проста итерация:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = & -0.1x_2^{(k)} & +0.3x_3^{(k)} & +0.3 \\ x_2^{(k+1)} = & -0.2x_1^{(k)} & +0.4x_3^{(k)} & +1 \\ x_3^{(k+1)} = & -0.2x_1^{(k)} & +0.2x_2^{(k)} & +2.8 \end{cases} \quad (1.21)$$

3) Избираме начално приближение $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Заместваме го отдясно (при $k=0$) и получаваме 1-во приближение:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (-0.1).0 + (0.3).0 + 0.3 = 0.3, \quad x_2^{(1)} = (-0.2).0 + (0.4).0 + 1 = 1, \\ x_3^{(1)} &= (-0.2).0 + (0.2).0 + 2.8 = 2.8, \text{ т.е. } x^{(1)} = (0.3, 1, 2.8)^T. \end{aligned}$$

За второ приближение заместваме полученото $x^{(1)}$ вдясно на (1.21):

$$x_1^{(2)} = (-0.1).1 + (0.3).2.8 + 0.3 = 1.04, \quad x_2^{(2)} = (-0.2).(0.3) + (0.4).(2.8) + 1 = 2.06, \\ x_3^{(2)} = (-0.2).(0.3) + (0.2).1 + 2.8 = 2.94, \text{ т.е. } x^{(2)} = (1.04, 2.06, 2.94)^T.$$

На следващата итерация заместваме тези стойности отдясно и т.н. Получаваме следната таблица от приближени решения:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$ x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} $	$ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} $	$ x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)} $
0	0	0	0			
1	0.3	1	2.8	0.3	1	2.8
2	1.04	2.06	2.94	0.74	1.06	0.14
3	0.976	1.968	3.004	0.064	0.092	0.064
4	1.0044	2.0064	2.9984	0.0284	0.0384	0.0056
5	0.99888	1.99848	3.0004	0.00552	0.00792	0.002
6	1.00027	2.00038	2.99992	0.00139	0.00190	0.00048
7	0.99994	1.99991	3.00002	0.000334	0.000108	0.000102

Отговор с точност $\varepsilon = 0.001$, $k=7$ (закръглен): $x \approx (1.000, 2.000, 3.000)^T$.

Пример 1.11. Решение на Пример 1.10 с *Mathematica*:

а) Зареждане на приведената матрица и дясна част по формула (1.20):

(* Проста итерация *)

```
c = { {0., -0.1, 0.3}, {-0.2, 0., 0.4}, {-0.2, 0.2, 0.} };
```

```
d = {0.3, 1., 2.8}; MatrixForm[c]
```

```
MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 0. & -0.1 & 0.3 \\ -0.2 & 0. & 0.4 \\ -0.2 & 0.2 & 0. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.3 \\ 1. \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

б) Зареждаме клетка за точността 0.001 и начално приближение $x^{(0)}$, (стандартно =0), след което в цикъл уточняваме по формула (1.17):

```

eps = 0.001;
x = {0., 0., 0.}
n = Length[x]; r = ∞; k = 0;
While[r ≥ eps,
  {k++; xnew = c.x + d; r = Max[Abs[xnew - x]]; x = xnew;
  Print[" итерация k=", k, "  x= ", x, "  текуща грешка= ", r] }]
{0., 0., 0.}

```

```

итерация k=1  x= {0.3, 1., 2.8}  текуща грешка= 2.8
итерация k=2  x= {1.04, 2.06, 2.94}  текуща грешка= 1.06
итерация k=3  x= {0.976, 1.968, 3.004}  текуща грешка= 0.092
итерация k=4  x= {1.0044, 2.0064, 2.9984}  текуща грешка= 0.0384
итерация k=5  x= {0.99888, 1.99848, 3.0004}  текуща грешка= 0.00792
итерация k=6  x= {1.00027, 2.00038, 2.99992}  текуща грешка= 0.001904
итерация k=7  x= {0.999938, 1.99991, 3.00002}  текуща грешка= 0.0004704

```

Отговор. $x_1 \approx 0.999938 \approx 1$, $x_2 \approx 0.99991 \approx 2$, $x_3 \approx 3.00002 \approx 3$ с точност 0.001.

Други решени примери може да намерите на:

http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/numanmenu/programs_list.htm

Норми на вектори и матрици

Разглеждаме n -мерното векторно пространство R^n , т.е.

$$x \in R^n: x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Определение. Казваме, че в R^n е дефинирана норма $\| \cdot \|$, ако на всяко $x \in R^n$ е съпоставено реално число $\| x \|$, такова че:

$$1^0) \| x \| \geq 0 \text{ и } \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2^0) \| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|, \text{ за всяко } x \in R^n, \lambda - \text{ произволно реално число};$$

$$3^0) \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \quad \forall x, y \in R^n, \quad - \text{ неравенство на триъгълника.}$$

Най-разпространените норми на вектор в R^n са:

$$\| x \|_1 = \max_{i=1, n} |x_i|, \quad (\text{кубична или чебишева норма}),$$

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{(x, x)} \text{ (евклидова)}. \quad (1.22)$$

Определение. Казваме, че е дефинирана норма на матрица $\|\cdot\|$, ако на всяка матрица от числа A с размерност $n \times n$ е съпоставено реално число $\|A\|$, такова че:

- 1⁰) $\|A\| \geq 0$ и $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- 2⁰) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$, λ - произволно число;
- 3⁰) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ за $\forall A, B$.- неравенство на триъгълника,
- 4⁰) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ за $\forall A, B$.

Определение. Казваме, че нормата на вектор и нормата на матрица за дадено n са съгласувани, ако е в сила $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Най-разпространените норми на матрици са:

$$\|A\|_1 = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \quad (1.23)$$

Пример 1.12. Да се изчислят нормите на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. За първа норма $\|A\|_1$ събираме модулите на елементите по

редове: $i = 1: \sum_{j=1}^4 |a_{1j}| = |5| + |-2| + |0| + |2| = 9, \quad i = 2: \sum_{j=1}^4 |a_{2j}| = |-2| + |-4| + |4| + |0| = 10,$

$$i = 3: \sum_{j=1}^4 |a_{3j}| = 6 \text{ и } i = 4: \sum_{j=1}^4 |a_{4j}| = 8. \text{ Така } \|A\|_1 = \max\{9, 10, 6, 8\} = 10.$$

За втора норма аналогично по стълбове:

$$j = 1: \sum_{i=1}^4 |a_{i1}| = |5| + |-2| + |0| + |1| = 8, \quad j = 2: \sum_{i=1}^4 |a_{i2}| = 7, \quad j = 3: \sum_{i=1}^4 |a_{i3}| = 7,$$

$$j = 4: \sum_{i=1}^4 |a_{i4}| = 11. \quad \text{Тогава } \|A\|_2 = \max\{8, 7, 7, 11\} = 11.$$

За третата норма $\|A\|_3$ пресмятаме по формулата

$$\|A\|_3 = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + \dots + 6^2} = \sqrt{129} \approx 11.358$$

Отговор. $\|A\|_1 = 10, \quad \|A\|_2 = 11, \quad \|A\|_3 \approx 11.36.$

1.7. Условия за сходимост на метода на простата итерация за системи линейни алгебрични уравнения

Валидна е следната важна

Теорема за сходимост на метода на простата итерация

Достатъчното условие за сходимост на итерационния процес (1.16)-(1.17) при произволно начално приближение $x^{(0)}$ е поне една норма на матрицата C да е по-малка от 1, т.е. да е изпълнено поне едно от следните неравенства:

$$\|C\|_1 = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad \|C\|_2 = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad \|C\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2} < 1.$$

Пример 1.13. За системата (1.19) ще проверим условието за сходимост. Имаме матрицата

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0.4 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме $\|C\|_1 = \max_{i=1,3} \sum_{j=1}^3 |c_{ij}| = \max\{0.4, 0.6, 0.4\} = 0.6 < 1,$

$$\|C\|_2 = \max_{j=1,3} \sum_{i=1}^3 |c_{ij}| = \max\{0.4, 0.3, 0.7\} = 0.7 < 1,$$

$$\|C\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^2} = \sqrt{0.01 + 0.09 + 0.04 + 0.04 + 0.04 + 0.16} = \sqrt{0.38} = 0.62 < 1.$$

В случая и трите норми са по-малки от 1. Следователно, методът на простата итерация е сходящ.

Обобщение на метода на простата итерация за системи нелинейни уравнения (СНУ)

Постановка на задачата. Нека е дадена СНУ $F(x) = 0$, във вида:

$$\left| \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right., \text{ или във вида: } x = \Phi(x): \left| \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Последното представяне вдясно е готово за прилагане на метода на простата итерация $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Остава да се реши въпросът за началното приближение и за условията за сходимост на метода. В частност тези условия са валидни и за системи линейни алгебрични уравнения.

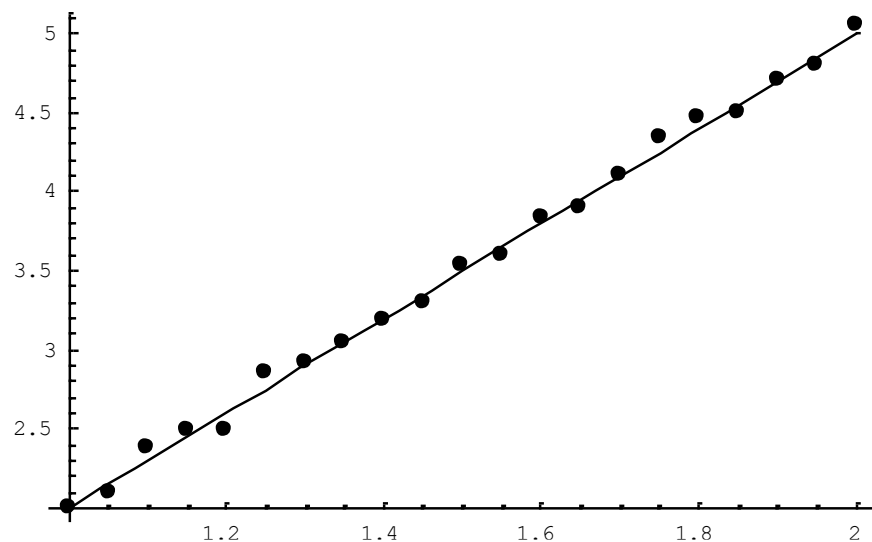
ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖАВАНЕ НА ТАБЛИЧНИ ДАННИ

2.1. Основни етапи при приближаване на функции, зададени в таблична форма

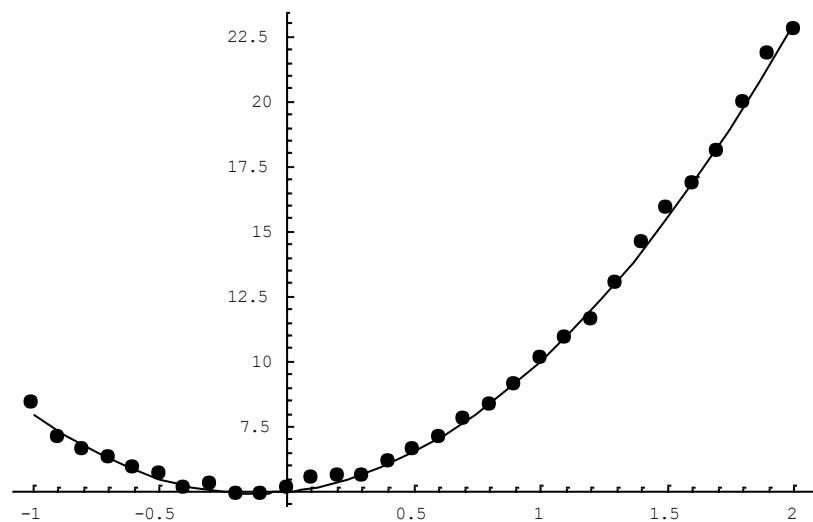
Приближаването на функции е основна задача не само в теоретичен, но и в чисто приложен аспект. В общия случай считаме, че функцията е известна в крайно множество от точки и търсим нейна стойност в някаква друга точка. Тук ще се ограничим с функция на една променлива. Стандартната процедура при приближаване на функции е:

- а) Начертаваме графиката на функцията по известните точки $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$.
- б) Опитваме се да “познаем” вида (класа) на търсената функция по графиката; тя може да прилича, например на полином от някаква степен (права линия – полином от първа степен, парабола – полином от втора степен и т.н.), тригонометрична функция, експоненциална, логаритмична и т.н.

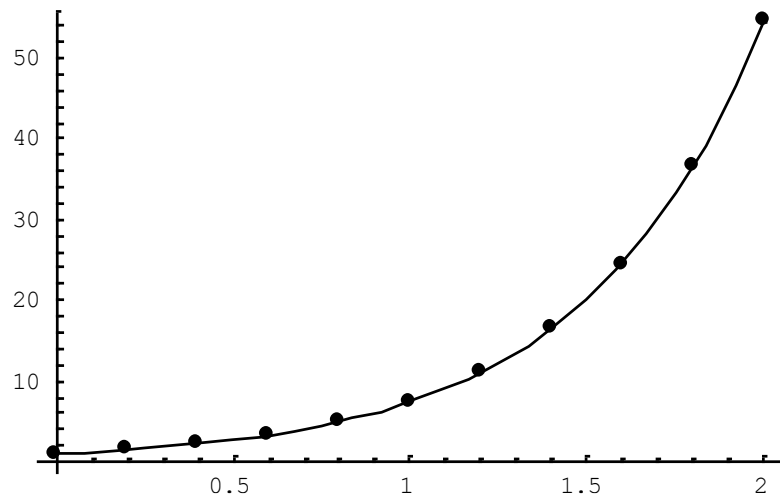
Примери:



Правна линия: $y(x) \approx ax + b$



Парабола: $y(x) \approx ax^2 + bx + c$



Експонента: $y(x) \approx a.e^{\lambda x}$

- в) Според броя на точките и класа на функцията и други характеристики на приближаваната функция използваме различен метод за нейното приближаване.
- г) Получаваме някаква формула, “близка” до данните.
- д) Използваме получената приближаваща формула, за да пресметнем стойности на функцията в точки, в които не разполагаме с данни.

Методи за приближаване

Интерполиране, метод на най-малките квадрати, сплайни и др.

2.2. Задача на интерполирането

Постановка на задачата. Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в някакъв интервал и е известна таблица от стойностите ѝ

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

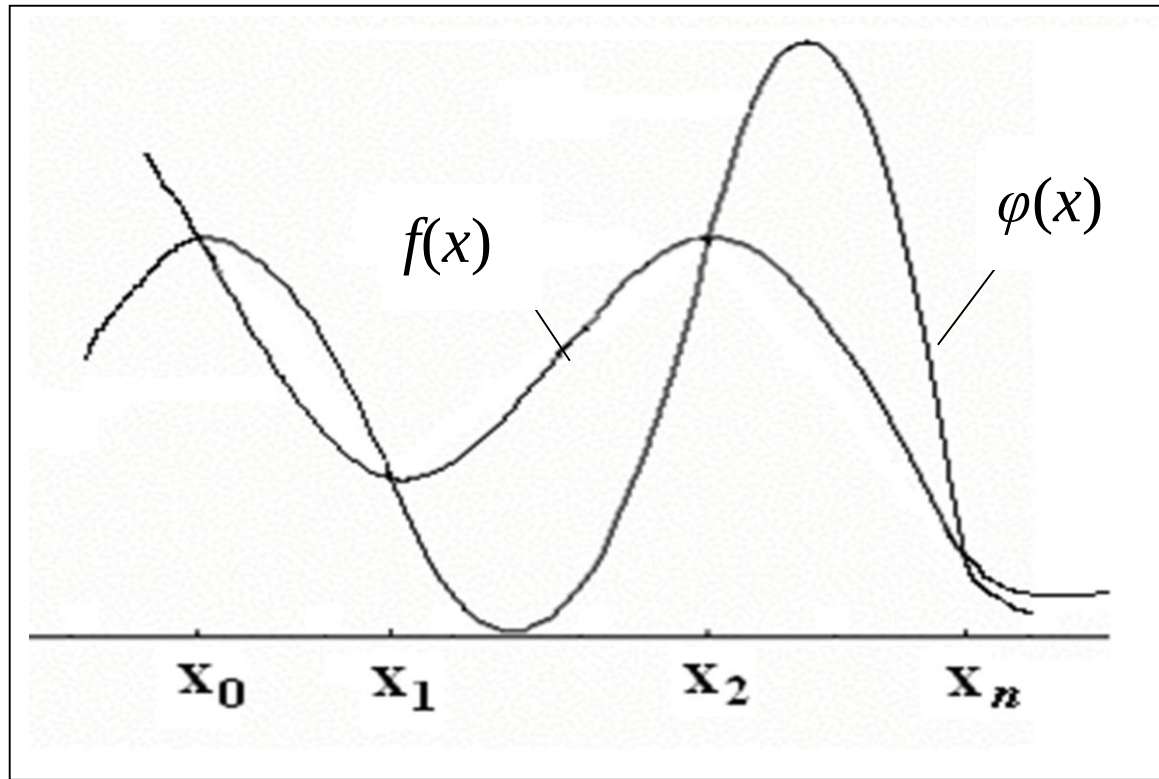
Търси се приближаваща функция $\varphi(x)$, такава че

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Тази задача се решава при задаване класа на функциите $\varphi(x)$.

Определение. Точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ се наричат възли на интерполирането.

Графично условието (2.1) означава, че приближаващата функция $\varphi(x)$ минава през точките (x_i, y_i) , тъй като има в x_i същите стойности като $f(x)$ - виж следващата фигура.



Примери.

а) Ако изберем системата от функции $1, x, x^2, \dots, x^n$ и разгледаме всички линейни комбинации по тази система, ще получим класа на полиномите от n -та степен $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Интерполационният полином ще се определя от условието

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

б) Ако изберем системата функции

$$\frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots$$

ще получим класа на тригонометричните полиноми от n -та степен $T_n(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ и т.н.

Според вида на всяка конкретна функция $f(x)$ най-напред се определя класа приближаващи функции, а след това и съответната интерполираща функция (полином) $\varphi(x)$ по условието (2.1).

2.3. Интерполационен полином на Лагранж. Оценка на грешката от интерполиране. Примери

Дадена е таблицата със стойности на функцията $y = f(x)$:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Търси се приближаваща функция във вид на полином

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \text{ така че}$$

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Без ограничение по-нататък ще считаме, че възлите са подредени във възходящ ред, т.е. $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Съществуването на такъв полином се осигурява със следния интерполационен полином на Лагранж, който има вида:

$$L(x; f) = \sum_{i=0}^n y_i F_i(x), \quad (2.3)$$

където $F_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ са коефициентите на Лагранж. Те имат

свойствата: $F_i(x_i) = 1$, $F_i(x_j) = 0$, $i \neq j$.

Формулата добива вида:

$$L_n(x; f) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (2.4)$$

Формулата (2.3), съответно (2.4), се записва подробно така:

$$\begin{aligned}
 L_n(x; f) = & y_0 \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots \\
 & + y_k \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} + \dots \\
 & + y_n \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Очевидно този полином удовлетворява условията (2.2). Проверка:
 При $x = x_0$,

$$\begin{aligned}
 L_n(x_0) = & y_0 \frac{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots \\
 & + y_n \frac{(x_0 - x_0) \dots (x_0 - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} = y_0 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = y_0
 \end{aligned}$$

При $x = x_1$,

$$L_n(x_1) = y_0 \frac{(x_1 - x_1) \dots (x_1 - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots$$

$$+ y_n \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \dots (x_1 - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 + \dots + 0 = y_1$$

и т.н. за всички възли x_i .

Съществуване и единственост на интерполационния полином

В сила е следното твърдение:

Ако всички интерполационни възли са различни, т.е. $x_i \neq x_j, i \neq j$, то интерполационният полином на Лагранж е единствен.

Без доказателство ще приведем следната

Теорема за оценка на грешката от интерполиране

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и освен това съществуват и са непрекъснати в $[a, b]$ и производните ѝ до $n+1$ -ви ред: $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$. Нека по стойностите на функцията във възлите $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $x_i \in [a, b]$ е построен интерполационният полином на Лагранж. Тогава за всяка точка x от дефиниционната област е в сила следната оценка за грешката в тази точка:

$$f(x) - L_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad \xi \in (a, b) \quad (2.6)$$

или като оценка на абсолютната грешка:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|, \quad M_{n+1} = \max_{[a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \quad (2.7)$$

Особености при интерполиране с алгебрични полиноми

1. От оценката на грешката (2.6)-(2.7) лесно се съобразява, че грешката е малка, когато възлите са близко един до друг, така, че произведението $|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$ да бъде число близко до нула.
2. По същите съображения е добре така да избираме възлите, че точката x , в която търсим стойност да бъде по възможност между възлите на интерполиране. Когато x е извън интервала на възлите, казваме, че се прави екстраполиране. В някои случаи е възможна само екстраполация, но грешката е по-голяма.
3. Теоретично е доказано, че при степен $n > 6$ интерполационният полином обикновено все по-силно „скача“ около функцията. Затова се интерполира при неголеми n .

Пример 2.1. Дадена е следната таблица на функцията $y = f(x) = \sqrt{x+3}$:

x_i	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_i	2.	2.049	2.098	2.145	2.191	2.236

Да се намери приближена стойност в точката $x' = 1.65$ с полином на Лагранж от втора степен и да се оцени теоретичната грешка.

Решение. За да построим полинома от втора степен ($n=2$) са необходими 3 възела. Съгласно горните забележки, като знаем, че $x' = 1.65$, избираме възли на интерполирането $x_0 = 1.6$, $x_1 = 1.8$, $x_2 = 2$, така че x' да е вътре в интервала $[1.6, 2.0]$. Това ще намали грешката. Формулата на полинома от втора степен, съгласно (2.5) е:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Като заместим x с $x' = 1.65$ и възлите $x_0 = 1.6, x_1 = 1.8, x_2 = 2$ получаваме:

$$L_2(1.65) = 2.145 \frac{(1.65-1.8)(1.65-2)}{(1.6-1.8)(1.6-2)} + 2.191 \frac{(1.65-1.6)(1.65-2)}{(1.8-1.6)(1.8-2)} + 2.236 \frac{(1.65-1.6)(1.65-1.8)}{(2-1.6)(2-1.8)}$$

$$L_2(1.65) = 2.145 \frac{(-0.15)(-0.35)}{(-0.2)(-0.4)} + 2.191 \frac{(0.05)(-0.35)}{(0.2)(-0.2)} + 2.236 \frac{(0.05)(-0.15)}{(0.4)(0.2)}$$

$$L_2(1.65) = 2.145 * 0.6562 + 2.191 * 0.4375 + 2.236 * (-0.09375) \approx 2.15659.$$

Нашите данни са с 3 знака след десетичната точка (неотстранима грешка = 0.001), затова закръгляме резултата на $f(x') \approx 2.157$.

Пример 2.2. Решение на Пример 2.1 с *Mathematica*.

```
In[11]:= xx = 1.65; y = {2.145, 2.191, 2.236}; (*с три знака*)
```

$$L2[x_] := y_{[1]} \frac{(x - x_{i[2]}) (x - x_{i[3]})}{(x_{i[1]} - x_{i[2]}) (x_{i[1]} - x_{i[3]})} +$$

$$y_{[2]} \frac{(x - x_{i[1]}) (x - x_{i[3]})}{(x_{i[2]} - x_{i[1]}) (x_{i[2]} - x_{i[3]})} + y_{[3]} \frac{(x - x_{i[1]}) (x - x_{i[2]})}{(x_{i[3]} - x_{i[1]}) (x_{i[3]} - x_{i[2]})}$$

```
z = Expand[L2[x]]
```

```
L2[xx] (* Приближена стойност *)
```

```
L2[xi[[2]]] (* Проверка *)
```

```
f[xx] (* Точна стойност*)
```

```
Out[13]=
```

$$1.741 + 0.2725 x - 0.0125 x^2$$

```
Out[14]=
```

```
2.15659
```

```
Out[15]=
```

```
2.191
```

```
Out[16]=
```

```
2.15639
```

Оценка на грешката. В случая $n=2$, затова по формула (2.7) пресмятаме третата производна и начертаваме графиката ѝ. От графиката се вижда, че в случая максималната стойност на $|f'''(x)|$ е в точката $x = 1.6$.

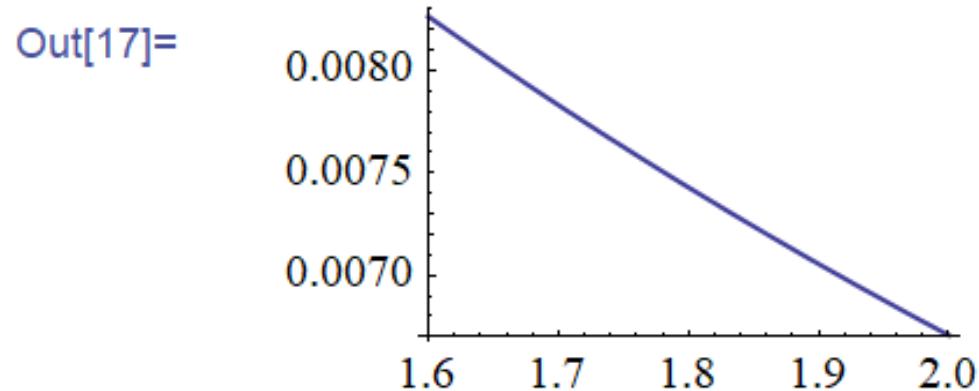
```
In[15]:= D[x,x,x] f[x] (*трета производна*)
```

```
Out[15]= 
$$\frac{3}{8 (3. + x)^{5/2}}$$

```

```
In[16]:= f3[x_] := 
$$\frac{3}{8 (3. + x)^{5/2}}$$
 (*Копираме горната формулата*)
```

```
Plot[Abs[f3[x]], {x, 1.6, 2.}]
```



Теоретичната грешка е:

```
In[19]:= m3 = Abs[f3[1.6]]
```

```
greshka = m3 * Abs[(xx - xi[[1]]) (xx - xi[[2]]) (xx - xi[[3]])] / 3!
```

```
Out[19]=
```

```
0.00826298
```

```
Out[20]=
```

```
3.61505 × 10-6
```

Получихме теоретична грешка на метода от порядъка 0.0000036. Но тъй като неотстранимата ни грешка беше $\varepsilon = 0.001$, то се взима по-лошата грешка, т.е. 0.001. Така крайният резултат на приближената стойност с интерполационния полином на Лагранж е вярна само с три знака, или $f(1.65) = \sqrt{1.65 + 3} \approx 2.157$. Като сравним с точната стойност, която в случая знаем и е 2.15639, виждаме, че това отговаря на истината.

Освен това, като прегледаме първоначалните данни виждаме, че точката $x'=1.65$ е между точките 1.6 и 1.8, в които стойностите на функцията са съответно :

за $1.6 \rightarrow 2.145$, за $1.8 \rightarrow 2.191$,

а ние получихме приближено за $1.65 \rightarrow 2.157$, т.е. е число между тях. Кое то прилича на истина, дори и да не знаехме точната стойност! Това е един от критериите за правилност на резултата в общия случай.

В този пример успяхме да намерим грешката, като използвахме формула (2.7). В реалния случай обаче, формулата на функцията не е известна, а само нейни значения в определен брой точки. Дори обикновено не се знае дали съществуват някакви производни и до какъв ред. Затова теоретичното оценяване на грешката има ограничено приложение и е съществено при прилагане на формулите, избор на точките на интерполиране и др. (Виж особености при интерполирането по-горе).

2.4. Метод на най-малките квадрати (МНМК) с алгебрични полиноми

Често при провеждане на експерименти се натрупва голямо количество таблици от данни на някаква зависимост, за която експериментаторът желае да установи аналитичен закон (формула), която възможно най-добре да описва данните. Обикновено тези данни са получени с голяма неотстранима грешка, най-вече зависеща от точността на прибора, методиката на измерване и други фактори. Ще разгледаме случая, когато търсим да приближим реална функция на една реална променлива.

Исходна постановка. Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в някакъв интервал, в който е известна таблица от стойностите ѝ

x_i	x_1	x_2	...	x_N
y_i	y_1	y_2	...	y_N

Тук точките $x_1, x_2, \dots, x_N$ не е задължително да са различни както при интерполирането.

Да предположим, че е избрана система от базисни функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ и се търси приближение от вида

$$f(x) \approx c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x). \quad (2.8)$$

Този тип приближение е линейна комбинация на избраните $m+1$ на брой базисни функции $\varphi_j(x), j = 0, 1, \dots, m$ и се нарича обобщен полином. Очевидно (2.8) е линеен математически модел спрямо базисните функции. Коефициентите $c_j, j = 0, 1, \dots, m$ са неизвестни.

Най-често базисните функции са едночлените $\varphi_j(x) = x^j, j = 0, 1, \dots, m$.

По метода на най-малките квадрати търсим приближаващ полином във вид на алгебричен, подобно на полинома на Лагранж:

$$P_m(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m \quad (2.9)$$

Основно предположение е броят на данните N да е много по-голям от степента m на обобщения полином, или $N \gg m$.

Означаваме разликата (остатъка) между стойностите на функцията y_i и полинома $P_m(x)$ за всяка точка x_i с

$$r_i = P_m(x_i) - y_i = c_0 + c_1x_i + c_2x_i^2 + \dots + c_mx_i^m - y_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Критерият за намиране на коефициентите c_j в (2.9) по МНМК е сумата от квадратите на всички остатъци да бъде възможно най-малка. Стигаме до задачата: Измежду всички полиноми от дадена степен m да се намери този, за който

$$\sum_{i=1}^N r_i^2 = \min. \quad (2.10)$$

Минимумът тук зависи от $c_0, c_1, \dots, c_m$.

По-подробно, от (2.9) и (2.10) трябва да намерим минимума на функцията с променливи c_j :

$$\Phi(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=1}^N r_i^2 = \sum_{i=1}^N (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \dots c_m x_i^m - y_i)^2.$$

От математическия анализ е известно, че необходимото условие за екстремум на диференцируема функция на много променливи е всички частни производни да са равни на нула, т.е.

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{\partial \Phi(c_0, c_1, \dots, c_m)}{\partial c_0} = 0 \\
 \frac{\partial \Phi(c_0, c_1, \dots, c_m)}{\partial c_1} = 0 \\
 \dots \\
 \frac{\partial \Phi(c_0, c_1, \dots, c_m)}{\partial c_m} = 0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

За първото уравнение диференцираме спрямо c_0 при фиксирани останали коефициенти c_j (тук x_i, y_i са дадени).

Получаваме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = 2 \sum_{i=1}^N (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \dots c_m x_i^m - y_i) = 0.$$

За второто уравнение аналогично

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=1}^N (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \dots c_m x_i^m - y_i) x_i = 0$$

и т.н.

След приведение пред неизвестните стигаме до следната система линейни алгебрични уравнения за намиране на коефициентите $c_0, c_1, \dots, c_m$:

$$\begin{array}{l}
 Nc_0 + \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) c_1 + \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) c_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^N x_i^m \right) c_m = \sum_{i=1}^N y_i \\
 \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) c_0 + \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) c_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^N x_i^{m+1} \right) c_m = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\
 \dots \\
 \left(\sum_{i=1}^N x_i^m \right) c_0 + \left(\sum_{i=1}^N x_i^{m+1} \right) c_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^N x_i^{2m} \right) c_m = \sum_{i=1}^N x_i^m y_i
 \end{array} \tag{2.11}$$

Може да се покаже, че тази система има единствено решение. При не-много големи m тя може да се решава по метода на Гаус, Гаус-Жордан или др. При голяма степен m на полинома е известно, че (2.11) е лошо обусловена, тъй като детерминантата е малко число.

Затова МНМК с алгебрични полиноми от вида (2.9) се прилага при $m \leq 5$. За по-големи m се избират система ортогонални полиноми или друга система базисни функции.

Определение. Полиномът $P_m^*(x) = c_0^* + c_1^*x + \dots + c_m^*x^m$, чиито коефициенти $c_0^*, c_1^*, \dots, c_m^*$ са решения на (2.12) се нарича полином на най-добро приближение по МНМК към функцията $f(x)$.

Определение. Грешка на приближението по МНМК или средноквадратична грешка се нарича отклонението на полинома на най-добро приближение по МНМК

$$\delta_m = \sqrt{\sum_{i=1}^N r_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N (c_0^* + c_1^*x_i + c_2^*x_i^2 + \dots + c_m^*x_i^m - y_i)^2}. \quad (2.12)$$

Как се избира най-добрата степен m за полинома по МНМК?

Това в общия случай е труден проблем. Обикновено постъпват така:

Нека данните имат неотстранима грешка ε . Започва се с $m=1$, изчислява се δ_1 . Ако $\delta_1 \approx \varepsilon$, значи решението е добро. Ако ср. кв. грешка не е приблизително равна на ε , се продължава с $m=2$ и δ_2 и т.н., докато се намери оптималното m , за което $\delta_m \approx \varepsilon$. Ако има резки скокове и не може да се определи m , то се избират други базисни функции и т.н.

Пример 2.3. Приближение на данни по МНМК с *Mathematica*.

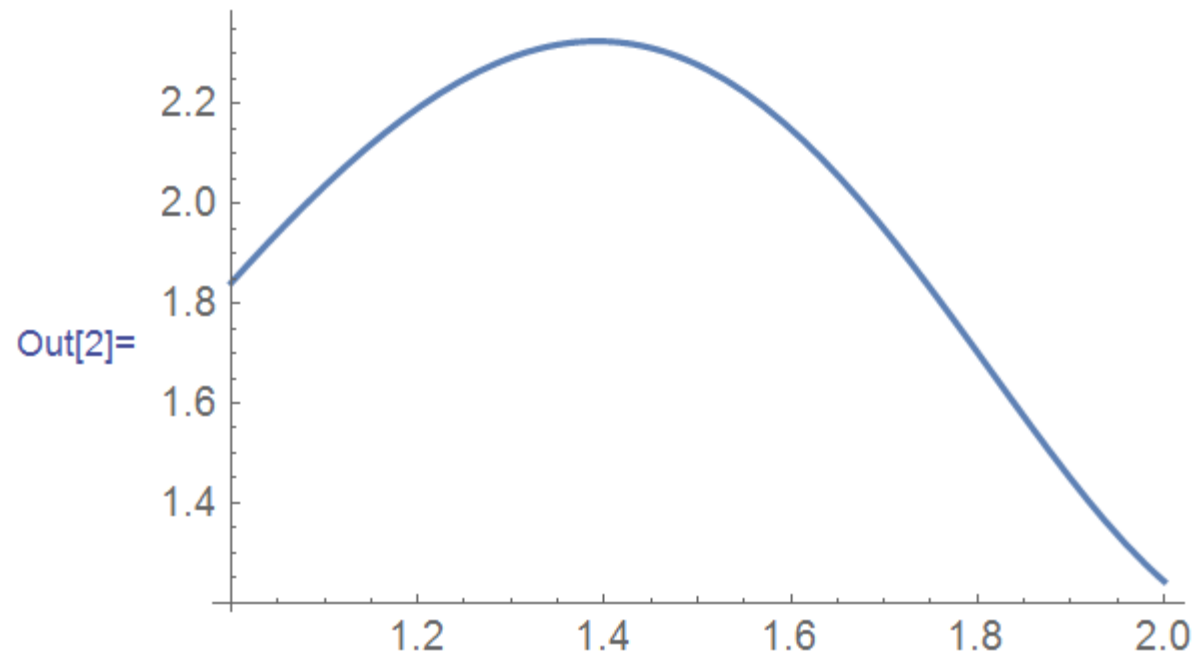
(http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/database/numan/leastssquares_BG/index.html)

Дадена е функцията $f(t) = t + \sin(t^2)$ в интервала $[1, 2]$.

- а) Да се табулира функцията в 11 точки в дадения интервал.
- б) Да се намери полиномът на най-добро приближение по МНМК от първа степен
- в) Да се оцени грешката на приближението.

Решение. а) Дефинираме функцията и начертаваме графиката ѝ в интервала $[1, 2]$:

```
In[1]:= f[t_] := t + Sin[t^2]
a = 1.; b = 2.; gf = Plot[f[t], {t, a, b}]
```



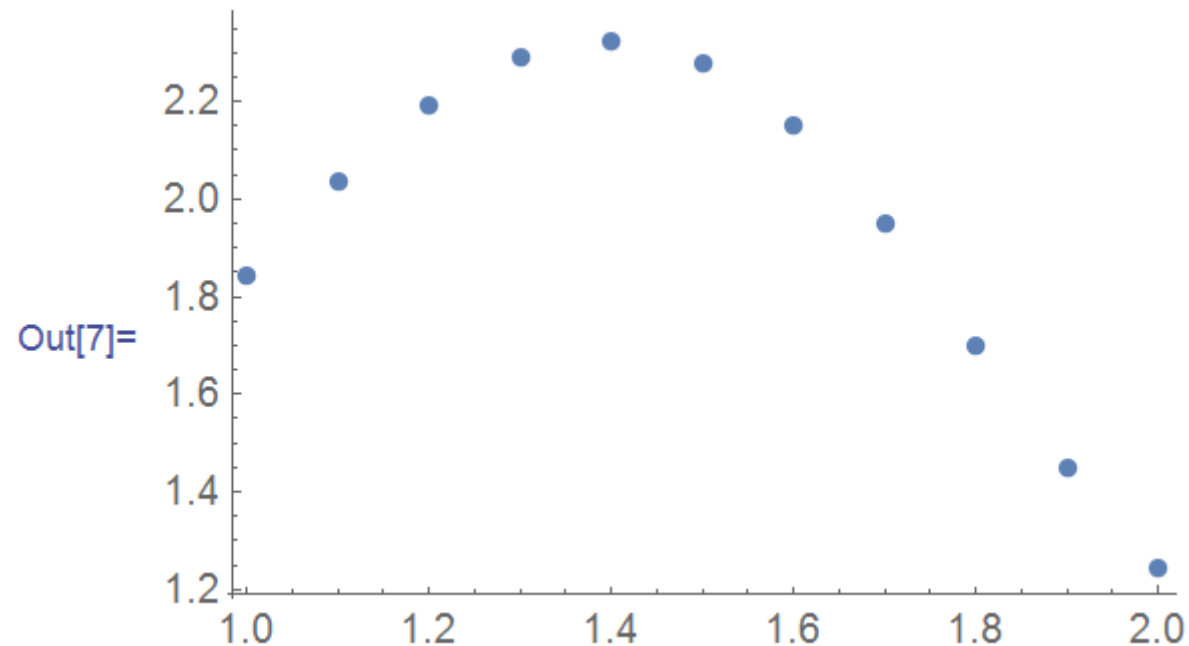
Пресмятаме стойностите на функцията в точки $(x_i, f(x_i))$ за $i = 1, 2, \dots, N$, като избираме $N = 11$ равноотдалечени точки със стъпка h .

```
In[3]:= n = 11; h = (b - a) / (n - 1); Print["Step h= ", h]
x = Table[a + (i - 1) * h, {i, 1, n}]; Print[" x=", x]
y = Table[f[x[[i]]], {i, 1, n}]; Print[" y=", y]
xy = Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, 1, n}];
gy = ListPlot[xy, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```

Step h= 0.1

$x=\{1., 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.\}$

$y=\{1.84147, 2.03562, 2.19146, 2.2929, 2.32521, 2.27807, 2.14936, 1.94895, 1.70175, 1.44853, 1.2432\}$



Пресмятаме всички суми, необходими за МНМК от първа степен. Решаваме получената система с `LinearSolve[]` и извличаме c_0, c_1 .

```
In[8]:= s0 = n; s1 =  $\sum_{i=1}^n x_{[i]}$ ; s2 =  $\sum_{i=1}^n x_{[i]}^2$ ; d1 =  $\sum_{i=1}^n y_{[i]}$ ; d2 =  $\sum_{i=1}^n x_{[i]} * y_{[i]}$ ;
```

```
s =  $\begin{pmatrix} s0 & s1 \\ s1 & s2 \end{pmatrix}$ 
```

```
d =  $\begin{pmatrix} d1 \\ d2 \end{pmatrix}$ 
```

```
c = LinearSolve[s, d]
```

```
c0 = c[1,1]
```

```
c1 = c[2,1]
```

```
Out[9]= {{11, 16.5}, {16.5, 25.85}}
```

```
Out[10]=
```

```
{{21.4565}, {31.4175}}
```

```
Out[11]=
```

```
{{2.99685}, {-0.697508}}
```

```
Out[12]=
```

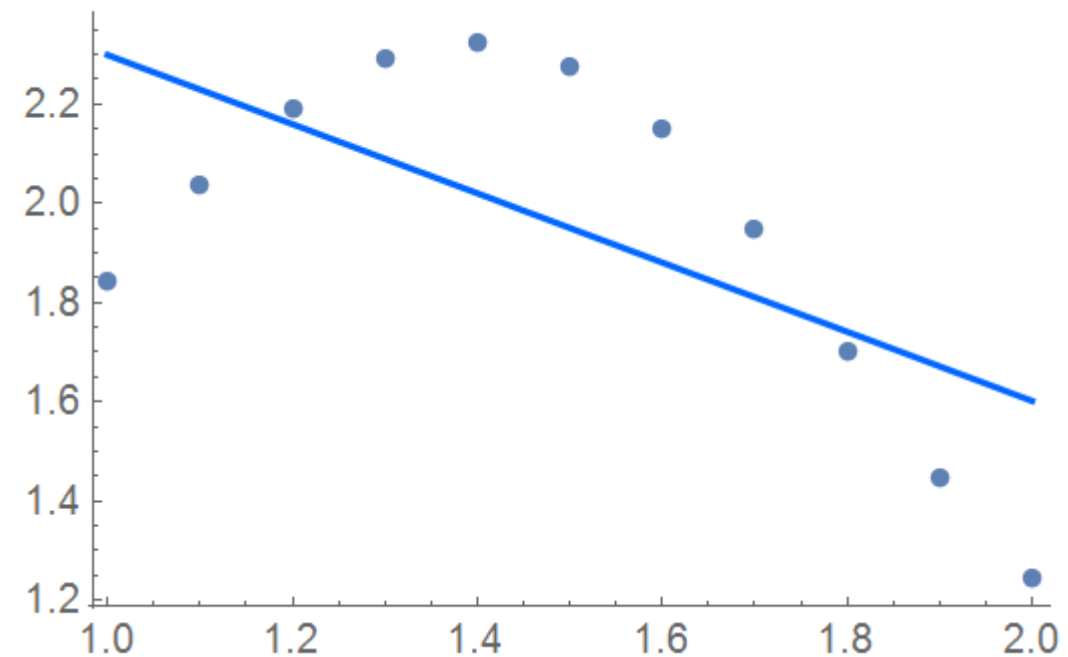
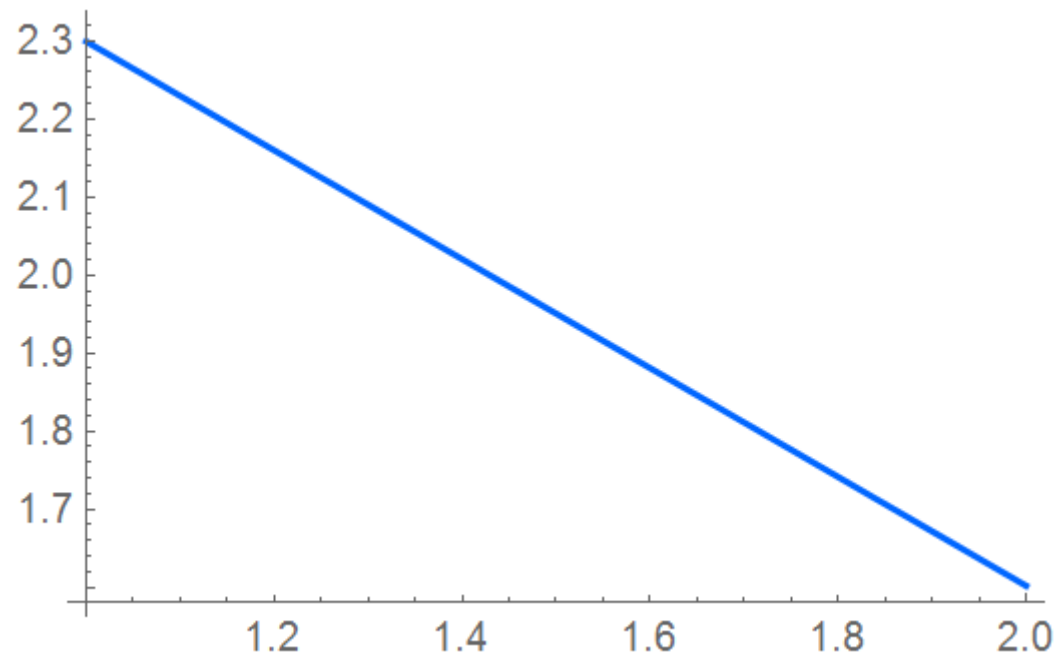
```
2.99685
```

```
Out[13]=
```

```
-0.697508
```

Дефинираме като функция получения полином от първа степен $p_1(t)$ и начертаваме графиката му, а също и обща графика с данните:

```
In[14]:= p1[t_] := c0 + c1 * t  
gp1 = Plot[p1[t], {t, a, b}, PlotStyle -> Hue[0.6]]  
Show[gy, gp1]
```



б) Изчисляваме средноквадратичната грешка на приближението:

$$\text{In[17]:= } \delta_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f[x_{[i]}] - p_1[x_{[i]}])^2}$$

Out[17]=

0.87215

Заключение. Получената грешка очевидно е голяма, както се вижда и от графиката на двете функции. Продължаваме с полином от втора степен.

Пример 2.4. За функцията от Пример 2.3:

- а) Да се намери полиномът на най-добро приближение по МНМК от втора степен
- б) Да се оцени грешката на приближението.

Решение. а) Пресмятаме всички суми, необходими за МНМК от втора степен, решаваме получената система линейни алгебрични

уравнения с `LinearSolve[]` и извличаме коефициентите на полинома v_0, v_1, v_2 .

$$\text{In[8]:= } s0 = n; \quad s1 = \sum_{i=1}^n x_{[[i]]}; \quad s2 = \sum_{i=1}^n x_{[[i]]}^2; \quad s3 = \sum_{i=1}^n x_{[[i]]}^3; \quad s4 = \sum_{i=1}^n x_{[[i]]}^4;$$

$$d1 = \sum_{i=1}^n y_{[[i]]}; \quad d2 = \sum_{i=1}^n x_{[[i]]} * y_{[[i]]}; \quad d3 = \sum_{i=1}^n x_{[[i]]}^2 * y_{[[i]]};$$

$$s = \begin{pmatrix} s0 & s1 & s2 \\ s1 & s2 & s3 \\ s2 & s3 & s4 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{pmatrix}$$

`v = LinearSolve[s, d]`

`v0 = v[[1,1]]`

`v1 = v[[2,1]]`

`v2 = v[[3,1]]`

Out[10]=

 $\{\{11, 16.5, 25.85\}, \{16.5, 25.85, 42.075\}, \{25.85, 42.075, 70.7333\}\}$

Out[11]=

 $\{\{21.4565\}, \{31.4175\}, \{47.8688\}\}$

Out[12]=

 $\{\{-3.32315\}, \{8.1211\}, \{-2.93954\}\}$

Out[13]=

 -3.32315

Out[14]=

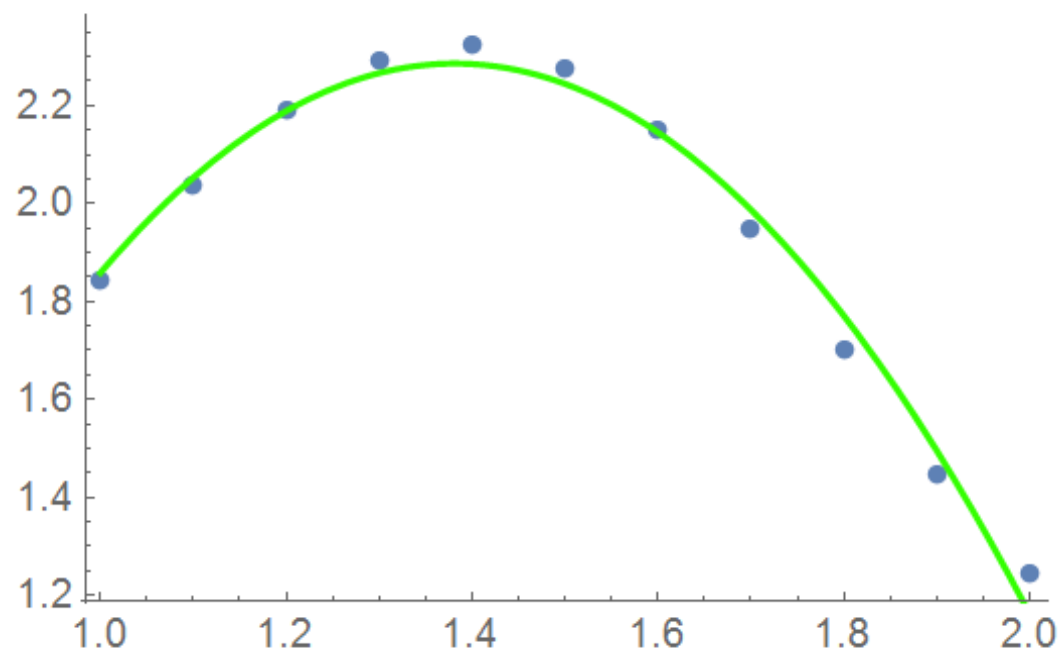
 8.1211

Out[15]=

 -2.93954

Дефинираме като функция получения полином от втора степен $p_2(t)$ и начертаваме графиката му, съпоставена с данните:

```
In[20]:= p2[t_] := v0 + v1 * t + v2 * t^2  
gp2 = Plot[p2[t], {t, a, b}, PlotStyle -> Hue[0.3]]  
Show[gy, gp2]
```



б) Изчисляваме средноквадратичната грешка на приближението:

$$\text{In[23]:= } \delta 2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f[x_{[i]}] - p2[x_{[i]}])^2}$$

Out[23]=

0.138776

Заклучение. Получената грешка очевидно е все още голяма, но е по-малка в сравнение от тази от Пример 2.3. Може да се потърси приближение с полином от още по-висока степен.

Допълнителен пример за приближение по МНМК с Mathematica за данни за лазер с пàри на меден бромид може да намерите на:

http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/database/numan/MNМК_CuBr_laser/2leastssquares_CuBr.html

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНО ОПТИМИРАНЕ

3.1. Кратка класификация на задачите за оптимизация

Математическото оптимизиране (програмиране) (МО) е дял от приложната математика, при който от много възможни решения на една задача се търси най-доброто решение в някакъв смисъл. Например, при много възможни инвестиции със зададени ограничения, се търси инвестицията с най-голяма печалба.

Математическото оптимизиране се използва широко в програмирането и информатиката (в информационни системи за планиране на ресурси – ERP, за намиране на най-кратки пътища и др.), в икономиката, инженерните науки, селскостопанските науки, логистиката и т.н.

За да се приложи МО, разглежданата задача трябва да се опише с помощта на математическа символика, като се построи съответният ѝ математически модел. Моделът включва:

1. Функция (или функции) на много променливи, на която се търси някаква оптимална стойност (max или min). Тази функция се нарича **целева функция**.

2. Система уравнения и неравенства, задаващи **ограничения на задачата**.

Съществуват два типа оптимизационни задачи:

а) Задачи за безусловна оптимизация

При този тип задачи обикновено се търсят точки от дефиниционната област $D(f)$ на едномерна или многомерна функция $f(x)$, в които функцията има локални екстремуми (максимум или минимум). Ще отбележим, че областта $D(f)$ може да бъде крайна, безкрайна, отворена, затворена и т.н., и въпросът за съществуване на екстремум също е важен. Този тип задачи могат да се решават по следните начини:

- С методите на математическия анализ, когато функцията $f(x)$ е диференцируема в дадената област и удовлетворява и някои допълнителни условия. За функция на една променлива по същество задачата се свежда до решаване на нелинейно уравнение за производната от вида $f'(x) = 0$, намиране на точките на евентуален екстремум и т.н.
- В многомерния случай за екстремум на $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ аналогично задачата изисква решаване на нелинейна система от вида:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{df}{dx_1} = 0 \\ \frac{df}{dx_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{df}{dx_n} = 0 \end{array} \right.$$

Численото и ефективно решаване на уравнения и системи уравнения става с методите Нютон и др. (виж Глава 1).

- С помощта на **специални ефективни алгоритми** (методи на сканиране, златно сечение, Фибоначи, и др.).
- С **числени методи** – покоординатно спускане, градиентни методи и др.

б) Оптимизационни задачи с ограничения – задачи на МО

При тези задачи се търси някакъв минимум или максимум (наречен оптимум) на многомерна функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при изпълнение на определен брой ограничения (неравенства и уравнения), свързващи независимите величини $x_1, x_2, \dots, x_n$. Според вида на функцията и ограниченията, оптимизационните задачи с ограничения са три типа:

- Задачи на линейното оптимиране (ЗЛО) – когато функцията и ограниченията са линейни
- Задачи на нелинейното оптимиране (НЛО) – когато е на лице някаква нелинейност във функцията и/или в ограниченията;
- Задачи на динамичното оптимиране (ДО) – когато алгоритъмът (стратегията) за достигане до даден оптимум е разпределен на етапи и/или зависи от времето по дискретен начин.

Стандартни модели на линейното оптимиране (ЛО)

Много голям брой реални задачи от икономиката, инженерните науки, информатиката и други, се свеждат до търсене на някакво приемливо (оптимално в даден аспект) решение на линейна оптимизационна задача. Ето някои типични примерни задачи, които са обект на линейното оптимиране:

- разпределение на производствени мощности с минимална себестойност
- разпределение на производителни мощности с минимално общо време за работа
- производство с максимална печалба
- разкрояване на материали с минимална загуба на материали
- максимално използване на оборудване
- максимално използване на човешки ресурси
- транспортни задачи – разпределяне на m ресурса (наличности) между n потребителя (потребности) с минимални разходи
- теория на игрите и др.

3.2. Обща задача на линейното оптимиране (ОЗЛО)

Задачите на линейното оптимиране се характеризират с **линейна целева функция**, често означавана с $L(X)$, и област G от линейни ограничения.

По-конкретно, нека е дадена линейната функция на n реални променливи

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, \quad (3.1)$$

където $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ са дадени коефициенти (цени). Тук c се нарича още **вектор на цените**, c_0 е дадена адитивна константа.

Освен това нека е дадена област $G \in R^n$, определена с m **линейни ограничения** от вида:

$$G: \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \\ a_{p+1,1}x_1 + a_{p+1,2}x_2 + \dots + a_{p+1,n}x_n (\leq, \geq) b_{p+1} \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, \geq) b_n \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{условия тип} \\ \text{равенство} \\ \text{условия тип} \\ \text{неравенство} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

Често се въвеждат и ограничения за неотрицателност на компонентите на $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$.

Определение. Всяка точка X , която удовлетворява ограниченията на задачата се нарича **план на задачата**.

Забележка. Условиата от тип неравенства в (3.2) могат да имат знак $\leq$ или знак $\geq$.

Обща задача на ЛО (ОЗЛО)

Търси се

$$L(X) \rightarrow \min \quad (\text{или } L(X) \rightarrow \max), \quad (3.3)$$

където

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G, \quad (3.4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad s \leq n. \quad (3.5)$$

В ОЗЛО неизвестни са координатите на точка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в която се достига минимум/максимум, а коефициентите $a_{i,j}$, b_j , c_j в (3.1) и (3.2) са известни. Може да има условия за неотрицателност на част от неизвестните – условие (3.5).

За да уеднаквим условията за областта на плановете X и превърнем всички условия в тип равенства (линейни равенства), в начален етап ОЗЛО се преобразува към т.нар. каноничен вид или канонична задача на ЛО (КЗЛО).

3.3. Решен пример на задача от линейното оптимиране в двумерен случай ($n=2$) с графичен метод

Пример 3.1. Инвеститор планира да закупи дялове от две предприятия: P_1 и P_2 , като участва с не по-малко от 12 000 евро в P_1 и не по-малко от 30 000 евро в P_2 . Един дял от P_1 струва 1 500 евро, а един дял от P_2 – 2 000 евро. Общата сума на инвестицията не може да надхвърля 100 000 евро.

- а) Да се състави системата ограничения на модела на задачата;
- б) Да се представи графично областта на възможните инвестиции.

Решение: Означаваме с x – броя на дяловете от P_1 , y – броя на дяловете от P_2 . Данните на задачата оформяме в таблица:

Предприятие	P_1	P_2
План	x	y
Ед. цена	1500	2000

Обща цена	1500 x	2000 y
Ограничение	над 12000	над 30000

а) Ограничението за инвестираната сума в първото предприятие е:
 $1500x \geq 12000$.

Аналогично за второто предприятие:
 $2000y \geq 30000$.

Ограничение за общата цена:
 $1500x + 2000y \leq 100000$.

Естествени ограничения за неотрицателност на броя дялове x и y :

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Така получаваме системата ограничения на модела:

$$G : \begin{cases} 1500x \geq 12000 \\ 2000y \geq 30000 \\ 1500x + 2000y \leq 100000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

След опростяване (3.6) добива вида

$$G : \begin{cases} x \geq 8 \\ y \geq 15 \\ 3x + 4y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

б) За да представим графично областта на инвестициите G , разглеждаме съответната ѝ система уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} m_1 : x = 8 \\ m_2 : y = 15 \\ m_3 : 3x + 4y = 200 \\ m_4 : x = 0 \\ m_5 : y = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Всяко едно от уравненията (3.8) може да се разглежда като уравнение на права в равнината (x, y) .

Всяка права от своя страна разделя равнината на две полуравнини, в които е изпълнено точно едно от неравенствата $\leq$ или $\geq$, за всички точки от едната или другата полуравнина, съответно. На Фиг. 3.1 полуравнините, съответни на (3.7) са означени със щрихи.

Напомниме, че най-простият начин за построяване на права в равнината е да намерим две произволни нейни точки.

Например за правата m_3 при $x=0$ получаваме $y=50$, а при $y=0$ - получаваме $x=66\frac{2}{3}$. Записано с координати на точките имаме: $(0,50)$, $\left(66\frac{2}{3},0\right)$. За да разберем в коя полуравнина е изпълнено условието $3x + 4y \leq 200$, проверяваме знака за произволна точка в равнината.

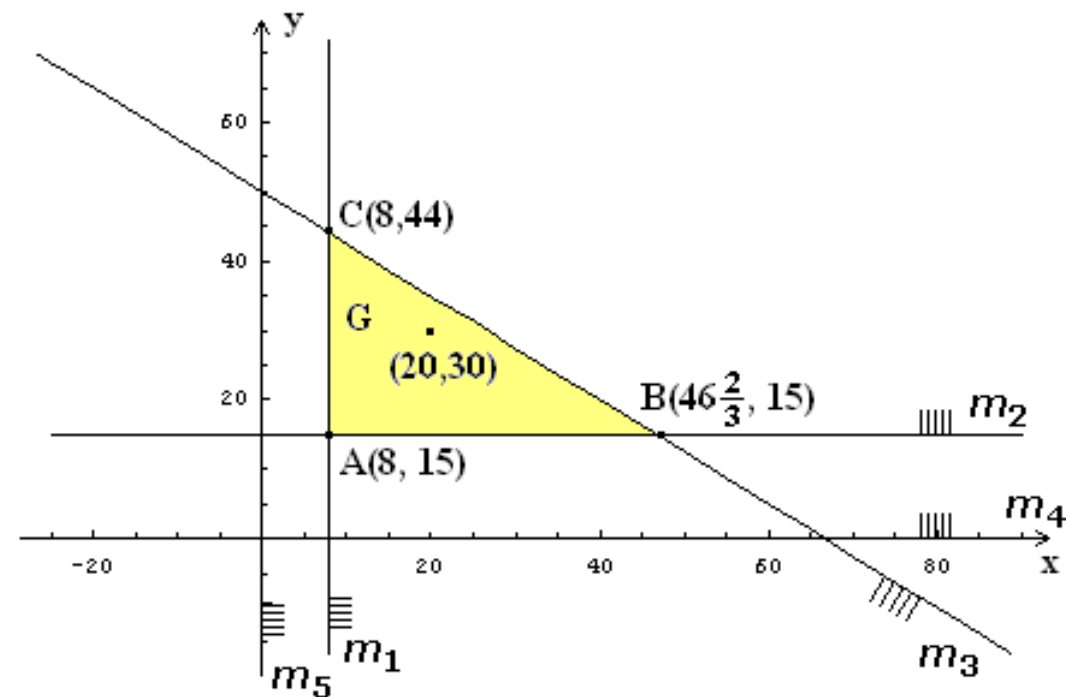
Например за т. $(0, 0)$ имаме $0 \leq 200$. Следователно т. $(0, 0)$ удовлетворява условието и трябва да вземем полуравнината под правата m_3 .

Пресечните точки на правите, означени на Фиг. 3.1 с A , B , C са решения на трите системи:

$$\text{т. } A = m_1 \times m_2 : \begin{cases} x = 8 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow A(8,15);$$

$$\text{т. } B = m_2 \times m_3 : \begin{cases} y = 15 \\ 3x + 4y = 200 \end{cases} \Rightarrow B(46\frac{2}{3}, 15);$$

$$\text{т. } C = m_1 \times m_3 : \begin{cases} x = 8 \\ 3x + 4y = 200 \end{cases} \Rightarrow C(8,44).$$



Фиг. 3.1.

Анализ. Всяка точка от G е възможна инвестиция, защото удовлетворява ограниченията на задачата.

Например т. $(20, 30) \in G$. Инвеститорът, купувайки 20 акции от P_1 и 30 акции от P_2 , ще заплати цена от:

$$1500 * 20 + 2000 * 30 = 30000 + 60000 = 90000 \text{ евро.}$$

Пример 3.2. При условията на Пример 3.1 да се намери максималната възможна печалба на инвеститора, ако от един дял от P_1 печалбата е 400 евро, а от един дял от P_2 е 320 евро.

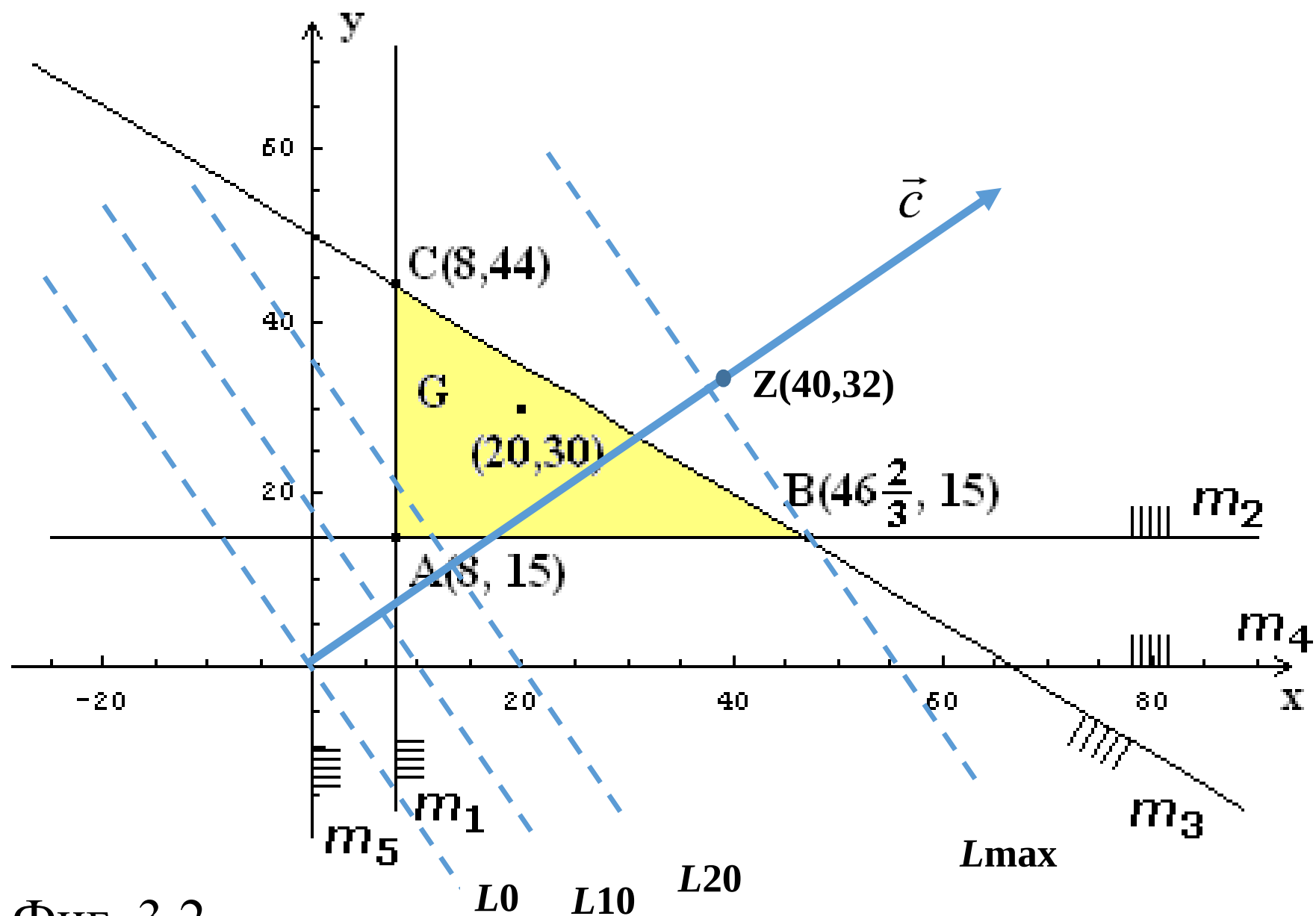
Решение. Ще намерим решението с графичен метод.

Съставяме целевата функция:

$$L_0(x, y) = 400x + 320y \rightarrow \max$$

Нека отначало да положим, че печалбата е 0. Уравнението на печалбата е $L_0 : 400x + 320y = 0$.

Правата L_0 минава през точките $(0,0)$ и $(8, -10)$. Тя няма обща точка с областта на решенията G (виж Фиг. 3.2).



ФИГ. 3.2.

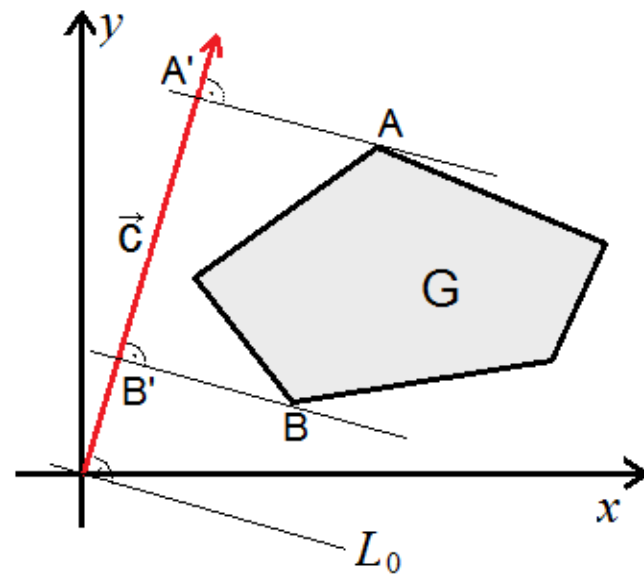
Построяваме нормалния вектор (перпендикулярен на L_0), напр. през т. $(0,0)$ и $Z(40,32)$. Това е векторът на печалбата $\vec{c}$, който насочваме нагоре, тъй като търсим максимум на печалбата.

Ако търсим къде печалбата ще бъде 10, получаваме правата L_{10} , която ще е успоредна на L_0 , с нарастване по $\vec{c}$. Все още няма общи точки с G . Аналогично построяваме L_{20} - вече има много точки от областта G , в които ще се постига цена 20. Нараствайки по този начин с линиите на печалбата, виждаме, че максимум ще се получи при т. $B(46\frac{2}{3}, 15)$.

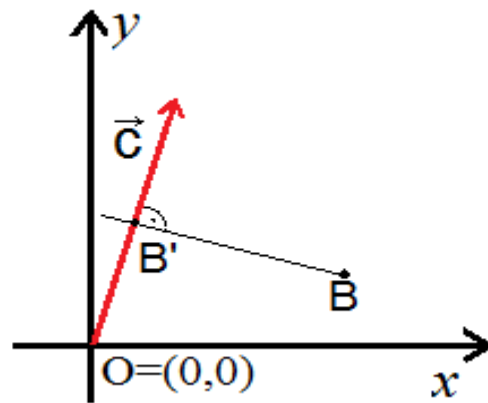
Оптималната печалба е $L_0(46\frac{2}{3}, 15) = 400 * 46\frac{2}{3} + 320 * 15 = 17066.7$ евро.

На практика се взимат цели числа (цели дялове от инвестицията).

Отговор. Инвеститорът ще има максимална печалба, ако закупи 46 дяла от P_1 и 15 дяла от P_2 .



Фиг. 3.3.



Фиг. 3.4.

Случай $n=2$, графичен метод.

Търсим $\max/\min$ на целева функция

$$L(x, y) = c_1x + c_2y$$

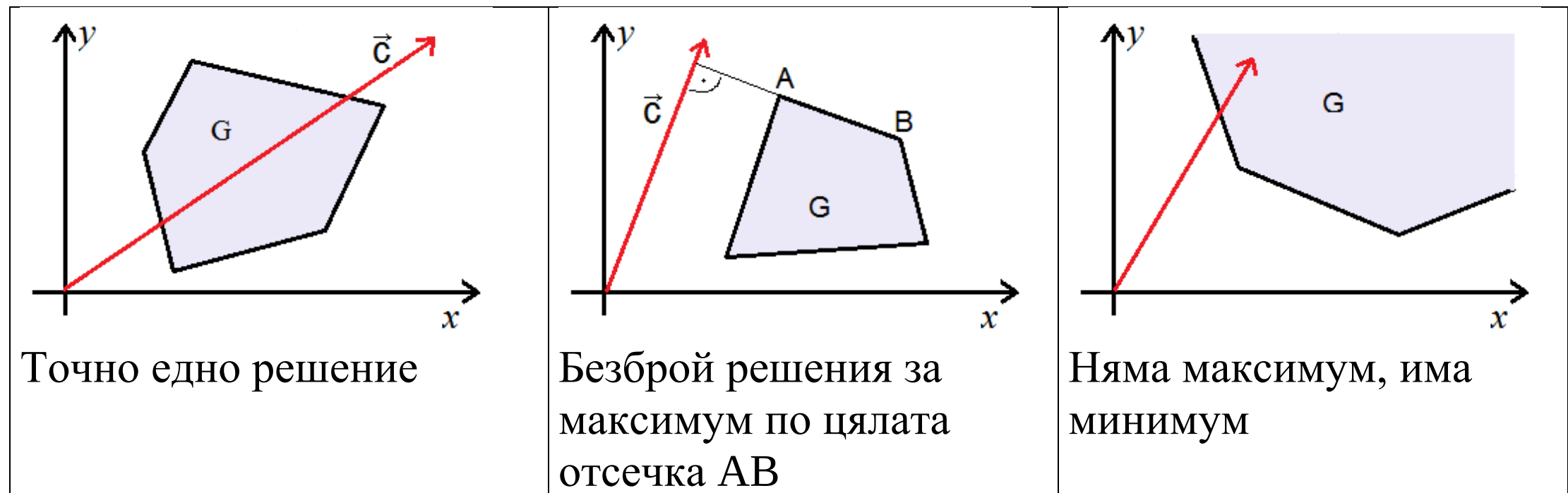
На Фиг. 3.3 G е областта на решенията. Векторът $\vec{c} = (c_1, c_2)$ е вектор на цените. Точка A е точката, в която се достига максимум на целевата функция, т. B – точка на минимум (при противоположен вектор на цените), а $L_0 = L(0, 0) = 0$.

Определение. Алгебрична мярка на вектор върху ос е разстоянието на проекцията на вектора върху оста.

На Фиг. 3.4 алгебричната мярка на OB върху оста $\vec{c}$ е дължината на отсечката OB' .

Случаи при $n=2$.

- а) Ако $G = \emptyset$ (празно множество), то ЗЛО няма решение.
- б) Ако G е изпъкнал ограничен многоъгълник в първи квадрант (т.е. $\{x \geq 0, y \geq 0\}$), то ЗЛО има поне едно решение.
- в) Ако G е изпъкнала неограничена област в първи квадрант, то ЗЛО може да има максимум/минимум или да няма максимум/минимум.



Фиг. 3.5.

3.4. Канонична задача на линейното оптимиране (КЗЛО)

Канонична задача на линейното оптимиране (КЗЛО)

Търси се

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (3.9)$$

където $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$,

$$G : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{само условия тип равенства}) \quad (3.10)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{условия за неотрицателност за всички } x_j) \quad (3.11)$$

Определение. Всеки вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяващ условията (3.10) и (3.11), се нарича **план на задачата**.

Условията (3.10) се наричат **ограничения на задачата**, а условията (3.11) – **условия за неотрицателност**.

Забележка. Целевата функция може да е зададена в по-общ вид $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0$. Тогава разглеждаме $L' = L - c_0$, с което получаваме КЗЛО относно L' . Очевидно $\min L = \min L' + c_0$.

Забележка. В случай, че имаме задача за максимум, ще положим $L'' = -L$ и ще решим КЗЛО относно L'' .

Привеждане на общата задача на линейното оптимиране в каноничен вид

Нека е дадена ОЗЛО, дефинирана в 3.3.

Определение. Независимите променливи x_j , за които не е изпълнено условието за неотрицателност (3.11), се наричат **свободни променливи**.

Случай 1. При наличие на свободни променливи x_j в ОЗЛО (3.3)–(3.5) извършваме полагането

$$x_j = x'_j - \xi, \quad (3.12)$$

където $x'_j \geq 0$, $\xi \geq 0$. Без ограничение на общността може да се положи една и съща променлива ξ за всички свободни променливи.

Случай 2. Когато в ОЗЛО имаме условие от вид неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad (3.13)$$

за получаване на равенство е достатъчно да добавим отляво нова допълнителна неотрицателна (**баланси**ва) променлива, например $x_{n+1} \geq 0$, за да получим равенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Допълнителната променлива от този вид се нарича **недостиг**.

Случай 3. Ако в ОЗЛО има ограничително условие от вида:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad (3.14)$$

тогава изваждаме допълнителна променлива, напр. $x_{n+2} \geq 0$, за да изравним и получим равенство, т.е. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+2} = b_i$

Случай 4. При зададено двойно ограничение

$$b_i' \leq a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i''$$

е достатъчно да го заменим с еквивалентните му две неравенства:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i'$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i''.$$

Пример 3.3. Да се сведе към каноничен вид следната задача на линейното оптимиране:

$$L(x) = (4x_1 - 2x_2 + x_3) \rightarrow \max$$

$$G: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -7 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_{1,2,3} \geq 0.$$

Решение. Полагаме $L' = -L = -4x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \min$

$$G: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Тук x_4, x_5 са балансовите променливи.

Други представяния на КЗЛО

Векторен вид

Съставяме вектор на цените $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, вектор на неизвестните $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и вектор на десните части $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Полагаме

$$\vec{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{A_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \vec{A_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

които се наричат вектори на ограниченията съответно за неизвестните $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Тогава каноничната задача на линейното оптимиране се записва във векторен вид така:

Търси се

$$L = (\vec{c}, \vec{x}) \rightarrow \min$$

$$G: \vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \dots + \vec{A}_n x_n = \vec{b}^T$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}.$$

Забележка. За опростяване на записа по-нататък няма да използваме стрелката в означението на вектори, както и транспонирането на векторите със символа T .

Матричен вид на КЗЛО

Означаваме

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогава КЗЛО има компактният запис:

$$\text{Търсим } L = c \cdot x \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

Пример 3.4. КЗЛО от пример 3.3 да се представи във векторен вид.

Решение: След привеждане в каноничен вид имаме размерност на задачата $n = 5$, $m = 3$. Полагаме $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $c = (-4, 2, -1, 0, 0)$.

Задачата се записва във векторен вид:

Търси се $L' = (c, x)$, $x \in G$

$$G: \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Пример 3.5. КЗЛО от пример 3.4 да се запише в матричен вид.

Решение. Имаме $c = (-4, 2, -1, 0, 0)$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

КЗЛО в матричен вид е:

$$L' = c.x \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Пример 3.6. Да се приведе в каноничен вид следната задача на ЛО.

Търси се $\min L$, $L = 2x_1 - x_2 + 3x_3$ с ограничения:

$$G: \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ x_2 - x_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$2 \leq x_3 \leq 5.$$

Решение. Тук са налице всички случаи от ОЗЛО. Тъй като няма условия за неотрицателност, променливите x_1 и x_2 са **свободни от знак**. Въвеждаме смяна на променливите:

$$x_1 = x'_1 - \xi, \quad x_2 = x'_2 - \xi, \quad x'_1, x'_2, \xi \geq 0.$$

Освен това добавяме балансова променлива $x_4 \geq 0$ към първото неравенство и изваждаме балансова $x_5 \geq 0$ от второто, за да получим равенства. Аналогично за двойното неравенство спрямо x_3 използваме две неотрицателни променливи x_6, x_7 . Получаваме:

$$\begin{aligned}
 L &= 2x'_1 - x'_2 + 3x_3 - \xi \rightarrow \min \\
 G: \quad &\left| \begin{array}{ccccccccc}
 x'_1 & +x'_2 & +5x_3 & -2\xi & +x_4 & & & & =10 \\
 & x'_2 & -x_3 & -\xi & & -x_5 & & & =6 \\
 & & x_3 & & & & -x_6 & & =2 \\
 & & x_3 & & & & & +x_7 & =5
 \end{array} \right. \\
 x_j &\geq 0, \quad j = \overline{3,7}; \quad x'_1, x'_2, \xi \geq 0.
 \end{aligned}$$

Записана в матричен вид, задачата изглежда по следния начин:

$$n = 8, \quad m = 4,$$

$$L = (2, -1, 3, -1, 0, 0, 0, 0) \cdot (x'_1, x'_2, x_3, \xi, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \rightarrow \min$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x_3 \\ \xi \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{3,7}, \quad x'_1, x'_2, \xi \geq 0.$$

Връзка между ОЗЛО и КЗЛО

Означаваме с $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ решението на ОЗЛО (3.3)–(3.5). След преминаване в каноничен вид търсеното решение има вида

$$\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_s, x'_{s+1}, \dots, x'_n, \xi, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}),$$

където x_j , $j = \overline{s+1, n}$ са свободни променливи, $x_j = x'_j - \xi$, $x'_j, \xi \geq 0$ за $j = \overline{s+1, n}$, а $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}$ са допълнителни (балансови) променливи. Да означим решението на КЗЛО с $\tilde{x}^*$, т.е. $L(\tilde{x}^*) \rightarrow \min$ и $\tilde{x}^*$ удовлетворява условията за ограниченост и неотрицателност.

В сила е следната теорема за връзка между ОЗЛО и КЗЛО:

Теорема. Ако $\tilde{x}^*$ е решение на КЗЛО, то $\tilde{x}^*$ е решение на ОЗЛО.

Доказателство. Следва веднага от факта, че се използват само линейни преобразования.

Кратък преговор от линейната алгебра***Минор и ранг на матрица***

Нека е дадена правоъгълна матрица $A(a_{ij})$ от ред $n \times m$.

Определение. **Минор от k -ти ред** ($k \leq \min(n, m)$) на матрицата A се нарича поддетерминантата на квадратна подматрица на A , получена след зачертаване на редове и стълбове, така че да останат $k \times k$ елемента.

Пример 3.7. Посочете минор от ред 2 в следната матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 4 & -2 \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{pmatrix}$$

След зачертаването горе на I и III стълб и II ред получаваме минора (поддетерминантата) от втори ред: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}.$

Определение. Ранг на матрица A от ред $n \times m$ се нарича най-високият ред на минорите на A , чиито детерминанти са различни от нула. Рангът се означава с $r(A)$.

Очевидно $0 \leq r(A) \leq \min(n, m)$.

Теорема. Рангът на подобни матрици е еднакъв.

Намирането на ранга може да стане чрез преобразуване на матрицата A с елементарни преобразования към подобни на нея матрици, така че да се получат нули под главния диагонал, както е показано по-долу. Броят на ненулевите елементи по главния диагонал е равен на ранга на A .

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \end{pmatrix}.$$

$r(A)=3$, три ненулеви елемента по главния диагонал

Пример 3.8. Да се намери рангът на матрицата B :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Означаваме с R_1, R_2, R_3 съответните редове при преобразуване на B . Отдясно на всеки ред са показани действията на преобразованията, които се извършват с редовете на предходната матрица. Получаваме последователно подобните матрици:

$$\begin{aligned}
 B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 / 2 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} \sim \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{matrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

В последната подобна матрица има два ненулеви елемента по главния диагонал, следователно $r(B) = 2$.

Теорема за ранга. Ако разгледаме редовете (или стълбовете) на една матрица A като координати на вектори, то броят на линейно независимите редове (или стълбове) е равен на ранга на A .

Уговорка.

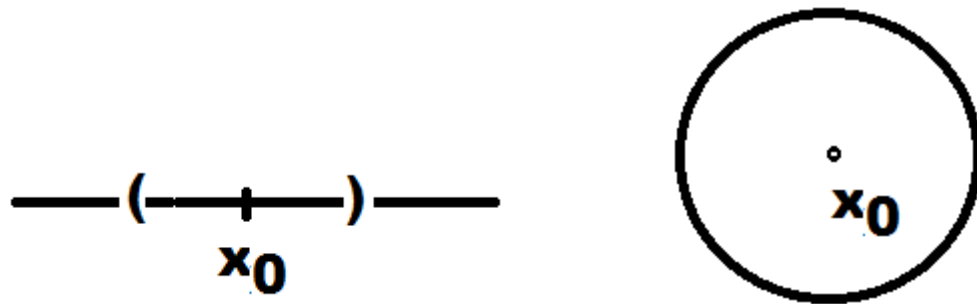
Оттук нататък без ограничение на общността ще считаме, че рангът на матрицата на ограничения в каноничната задача на ЛО е $r(A) = m < n$.

3.5. Базисен вид на КЗЛО. Основни теореми на ЛО

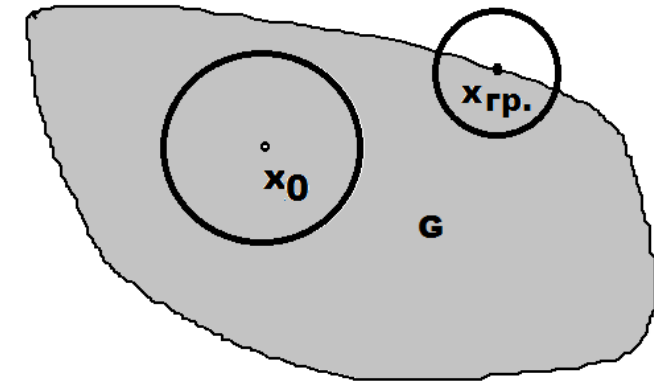
Необходими са някои сведения от изпъкналия анализ.

Определение. **Околност на точка** $x_0 \in G$ е множеството от всички точки на G , за които е изпълнено неравенството $|x - x_0| < \varepsilon$ за някакво число $\varepsilon > 0$.

Примери: Всички точки в отворен интервал със среда $x_0 \in G$ в едномерно пространство; отворена окръжност с център $x_0 \in G$ и радиус ε в двумерното пространство и т.н.



Определение. Гранична точка на множество G е т. $x_{гр.}$, за която винаги съществува околност, в която няма точки от G . Граничната точка може и да не принадлежи на G .



Определение. Множеството G е **затворено**, ако всичките му гр. т. $\in G$.

Определение. Множеството G е **отворено**, ако всичките му гр. т. $\notin G$.

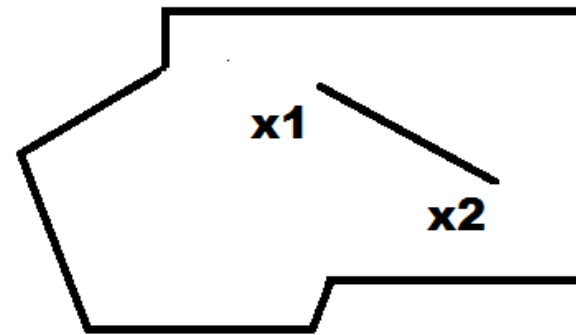
Определение. Множеството G е **ограничено**, когато за $\forall x \in G$ $\exists M > 0: |x| \leq M$.

Определение. Изпъкнала линейна комбинация е точка, която може да

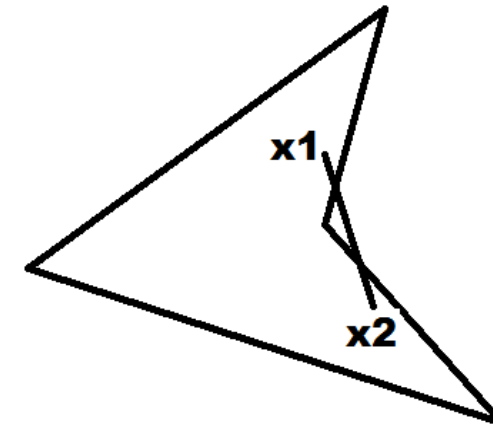
се представи във вида: $x: x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Например, средата на отсечката $[x_1, x_2]$ е линейна комбинация: $x' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$.

Определение. Множеството G е **изпъкнало**, ако за всеки две негови точки линейните комбинации от тях са също точки от G .

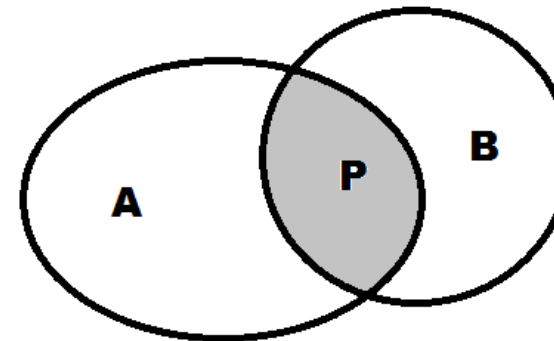


ИЗПЪКНАЛО М-ВО



ВДЛЪБНАТО М-ВО

Теорема. Сечението на две или повече изпъкнали множества е изпъкнало.



$$P = A \cap B$$

Определение. **Върхова точка** на изпъкнало множество G е точка, за която не съществува изпъкнала комбинация в G , с която да се опише.

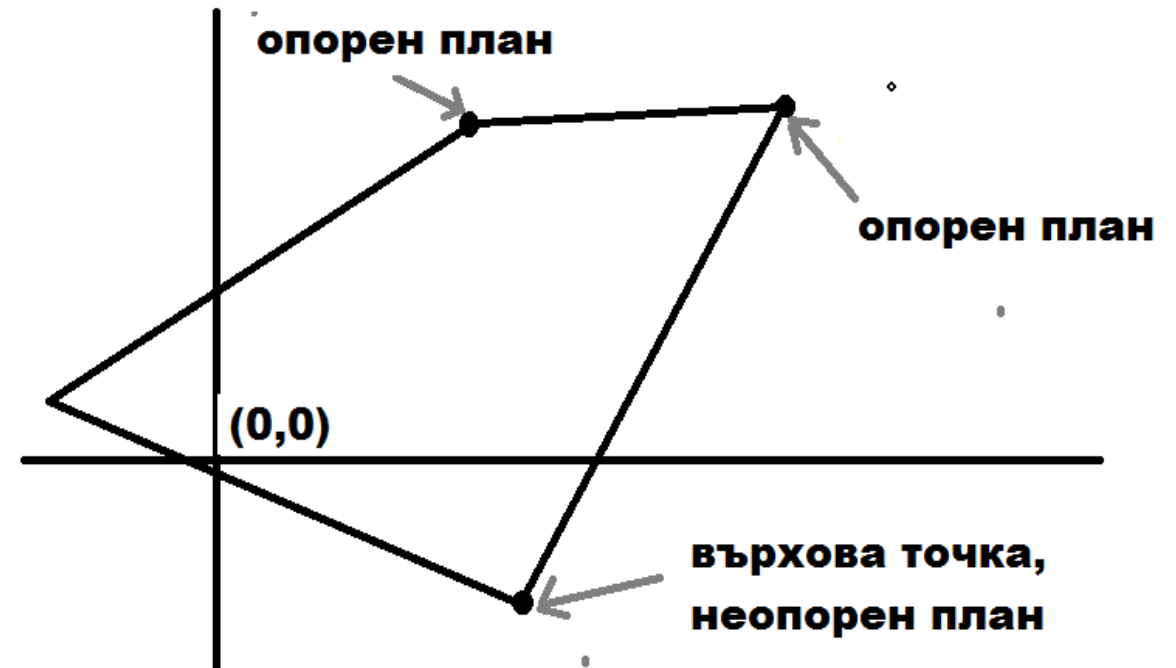
Определение. **Изпъкнал многостен** е затворено, ограничено и изпъкнало множество с краен брой върхови точки.

Определение.

Опорен (базисен) план е върхова точка на изпъкнал многостен, който има само положителни координати.

Определение. **Хиперравнина** в n -мерното пространство е: съвкупност от всички точки $\in R^n : d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n = d_0$, където d_i, d_0 са коефициенти.

Сечението на хиперравнини дава изпъкнал многостен или изпъкнала отворена област.



ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ЛИНЕЙНОТО ОПТИМИРАНЕ

Теорема. Множеството от всички планове на задачата на линейното оптимизиране (ЗЛО) е изпъкнало множество.

ОСНОВНА ТЕОРЕМА на ЗЛО

Когато множеството G от планове на ЗЛО е изпъкнал многостен, то целевата функция $L(X)$ достига екстремални стойности (максимум и минимум) във върховите точки на G . В случай, че оптималните стойности се достигат в повече от една точка, то те се достигат и за всяка тяхна линейна комбинация.

Как да намираме върховете точки на изпъкнало множество и кои от тях са опорни планове? - Трябва да решаваме системи линейни уравнения и да проверяваме кои техни решения са върхови точки.

Теорема. Ако системата вектори $A_1, A_2, \dots, A_n$ от (3.15) съдържа m линейно независими вектори, такива че например $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_mx_m = B$, то планът $(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ е върхова точка на G .

Теорема. Ако планът $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ е върхова точка на G , то векторите A_i , съответни на положителните координати на X образуват система от линейно независими вектори.

Следствие. Върхова точка на плановете на многостена G на решенията на КЗЛО има не повече от m положителни компоненти.

Определение. Ако броят на положителните решения за върхова точка на G е по-малък от m , то полученият план се нарича **изроден план**.

Следствие. За всяка върхова точка на G , където $x_i > 0$ (m на брой), съответстват точно m линейно независими вектора A_i .

Пример 3.9. Нека условията са:

$$G: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}, \quad n=5, \quad m=2$$

Дадени са точките:

$$\text{а) } x' = (4, 0, 0, 0, 2), \quad \text{б) } x'' = (1, 0, 0, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}), \quad \text{в) } x''' = (0, 1, 1, 0, 0).$$

Да се провери кои от тях са планове и опорни планове.

Решение. За x' заместваме в условията за G :

$$\begin{vmatrix} 4+0+0+0-2=2 \\ -4+0+0+0+6=2 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{удовлетворява условията (следователно е план)}$$

и има два положителни компонента.

Остава да проверим дали съответните вектори пред първи и пети стълб A_1, A_5 са линейно независими, т.е. минорът да не е нула. Имаме:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{линейно независими,}$$

т.е. рангът $r(A_1, A_5) = 2 = m$. Следователно x' е опорен план на G .

За x'' виждаме, че има три положителни компонента – не може да бъде оптимален план, независимо дали е от G :

За x''' заместваем в условията за G :

$\begin{vmatrix} 1+1=2 \\ 1+1=2 \end{vmatrix} \Rightarrow x'''$ удовлетворява условията (е план) и има два положителни компонента. Но съответните вектори A_2, A_3 не са линейно независими, защото детерминанта им е равна на нула: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$, т.е. рангът $r(A_2, A_3) < m$. Следователно x''' не е опорен план на G .

Показахме, че основно изискване към каноничната задача на ЛО (КЗЛО) ще бъде $r(A) = m$.

Определение. Опорен план от вида $(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ ще наричаме **базис** и ще бележим с $B = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$.

Базисна форма на КЗЛО

Намирането на базис (опорен план на КЗЛО) се извършва чрез линейни преобразования на матрицата на ограниченията A от тип равенства от формула (3.10) до привеждането ѝ в еквивалентен вид:

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 & + & \cdots & +\alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ & x_2 & & +\alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & x_m & +\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Съответното матрично представяне е:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{2,m+1} & \dots & \alpha_{2,n} \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Определение. Променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$ се наричат **базисни променливи**, останалите - $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ - **небазисни променливи**.

Очевидно рангът на матрицата в базисния вид е равен на m , тъй като има детерминанта (минор) само с единици по диагонала (детерминантата =1).

Забележка. От теоремите следва веднага, че в (3.17) $X = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$ е върхова точка за G . Ако десните части $\beta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ следва че този план е опорен.

Определение. **Базисно решение** на базисната форма на КЗЛО при неотрицателни десни части $\beta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ наричаме решението, в което всички небазисни променливи са равни на нула. Базисното решение има вида: $X = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$.

На практика няма да преномериране променливите в базисния вид и индексите могат да се променят.

Теорема. На всяко базисно решение съответства точно един опорен план и обратно.

Теорема. Броят на опорните планове е краен в R^n . При m условия той е $\binom{n}{m}$.

ГЛАВА 4. СИМПЛЕКС МЕТОД

4.1. Симплекс метод. Симплекс таблица

В линейното оптимиране (програмиране) основен метод е симплекс методът. Той е разработен най-напред от Данциг през 1949 г.

Данциг (George B. Dantzig) е американски математик и статистик (1914 -2005) с големи приноси в операционното смятане, компютърните науки, икономиката и статистиката.
(https://en.wikipedia.org/wiki/George_Dantzig)

Идея на симплекс метода

- 1⁰) Привеждане на общата задача на линейното оптимиране (ОЗЛО) към канонична задача (КЗЛО), при условие $r(A) = m$.
- 2⁰) Определяне на начален опорен план $X^{(0)}$.

- 3⁰) Прилагане на алгоритми (стратегии) за преминаване към друг опорен план, който подобрява стойността на целевата функция $L(X)$ към оптимум (минимум или максимум според задачата).
- 4⁰) Прилагане на критерий за достигане на оптимална стойност или установяване, че задачата няма решение.

За изпълнение на 1⁰) дадохме указания и примери в Глава 3.

Стъпка 2⁰) за намиране на начален опорен план $X^{(0)}$ може да се направи с елементарни преобразования на матрицата на ограниченията $A|b$ с метода на Гаус-Жордан, изучаван в курса по линейна алгебра и геометрия. Целта е свеждане на КЗЛО към еквивалентна задача, представена в базисен вид.

В края на тази глава ще покажем също използването на т.нар. М-метод (метод на изкуствения базис) за намиране на начален опорен план.

Стъпки 3⁰) и 4⁰) ще опишем подробно по-долу.

Пример 4.1. Намиране на начален опорен план с елементарни преобразования.

$$L(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \quad G: \left| \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -5 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{array} \right. \quad r(A) = 3$$

Преобразуваме в каноничен вид. За тази цел трябва да умножим второто и третото уравнение на системата с (-1). Получаваме КЗЛО:

$$L(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \quad G: \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Променливата x_3 участва в първото уравнение с коефициент 1 и не участва в останалите уравнения, т.е. може да изберем x_3 за базисна променлива в първото уравнение.

По-нататък с последователност от елементарни преобразования на системата ограничения довеждаме каноничната форма на задачата до базисен вид с базис $B_{X(0)} = \langle x_3, x_5, x_2 \rangle$.

Обърнете внимание, че подредбата на променливите в базиса е според номера на съответното уравнение, в което участват.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -5 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -5 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & \boxed{1} & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 + 5.R_3 \\ R_2 - 2.R_3 \\ R_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & \boxed{0} & \boxed{1} & -3 & \boxed{0} & 6 \\ -4 & \boxed{0} & \boxed{0} & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & -1 & \boxed{0} & 1 \end{array} \right) \quad G : \left\{ \begin{array}{l} 8x_1 + \boxed{x_3} - 3x_4 = 6 \\ -4x_1 + x_4 + \boxed{x_5} = 2 \\ x_1 + \boxed{x_2} - x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{array} \right.$$

Опорен план (базисно решение) на системата ограничения получаваме като положим небазисните променливи $x_1 = x_4 = 0$.
Получаваме опорен план $X^{(0)} = (0, 1, 6, 0, 2)$.

Пример 4.2. Преминаване от един опорен план към друг опорен план с елементарни преобразования.

Нека условията са вече в базисен вид:

$$\begin{cases} x_2 + \boxed{x_3} = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + \boxed{x_4} = 12 \\ x_1 + x_2 + \boxed{x_5} = 5 \end{cases}$$

Съответният матричен вид (с разширена матрица с дясната част) е:

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \beta \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Размерност на задачата: $n = 5$, $m = 3$.

Последните три колони съставят минор с детерминанта 1, т.е. рангът е $m = 3$.

Началният базис е $B_{X(0)} = \langle x_3, x_4, x_5 \rangle$ по реда на редовете. Небазисни променливи са x_1, x_2 .

Начален опорен план е: $X^{(0)} = (0, 0, 4, 12, 5)$.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \beta \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ \boxed{1} & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Leftrightarrow$$

В базиса $B_{X^{(0)}} = \langle x_3, x_4, x_5 \rangle$ ще сменим базисната променлива x_4 с нова базисна променлива x_1 . За целта делим втория ред на 3. От третия ред изваждаме втория, за да получим пред x_1 в третия ред коефициент 0. Следим дясната част да остава положителна!

$$\begin{array}{c|ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \beta \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 4 \\ 0 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1 & 1 \end{array}$$

Получаваме нов базис: $B_{X^{(1)}} = \langle x_3, x_1, x_5 \rangle$.
Небазисни променливи са: x_2 и x_4 . Като положим $x_2 = x_4 = 0$ получаваме новия опорен план: $X^{(1)} = (4, 0, 4, 0, 1)$.

Лема. Нека $L = c.x \rightarrow \min$, $G : Ax = b$, $x \geq 0$ е КЗЛО, $G \neq \emptyset$ и $L = c.x$ е ограничена отдолу. Тогава за всеки опорен план $\bar{x}$ съществува друг опорен план $\bar{\bar{x}} : L(\bar{\bar{x}}) \leq L(\bar{x})$, т.е. може да търсим стратегия за намаляване.

Нека КЗЛО има опорно решение $\langle x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n \rangle$. Без ограничение на общността можем да преномерираме променливите и да считаме, че базисни променливи са първите m неизвестни $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = \tilde{\beta}_1 - (\tilde{\alpha}_{1,m+1}\tilde{x}_{m+1} + \dots + \tilde{\alpha}_{1,n}\tilde{x}_n) \\ \tilde{x}_2 = \tilde{\beta}_2 - (\tilde{\alpha}_{2,m+1}\tilde{x}_{m+1} + \dots + \tilde{\alpha}_{2,n}\tilde{x}_n) \\ \vdots \\ \tilde{x}_m = \tilde{\beta}_m - (\tilde{\alpha}_{m,m+1}\tilde{x}_{m+1} + \dots + \tilde{\alpha}_{m,n}\tilde{x}_n) \end{array} \right.$$

Като заместим $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ в $L(\tilde{c}, \tilde{x})$ получаваме:

$$\begin{aligned}
 L(\tilde{c}, \tilde{x}) &= \tilde{c}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{c}_2 \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{c}_n \tilde{x}_n = \\
 &\tilde{c}_1 \tilde{\beta}_1 - (\tilde{c}_1 \tilde{\alpha}_{1,m+1} \tilde{x}_{m+1} + \dots + \tilde{c}_1 \tilde{\alpha}_{1,n} \tilde{x}_n) \\
 &+ \tilde{c}_2 \tilde{\beta}_2 - (\tilde{c}_2 \tilde{\alpha}_{2,m+1} \tilde{x}_{m+1} + \dots + \tilde{c}_2 \tilde{\alpha}_{2,n} \tilde{x}_n) + \dots + \\
 &+ \tilde{c}_m \tilde{\beta}_m - (\tilde{c}_m \tilde{\alpha}_{m,m+1} \tilde{x}_{m+1} + \dots + \tilde{c}_m \tilde{\alpha}_{m,n} \tilde{x}_n) \\
 &+ \tilde{c}_{m+1} \tilde{x}_{m+1} + \tilde{c}_{m+2} \tilde{x}_{m+2} + \dots + \tilde{c}_n \tilde{x}_n
 \end{aligned}$$

Означаваме:

$$\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n), \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m)^T, \quad \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$$

$$\tilde{\alpha}_j = (\tilde{\alpha}_{1,j}, \tilde{\alpha}_{2,j}, \dots, \tilde{\alpha}_{m,j})^T, \quad j = \overline{m+1, n} - \text{вектор-стълб от коефициентите}$$

пред небазисната променлива $\tilde{x}_j, j = \overline{m+1, n}$;

$\tilde{c}_B = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_m)$ - вектор-ред от целевите коефициенти пред базисните неизвестни;

$\tilde{\Delta}_0 = (\tilde{c}_B, \tilde{\beta})$ – цена на опорния план, съответен на текущ базис; (4.1)

$\tilde{\Delta}_j = (\tilde{c}_B, \tilde{\beta}) - \tilde{c}_j$ – оценка на небазисната променлива $\tilde{x}_j$; (4.2)

Съгласно направените означения получаваме:

$$Z = L(\tilde{c}, \tilde{x}) = (\tilde{c}_B, \tilde{\beta}) - \sum_{j=m+1}^n ((\tilde{c}_B, \tilde{\alpha}_j) - \tilde{c}_j) \tilde{x}_j$$

$$Z = \tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_{m+1} \tilde{x}_{m+1} - \tilde{\Delta}_{m+2} \tilde{x}_{m+2} - \dots - \tilde{\Delta}_n \tilde{x}_n$$

Тъй като $\tilde{x}_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, то знакът на $\tilde{\Delta}_i \tilde{x}_i$, $i = \overline{m+1, n}$ се определя от знака на $\tilde{\Delta}_i$, т.е. ако всички $\tilde{\Delta}_i \geq 0$, $i = \overline{m+1, n}$, то $Z_{\min} = \tilde{\Delta}_0$, при

$$\tilde{x}_1 = \tilde{\beta}_1, \tilde{x}_2 = \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{x}_m = \tilde{\beta}_m$$

$$\tilde{x}_{m+1} = \tilde{x}_{m+2} = \dots = \tilde{x}_n = 0$$

Нанасяме данните в симплекс-таблица по следния начин:

N_0	min	Z	$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_2$	...	$\tilde{c}_m$	$\tilde{c}_{m+1}$	...	$\tilde{c}_n$
$\tilde{c}_B$	БН	$\tilde{b}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	...	$\tilde{x}_m$	$\tilde{x}_{m+1}$	...	$\tilde{x}_n$
$\tilde{c}_1$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{b}_1$	$\tilde{a}_{1,1}$	$\tilde{a}_{1,2}$	...	$\tilde{a}_{1,m}$	$\tilde{a}_{1,m+1}$	...	$\tilde{a}_{1,n}$
$\tilde{c}_2$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{b}_2$	$\tilde{a}_{2,1}$	$\tilde{a}_{2,2}$	...	$\tilde{a}_{2,m}$	$\tilde{a}_{2,m+1}$	...	$\tilde{a}_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\tilde{c}_m$	$\tilde{x}_m$	$\tilde{b}_m$	$\tilde{a}_{m,1}$	$\tilde{a}_{m,2}$	...	$\tilde{a}_{m,m}$	$\tilde{a}_{m,m+1}$	...	$\tilde{a}_{m,n}$
$Z_{N_0} = \tilde{\Delta}_0$			$\tilde{\Delta}_1$	$\tilde{\Delta}_2$	...	$\tilde{\Delta}_m$	$\tilde{\Delta}_{m+1}$	...	$\tilde{\Delta}_n$

$$\tilde{\Delta}_0 = \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \cdot \tilde{b}_i, \quad \tilde{\Delta}_j = \left(\sum_{i=1}^m \tilde{c}_i \cdot \tilde{a}_{i,j} \right) - \tilde{c}_j, \quad j = \overline{1, n}$$

Пример 4.3. Да се реши задачата на ЛО:

$$Z = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \min, \quad \left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1 \quad \quad + 2x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{array} \right.$$

Решение. Привеждаме в КЗЛО с две балансови променливи x_4 и x_5 .

$$Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 \rightarrow \min$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + \boxed{x_2} - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 \quad \quad + 2x_3 \quad + \boxed{x_5} = 5 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{array} \right.$$

№1	min	Z	1	2	-1	0	0
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	2	2	1	-1	-1	0
0	x_5	5	1	0	2	0	1
$Z_1 = 4$			3	0	-1	-2	0

Изчисляваме индексните оценки по формули (4.1) и (4.2). В индексния ред имаме една неблагоприятна индексна оценка $\Delta_1 = 3 > 0$. Това показва, че съществува по-добър опорен план в смисъл на минимизация на целевата функция. Избираме стълба на x_1 за разрешаващ стълб, т.е. променливата x_1 ще стане базисна променлива в едно от двете уравнения на системата ограничения.

В случай, че имаме повече от една неблагоприятна индексна оценка е желателно да изберем за разрешаващ стълб стълба на най-неблагоприятната, т.е. най-голямата по абсолютна стойност индексна оценка. При големи задачи още при първа неблагоприятна оценка се преминава към нов опорен план.

Нека $\Delta_{j_0} > 0$ и стълба на променливата x_{j_0} сме избрали за разрешаващ стълб. За разрешаващ ред избираме реда i_0 , за който

$$\min_{\substack{a_{i,j_0} > 0 \\ i=1,m}} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,j_0}} \right\} = a_{i_0,j_0}.$$

В разглеждания пример имаме $\min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{5}{1} \right\} = \frac{2}{2} = 1$, т.е. разрешаващият ред ще е редът на променливата x_2 и x_1 ще стане базисна променлива на мястото на x_2 в първото уравнение.

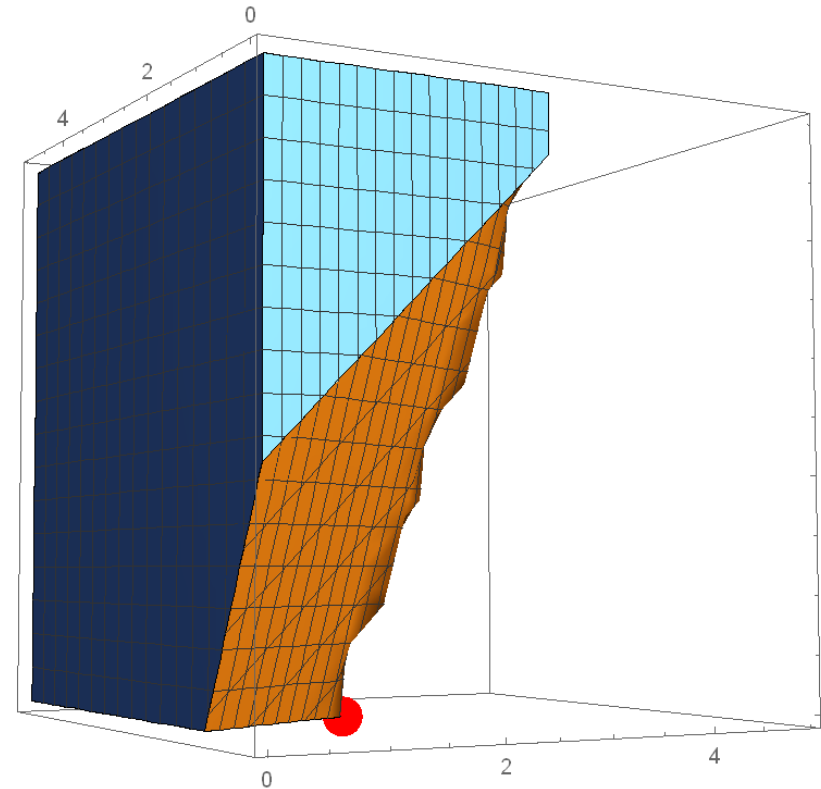
С метода на Гаус-Жордан преминаваме към новия базис.

•→

№1	min	Z	1	2	-1	0	0
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	2	2	1	-1	-1	0
0	x_5	5	1	0	2	0	1
$Z_1 = 4$			3	0	-1	-2	0

№2	min	Z	1	2	-1	0	0
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
0	x_5	4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$Z_2 = 1$			0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

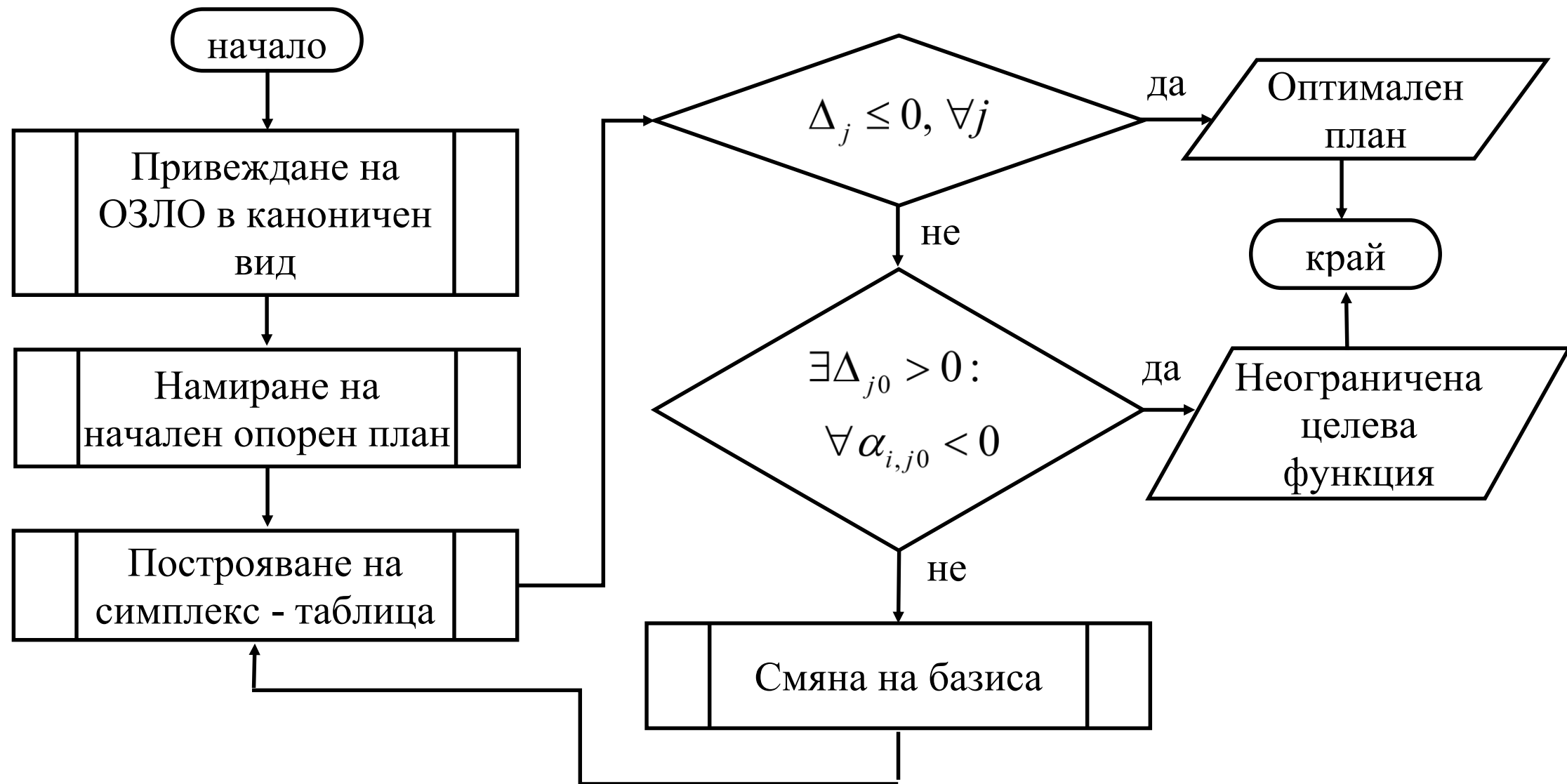
№3	min	Z	1	2	-1	0	0
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	$\frac{9}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
-1	x_3	$\frac{8}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$Z_3 = \frac{1}{5}$			0	$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$



Индексният ред съдържа само благоприятни индексни оценки $\Delta_j \leq 0$, $j = \overline{1,5}$. Следователно полученият опорен план е оптимален.

Отговор. $Z_{\min} = \frac{1}{5}$, $x_1 = \frac{9}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{8}{5}$.

4.2. Алгоритъм на симплекс-метода



4.3. Намиране на начален опорен план с М-метод. Примери

При привеждането на ОЗЛО в каноничен вид, случаите, в които директно се получава опорен план (базисно решение) са приятно изключение.

В случая, когато в КЗЛО присъстват уравнения без единична базисна променлива се прилага така нареченият **метод на изкуствения базис** или **М-метод**.

Нека е дадена КЗЛО:

$$(K) \quad Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Определение. **M**-задача, съответна на **K**-задачата наричаме задачата:

$$(M) \quad Z_M(x_M) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + M \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min, \quad (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (4.5)$$

където M е достатъчно голямо положително число.

Теорема 1. Ако $x_M^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)^T$ е оптимално решение на **M**-задачата и $x_{n+i}^* = 0, i = \overline{1, m}$, то $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ е оптимално решение на **K**-задачата.

Теорема 2. Ако каноничната **K**-задача има оптимално решение, то съществува число $M_0 > 0$, такова че за всяко $M \geq M_0$ съответната **M**-задача е разрешима и последните m , т.е. изкуствените координати на всички нейни оптимални решения са нули, т.е. $x_{n+i}^* = 0, i = \overline{1, m}$.

Тези теореми позволяват каноничната **K**-задача да се решава чрез **M**-задачата.

Началният опорен план на **M**-задачата е $x_M^0 = (0, 0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)^T$ с базис $B_{x_M^0} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$. Променливите $x_{n+i} = 0, i = \overline{1, m}$ се наричат изкуствени променливи, а $B_{x_M^0}$ – изкуствен базис.

При прилагане на симплекс-алгоритъма към **M**-задачата има два случая:

1. Оптимален план на **M**-задачата: $x_M^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)^T$

➤ ако $x_{n+i}^* = 0, i = \overline{1, m}$, то $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ е оптимално решение на каноничната **K**-задача и $Z(x^*) = Z_M(x_M^*)$;

➤ ако $\sum_{i=1}^m x_{n+i}^* > 0$, т.е. в оптималното решение на **M**-задачата за

някое i_0, x_{n+i_0} е останала като базисна променлива, то от Теорема

2 следва, че допустимото множество на каноничната **K**-задача е празно, т.е. тя няма решение.

2. **M**-задачата няма решение ($Z_M(x_M)$ е неограничена). От Теорема 2 следва, че и каноничната **K**-задача няма решение (допустимото ѝ множество е празно или $Z(x)$ е неограничена).

При решаване на **M**-задачата числото M може да не се определя – достатъчно е да се вземе предвид, че е достатъчно голямо положително число.

Понякога е удобно M да се замести $M = 10 \cdot \max_{i=1,n} \{ |c_i| \}$.

Забележка. Не е необходимо началният базис на **M**-задачата да бъде изцяло изкуствен. Ако в КЗЛО има уравнения с единични базисни променливи желателно е те да бъдат използвани като базисни.

Забележка. След излизането на някоя изкуствена променлива x_{n+i} ($1 \leq i \leq m$) от базиса, попълването на стълба x_{n+i} е излишно и той

може да отпадне от таблицата, тъй като връщането на тази променлива в базиса би довело до увеличаване стойността на целевата функция.

Пример 4.4. Да се реши задачата на ЛО:

$$Z = -2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min \quad \left| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 9 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{array} \right.$$

Решение. Привеждаме в КЗЛО с две балансови променливи x_5 и x_6 .

$$Z = -2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min \quad \left| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 9 \\ -x_1 + x_2 + \boxed{x_6} = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \end{array} \right.$$

Променливата x_6 е базисна променлива в третото уравнение в системата. В първите две уравнения добавяме изкуствени базисни променливи x_7 и x_8 .

Константата M може да заместим напр. с

$$M = 10.\max_{i=1,n} \{|c_i|\} = 10.\max \{|-2|, |3|, |4|\} = 40.$$

Получаваме следната M -задача:

$$Z = -2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 40x_7 + 40x_8 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{lcl}
 -x_1 + x_2 - x_3 & + \boxed{x_7} & = 2 \\
 -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 & + \boxed{x_8} & = 9 \\
 -x_1 + x_2 & + \boxed{x_6} & = 3 \\
 x_i \geq 0, \ i = \overline{1,8}
 \end{array}$$

№1	min	Z	0	-2	3	4	0	0	40	40
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
40	x_7	2	-1	1	-1	0	0	0	1	0
40	x_8	9	-2	1	2	2	-1	0	0	1
0	x_6	3	-1	1	0	0	0	1	0	0
$Z_1 = 440$			-120	82	37	76	-40	0	0	0

№2	min	Z	0	-2	3	4	0	0	40	40
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-2	x_2	2	-1	1	-1	0	0	0	1	0
40	x_8	7	-1	0	3	2	-1	0	-1	1
0	x_6	1	0	0	1	0	0	1	-1	0
$Z_2 = 276$			-38	0	119	76	-40	0	-82	0

№3	min	Z	0	-2	3	4	0	0	40	40
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-2	x_2	3	-1	1	0	0	0	1	0	0
40	x_8	4	-1	0	0	2	-1	-3	2	1
3	x_3	1	0	0	1	0	0	1	-1	0
$Z_3 = 157$			-38	0	0	76	-40	-119	$\langle 37 \rangle$	0

№4	min	Z	0	-2	3	4	0	0	40	40
c_B	БН	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-2	x_2	3	-1	1	0	0	0	1	0	0
4	x_4	2	-1/2	0	0	1	-1/2	-3/2	1	1/2
3	x_3	1	0	0	1	0	0	1	-1	0
$Z_4 = 5$			0	0	0	0	-2	-5	-39	-38

Отговор. $Z_{\min} = 5$; $X_{\text{opt}} = (0, 3, 1, 2)$.

ГЛАВА 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

5.1. Формулировка и съставяне на математически модел на транспортна задача – примери

Транспортната задача (ТЗ) е частен случай на задачата на линейното оптимизиране.

Пример 5.1. Фирма ХХ получава доставки на строителни материали в пристанища Варна и Русе, съответно по 500 и 200 т. Те трябва да се превозят в 4 склада в градовете Пловдив, София, Велико Търново и Монтана, съответно по 200, 200, 200 и 100 т. *Цените* в лв за превоз на 1 т материали от всяко пристанище до всеки град са зададени с таблицата:

Таблица 5.1. Цени на ТЗ за Пример 5.1.

	Пловдив	София	Търново	Монтана
Варна	15	26	30	40
Русе	65	70	32	60

Задачата е да се състави (намери) план, по който общата цена на доставките ще бъде най-малка.

Означения:

Вектор на наличностите: $a = (500, 200)$

Вектор на потребностите: $b = (200, 200, 200, 100)$

Матрица на цените: $c = \begin{pmatrix} 15 & 26 & 30 & 40 \\ 65 & 70 & 32 & 60 \end{pmatrix}$

Търсен план на превозите: $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$

Тук x_{11} е превозеното количество тонове от Варна до Пловдив, x_{12} е превозеното количество тонове от Варна до София и т.н.

Задачата се дефинира във вид на ЗЛО по следния начин:

Търси се минимум на целевата функция:

$$L(X) = 15x_{11} + 26x_{12} + 30x_{13} + 40x_{14} + 65x_{21} + 70x_{22} + 32x_{23} + 60x_{24} \rightarrow \min$$

при условията:

$$G : \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 200 \\ x_{12} + x_{22} = 200 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \\ x_{14} + x_{24} = 100 \end{array} \right. , \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.1)$$

В (5.1) целевата функция и условията G са линейни и от тип равенства, т.е. имаме канонична ЗЛО. Тя може да се решава и със симплекс метод. Но поради спецификата на условията (коефициенти в условията 1 и 0), ТЗ се решава с по-прости алгоритми. В означения на КЗЛО, матричният вид на ограниченията (5.1) се записва във вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Таблица на транспортната задача

ТЗ за горния пример 5.1. с основна матрица X с размерност 2×4 се оформя в следната типова таблица:

Таблица 5.2. Общ вид на таблица на ТЗ.

Потребности Наличности	B_1		B_2		B_3		B_4		a_i
A_1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}	x_{13}	c_{13}	x_{14}	c_{14}	a_1
A_2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}	x_{23}	c_{23}	x_{24}	c_{24}	a_2
b_j	b_1		b_2		b_3		b_4		$\sum a_i$ $\sum b_j$

С нанесени конкретни вектори на ограниченията a , b и на цените c за Пример 5.1 таблицата добива вида:

Таблица 5.3. Общ вид на таблица на ТЗ за Пример 5.1.

Потребности Наличности	B_1 (Пд)		B_2 (Сф)		B_3 (ВТ)		B_4 (Мон)		a_i
A_1 (Варна)	x_{11}	15	x_{12}	26	x_{13}	30	x_{14}	40	500
A_2 (Русе)	x_{21}	65	x_{22}	70	x_{23}	32	x_{24}	60	200
b_j	200		200		200		100		700

Трябва така да се определи план на превозите $X = (x_{ij})$, че сумите по всеки ред и всеки стълб да са равни на наличностите и потребностите.

5.2. Общ вид на ТЗ. Теорема за разрешимост на ТЗ от затворен тип. Определяне ранга на ТЗ

В общия случай ТЗ е с размерност $m \times n$ (m реда и n стълба на матрицата на цените $c = (c_{ij})$). Всички вектори на условията са неотрицателни.

В терминологията на КЗЛО, общата ТЗ се записва така:

Търси се минимум на целевата функция

$$L(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.3)$$

с план $X = (x_{ij})$, който удовлетворява условията:

$$G : \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, \quad a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Теорема 5.1. Необходимо и достатъчно условие (НДУ) за съществуване на план на ТЗ е да има баланс на потребностите и наличностите, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Определение. ТЗ с баланс се нарича **ТЗ от затворен тип**.

Доказателство на Теорема 5.1: (НУ) - Нека (x_{ij}) е план на ТЗ. Ще покажем, че има баланс. Наистина, щом е план, той удовлетворява

условията (5.4), т.е. $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$. Сумираме по i всички редове и

получаваме
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i .$$

Аналогично за стълбовете от $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ следва
$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Понеже двойните суми са еднакви, получаваме баланс
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = S.$$

(ДУ) Обратно, за достатъчност на условието трябва да покажем, че ако има баланс, то съществува поне един план на ТЗ. Конструираме плана $x'_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Ще проверим, че x'_{ij} е план, т.е.

удовлетворява условията (5.4). Тъй като $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, то очевидно $x'_{ij} \geq 0$.

Сумираме по $i = \overline{1, m}$ и получаваме
$$\sum_{i=1}^m x'_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{S} = \frac{b_j}{S} \sum_{i=1}^m a_i = b_j \frac{S}{S} = b_j.$$

Аналогично сумираме по $j = \overline{1, n}$:
$$\sum_{j=1}^n x'_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{S} = \frac{a_i}{S} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{S} \cdot S = a_i$$

Тъй като се удовлетворяват (5.4), то x'_{ij} е план.

Следствие 1. Всяка транспортна задача има поне един план, т.е. $G \neq \emptyset$.

Следствие 2. Цената на всеки план е ограничена.

Доказателство. $|L(X)| = \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right| \leq M \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \right| = M.S,$

където $M = \max \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \right|$ е константа.

Определение. Всеки план $X = (x_{ij})$ на ТЗ, който дава минимум на целевата функция $L(X)$ се нарича **оптимален план (решение) на ТЗ**.

Теорема 5.2. ТЗ винаги има решение, т.е. оптимален план.

Определяне на ранга на ТЗ

Теорема 5.3. Рангът на ТЗ е $r = m + n - 1$

Доказателство. Условиата тип равенства (5.4) са линейно независими по уговорка и са на брой $m + n$. По Теорема 5.1 за всеки план се изпълнява условието за баланс, което е една зависимост в условията, с което рангът се намалява с единица. Теоремата е доказана.

Следствие. Опорните планове на ТЗ не могат да имат повече от $m + n - 1$ ненулеви елемента.

Определение. Ако един опорен план има по-малко от $m + n - 1$ ненулеви елемента, той се нарича **изроден план** и ТЗ също се нарича изродена.

5.3. Алгоритъм на транспортната задача за минимум

Формално съответства на алгоритъма на симплекс метода, като негов частен случай. По-нататък ще разгледаме по-конкретно всички стъпки.

- 1) Проверка за наличие на баланс. Ако няма баланс се добавя фиктивен ред или стълб с необходимото количество за получаване на баланс.
- 2) Определяне на ранга $r = m + n - 1$.
- 3) Построяване на начален опорен план с $r = m + n - 1$ пълни клетки.
- 4) Изчисляване на стойността на целевата функция за опорния план.
- 5) Изчисляване на потенциалите u_i, v_j на опорния план: $u_i + v_j = c_{ij}$.
- 6) Изчисляване на оценките на небазисните (празни) клетки $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$
- 7) Проверка дали планът е оптимален, т.е. дали всички оценки $\delta_{ij} \leq 0$. Ако условието е изпълнено – край. Ако не - се преминава към 8).
- 8) Преход към нов опорен план.
- 9) Преминаване към стъпка 4).

5.4. Намиране на начален опорен план на ТЗ

Ще разгледаме с примери два метода за намиране на начален опорен план – метод на северозападния ъгъл и метод на минималния елемент. Вторият се счита за по-ефективен, тъй като се базира на цените.

Пример 5.2. Да се намери начален опорен план на ТЗ за минимум, при:
Наличности: $a = (20, 31, 40)$, потребности: $b = (15, 20, 30, 16, 10)$.

Матрица на цените:
$$c = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Тази задача е с размерност $m = 3$, $n = 5$. Сумата на наличностите е 91 и на потребностите също е 91, т.е. има баланс. Следователно по теореми 5.1-5.3 ТЗ има оптимално решение. Рангът е $r = m + n - 1 = 7$. Това означава, че опорният план трябва да има 7 пълни клетки. Останалите 8 клетки ще запълваме с „–“.

5.4.1. Метод на северозападния ъгъл за намиране на начален опорен план на ТЗ от затворен тип

Съставяме следната таблица без цени:

Таблица 5.4. Начален вид на таблицата на ТЗ за Пример 5.2.

Потребности Наличности	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1						20
A_2						31
A_3						40
b_j	15	20	30	16	10	91

В метода на северозападния ъгъл на всяка стъпка от построяването на начален опорен план се запълва най-горната и най-лява (северозападна) празна клетка (виж Таблица 5.4). В началото това е клетката (1,1) за x_{11} . Наличностите в първия ред A_1 са 20, а потребностите за първата колона B_1 са 15. Разпределяме възможно най-голямото количество, т.е. $x_{11} = 15$. Тъй като потребностите за B_1 са удовлетворени, в останалите клетки от първия стълб поставяме „–“. Наличностите в първия ред стават $20 - 15 = 5$. Следващата празна северозападна клетка е x_{12} . Наличностите са 5, потребностите са 20. Разпределяме $x_{12} = 5$, а останалите клетки от първия ред запълваме с „–“. Следващата празна северозападна клетка е x_{22} . Наличностите са 31, потребностите намаляха и са $20 - 5 = 15$. Затова разпределяме тези наличности - $x_{22} = 15$, и т.н. В резултат получаваме Таблица 5.5 на началния опорен план на ТЗ (в жълто), получен по метода на северозападния ъгъл.

Таблица 5.5. Начален опорен план по северозападен ъгъл за Пример 5.2.

Потребности Наличности	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	5 15	1 5	2 —	3 —	2 —	20
A_2	2 —	1 15	1 16	5 —	3 —	31
A_3	3 —	3 —	1 14	2 16	4 10	40
b_j	15	20	30	16	10	91 91

Цената на този начален план по метода на северозападния ъгъл е:

$$L(X_{c.3.}^{(0)}) = 15.5 + 5.1 + 15.1 + 16.1 + 14.1 + 16.2 + 10.4 = 197.$$

5.4.2. Намиране на начален опорен план по метода на минималния елемент (ММЕ)

Започваме с празна таблица с цени. За Пример 5.2. таблицата е:

Таблица 5.6. Начален вид на таблицата на ТЗ за Пример 5.2 за ММЕ.

Потребности Наличности	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	5	1	2	3	2	20
A_2	2	1	1	5	3	31
A_3	3	3	1	2	4	40
b_j	15	20	30	16	10	91

На всяка стъпка на метода се запълва клетка с минимална текуща цена. В Таблица 5.6 минималната цена е 1. Избираме напр. клетка (1,2) и разпределяме в нея количество $x_{12} = 20$.

Таблица 5.7. Намерен начален план на ТЗ за Пример 5.2 с ММЕ.

Потребности Наличности	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	5 —	1 20	2 —	3 —	2 —	20
A_2	2 1	1 0	1 30	5 —	3 —	31
A_3	3 14	3 —	1 —	2 16	4 10	40
b_j	15	20	30	16	10	91 91

Но с това едновременно се анулират $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, защото потребностите са 20 единици и наличностите са 20. **Задачата е изродена.** За да запазим 7 пълни клетки за опорния план, избираме една клетка в реда или стълба на водещата (в примера това е $x_{12} = 20$) и поставяме базисна нула в която и да е празна до момента клетка. Избираме в нашия случай клетката (2,2) с минимална цена 1 и поставяме количество $x_{22} = 0$. От останалите празни клетки отново избираме да запълним клетка с минимална цена. Минималната цена е отново 1. Избираме да запълним клетка (2,3). Потребностите ѝ са 30, наличностите са 31, запълваме $x_{33} = 30$ и в празните клетки на третия стълб поради изчерпване на потребностите на B_3 поставяме „–“. В останалата част от таблицата минимална цена е 2, достига се в клетки (2,1) и (3,4). Запълваме $x_{21} = 1$ и т.н.

Цената на така получения начален план по ММЕ е:

$$L(X^{(0)}) = 20.1 + 1.2 + 0.1 + 30.1 + 14.3 + 16.2 + 10.4 = 166.$$

В случая тази цена е по-ниска от резултата, получен с метода на северозападния ъгъл.

За по-голяма яснота можем да записваме отделно получените опорни планове. За метода на минималния елемент по Таблица 5.7 той ще има вида:

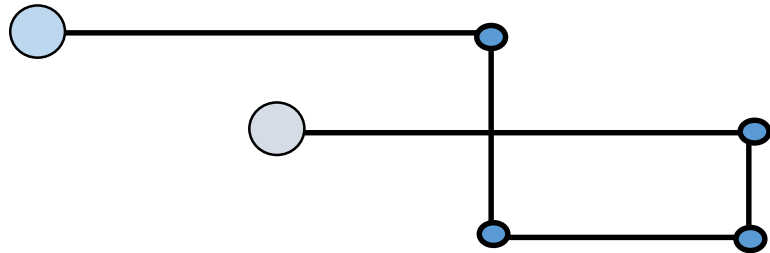
$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} - & 20 & - & - & - \\ 1 & 0 & 30 & - & - \\ 14 & - & - & 16 & 10 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Препоръчва се за всеки план да се проверява дали броят пълни клетки е равен на ранга на ТЗ и дали са изпълнени всички условия за план, т.е. сумите по ред да са равни на наличностите и сумите по стълб да са равни на потребностите.

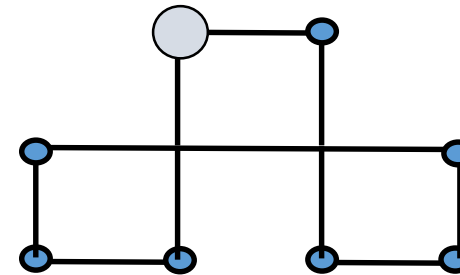
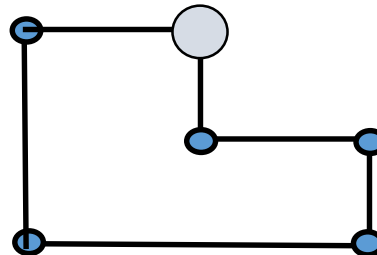
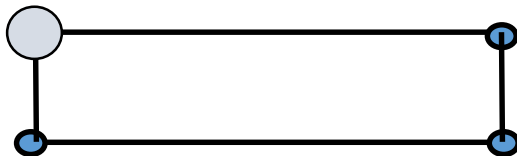
5.5. Цикли

Определение. Под **транспортна отсечка** се разбира хоризонтална или вертикална отсечка, чиито краища лежат в клетки от план на ТЗ. Краищата на отсечките ще наричаме още **върхове**.

Определение. **Начупена линия** е последователност от транспортни отсечки, с начало и край, като редуването на отсечките е хоризонтално, вертикално. Пример (началото и край са означени с по-големи кръгчета):



Определение. **Цикълът** е затворена начупена линия (начало=край).



Теорема 5.4. За който и да е опорен план на ТЗ не съществува цикъл, всички краища на който лежат в пълни клетки (т.е. опорният план е ацикличен).

Следствие. За всяка празна клетка съществува точно един цикъл с връх в клетката и всички останали върхове в пълни клетки.

Примери за цикли на празни клетки от плана (5.5):

$$X^{(0)} = \left(\begin{array}{ccccc} - & 20 & - & - & - \\ \bullet & \bullet & \bullet & - & \bullet \\ 1 & 0 & 30 & - & - \\ \bullet & - & - & 16 & 10 \\ \bullet & - & - & - & \bullet \end{array} \right). \quad X^{(0)} = \left(\begin{array}{ccccc} - & 20 & - & - & - \\ 1 & \bullet & 0 & \bullet & 30 \\ 14 & \bullet & - & \bullet & - \\ \bullet & - & - & - & 16 & 10 \end{array} \right) \quad (5.6)$$

Цикълът за клетката (1,5) е: $(1,5) \rightarrow (3,5) \rightarrow (3,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,5)$.

Цикълът за клетката (3,3) е: $(3,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,1) \rightarrow (3,3)$.

Задача. Намерете циклите на останалите 6 празни клетки.

5.6. Алгоритъм за преход към нов опорен план в ТЗ

Правила за преход към нов опорен план:

- 1) Нека (k, l) е празна клетка, която искаме да влезе в новия опорен план
- 2) Намира се цикълът на тази клетка, с върхове от текущия опорен план
- 3) Означаваме последователно върховете на цикъла с $\oplus$ и $\ominus$, като започваме с $\oplus$ в клетката (k, l)
- 4) Намираме минималното количество в отрицателните клетки на цикъла, означаваме го с $\mu = \min_{\ominus} x_{ij}$
- 5) Преразпределяме μ по цикъла, като го добавяме в клетките с $\oplus$ и го изваждаме от клетките с $\ominus$. Следим в новия опорен план броят на пълните клетки да остава равен на ранга r , като особено внимаваме в случаите на изроден план.

Пример 5.3. Преход към нов опорен план за плана от (5.5).

В случая (5.5) за клетката (1,5) $\mu = \min\{10, 1, 20\} = 1$. Тогава преходът

⊖

към новия опорен план $X^{(1)}$ е:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} - & 20 & \ominus & - & - & \oplus \\ 1 & \ominus & 0 & \oplus & 30 & - & - \\ 14 & \oplus & - & - & 16 & 10 & \ominus \end{pmatrix}; \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} - & 19 & - & - & 1 \\ - & 1 & 30 & - & - \\ 15 & - & - & 16 & 9 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Тук клетката (2,1) излезе, а клетката (1,5) влезе в новия опорен план. Цената е

$$L(X^{(1)}) = 19.1 + 1.2 + 0.1 + 30.1 + 15.3 + 16.2 + 9.4 = 164,$$

която е по-ниска от цената 166 на предишния план $X^{(0)}$.

Целта е да прилагаме стратегия за преминаване към нов опорен план така, че цената му да намалява и да ползваме критерий, по който да

проверяваме кога опорният план е оптимален, т.е. дава минималната възможна цена. Тази задача ще решаваме по метода на потенциалите на Канторович.

5.7. Понятие за дуалност. Метод на потенциалите на Канторович

Разглеждаме общата ТЗ (5.3) - (5.4):

$$\text{Задача (I) : } L(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min \quad (5.8)$$

с план $X = (x_{ij})$, удовлетворяващ условията:

$$\begin{array}{l}
 G: \left\{ \begin{array}{ll}
 x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} & = a_1 \\
 \vdots & \\
 x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} & = a_m
 \end{array} \right. \begin{array}{l} \boxed{u_1} \\ \vdots \\ \boxed{u_m} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Потенциали за редовете} \\ \\ \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{ll}
 x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} & = b_1 \\
 \vdots & \\
 x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} & = b_n
 \end{array} \right. \begin{array}{l} \boxed{v_1} \\ \vdots \\ \boxed{v_n} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Потенциали за колоните} \\ \\ \end{array} \\
 x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad \begin{array}{l} \text{Естествени условия за} \\ \text{неотрицателност} \end{array}
 \end{array} \quad (5.9)$$

Съгласно теорията на линейното оптимиране, за всяка КЗЛЮ може да се дефинира нейната дуална задача, като се използват $m+n$ числа u_i, v_j , наречени потенциали. Ще дефинираме дуалната задача на ТЗ (I).

Приведените теореми са без доказателство.

Задача (II) , дуална на (I):

$$F(Y) = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m + b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n \rightarrow \max \quad (5.10)$$

с план $Y = (u_i, v_j)$, удовлетворяващ условията:

$$D: \begin{cases} u_1 + v_1 \leq c_{11} \\ \vdots \\ u_i + v_j \leq c_{ij} \\ \vdots \\ u_m + v_n \leq c_{mn} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{т.н естествени условия за максимум} \\ \\ \\ \end{array} \quad (5.11)$$

u_i, v_j са свободни по знак!

Теорема 5.5 (за дуалност на ТЗ) - следствие от теоремата за дуалност на симплекс задача. Задача (I) и дуалната ѝ задача (II) винаги имат решение, означаваме ги с $X^* = (x^*_{ij})$, $Y^* = (u^*_i, v^*_j)$.

Теорема 5.6. Рангът r на задача (I) е равен на ранга на дуалната ѝ задача (II), $r = m + n - 1$.

Следствие. Опорните, вкл. и оптималните планове на двете задачи имат най-много r ненулеви елемента.

Следствие. В $Y^* = (u^*_i, v^*_j)$ има най-много $r = m + n - 1$ ненулеви елемента, а те са $m + n$ на брой, т.е. между тях има линейна зависимост.

Извод. Всеки план на дуалната задача (II) е определен с точност до константа. В решението се задава произволно един потенциал, най-често той се взима равен на нула.

Теорема 5.7. Ако $X^* = (x^*_{ij})$ е оптимален план на задача (I), то за всяко $(\forall)$ решение $Y^* = (u^*_i, v^*_j)$ на дуалната задача (II) е изпълнено

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ за } \forall ij : x^*_{ij} > 0 \quad (5.12)$$

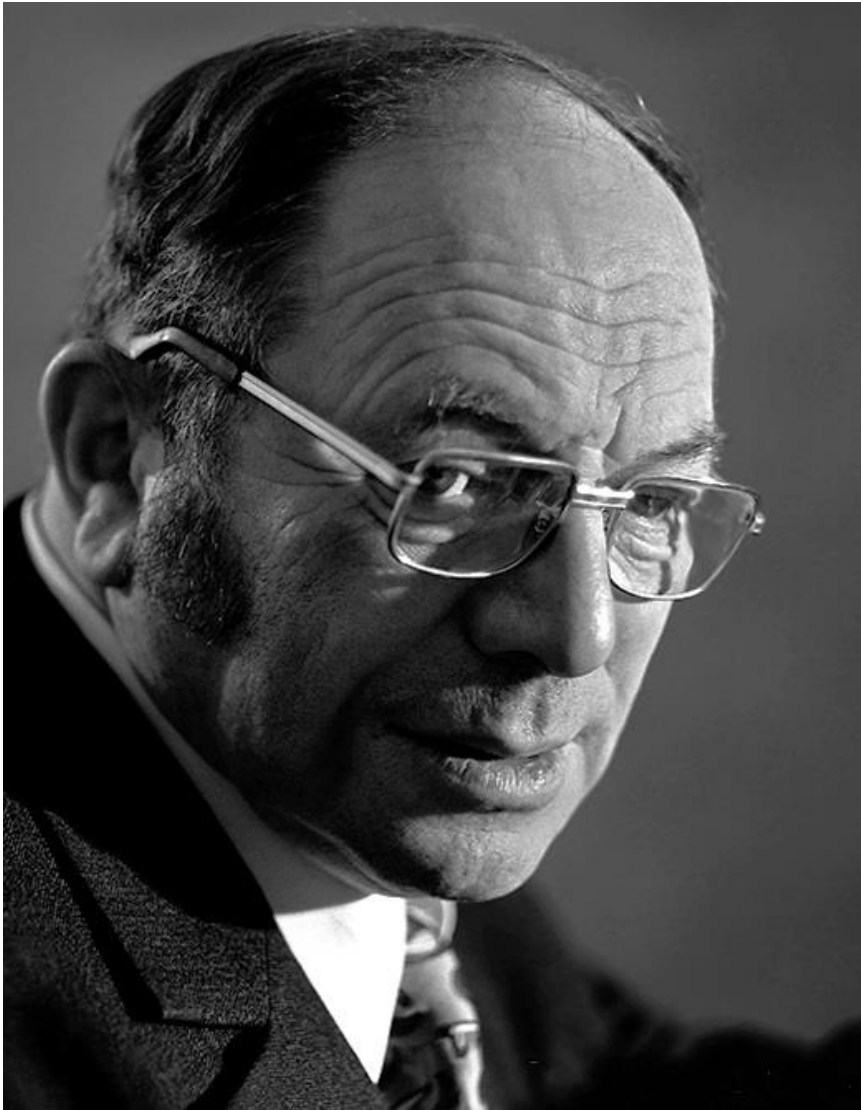
и обратно, ако за $\forall Y^*$ е изпълнено $u_i + v_j = c_{ij}$, то съществува $(\exists)$ решение X^* на задача (I), такова че $x_{ij}^* > 0$.

Теорема 5.8 за потенциалите (Теорема на Канторович).
Необходимо и достатъчно условие (НДУ) един план $X = (x_{ij})$ на задача (I) да е оптимален е да $\exists$ опорен план на задача (II) $Y = (u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$, който удовлетворява условията

$$(a) \quad u_i + v_j = c_{ij}, \quad \forall ij : x_{ij} > 0 \quad (5.13)$$

$$(б) \quad u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad \text{за останалите } x_{ij} = 0 \quad (5.14)$$

Извод: Планът $X = (x_{ij})$ е оптимален в транспортна задача за минимум, ако всичките му оценки са по-малки или равни на нула:
 $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$.



Леонид Витальевич Канторович (1912-1974) е руски икономист и математик, създател на линейното програмиране (оптимизиране). Работи в областта на функциите и функционалния анализ, както и в сферата на изчислителната математика. През 1975 г., заедно с Тялинг Коопманс, печелят Нобелова награда за икономика за техния принос в теорията за оптималното разпределение на ресурсите.

https://bg.wikipedia.org/wiki/Леонид_Канторович

5.8. Примери за метода на потенциалите

В следващия пример ще покажем как се намират потенциалите и как се преминава към нов опорен план чрез стратегията на Канторович за намаляване на цената (в ТЗ за минимум) и прилагане на критерия за достигане на оптималния план.

Пример 5.4. Дадена е ТЗ за минимум и начален опорен план:

Наличности: $a = (70, 80, 35)$, *потребности:* $b = (20, 50, 25, 50, 40)$,

$$\text{цени: } c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ начален опорен план } X^0 = \begin{pmatrix} - & 35 & 25 & 10 & - \\ - & - & - & 40 & 40 \\ 20 & 15 & - & - & - \end{pmatrix}$$

Решение. Тази задача е с размерност $m = 3$, $n = 5$. Сумата на наличностите е равна на сумата от потребностите $= 185$, т.е. има баланс и ТЗ е от затворен тип. Рангът е $r = m + n - 1 = 7$. Това означава, че всеки опорен план трябва да има 7 пълни клетки. Останалите 8 клетки

запълваме с „–“. Веднага се проверява, че даденият начален план X^0 е опорен: има точно 7 ненулеви клетки, всички суми по редове и колони са равни на зададените наличности и потребности.

Записваме информацията в таблица 5.8. За определяне на потенциалите добавяме по една колона отдясно за u_i и отдолу – за v_j . Съгласно теорията едно от тези числа можем да избираме произволно, нека това е $u_1 = 0$. Най-често се избира начален потенциал в ред или стълб, в който има най-много пълни клетки от текущия опорен план.

Всички останали потенциални изчисляваме така, че да е изпълнено

$$(a) \quad u_i + v_j = c_{ij}, \quad \forall ij : x_{ij} > 0 \quad (5.13)$$

Напр. щом $u_1 = 0$, от пълна клетка (1,2) можем да намерим $v_2 = 3$ от $u_1 + v_2 = 3$. Аналогично за пълна клетка (1,3) от $u_1 + v_3 = 2$ намираме $v_3 = 2$. След това за (1,4) от $u_1 + v_4 = 4$ намираме $v_4 = 4$. За (2,4) от $u_2 + v_4 = 2$ имаме $u_2 = -2$ и т.н.

Таблица 5.8. Изчисляване на потенциалите на ТЗ за плана X^0 от Пример 5.4.

	B_1		B_2		B_3		B_4		B_5		a_i	u_i
A_1	2		3		2		4		5		70	0
	—		35		25		10		—			
A_2	6		3		4		2		1		80	-2
	—		—		—		40		40			
A_3	1		2		3		4		2		35	-1
	20		15		—		—		—			
b_j											185	
	20		50		25		50		40		185	
v_j	2		3		2		4		3		$L(X^0) = 365$	

Цената на плана е: $L(X^0) = L_{\min} = 365$.

Препоръка. За всеки опорен план след намиране на потенциалите проверете (5.13) за пълните клетки.

За да проверим дали този план е оптимален, изчисляваме всички оценки на празните клетки по формулата $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. За празните клетки имаме:

$$\delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 2 + 0 - 2 = 0$$

$$\delta_{23} = 2 - 2 - 4 < 0$$

$$\delta_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 3 + 0 - 5 = -2 < 0$$

$$\delta_{33} = 2 - 1 - 3 < 0$$

$$\delta_{21} = 2 - 2 - 6 < 0$$

$$\delta_{34} = 4 - 1 - 4 < 0$$

$$\delta_{22} = 3 - 2 - 3 < 0$$

$$\delta_{35} = 3 - 1 - 2 = 0$$

Всички оценки на празните клетки са по-малки или равни на нула. Съгласно теоремата на Канторович, опорният план X^0 е оптимален с цена $L(X^0) = 365$. Тъй като има оценки, които са равни на нула (δ_{11}, δ_{35}), то ТЗ има алтернативни решения със същата цена.

5.9. Варианти на транспортната задача

В практиката често се срещат различни ограничения, които изискват преобразуване на условията, за да се приложи алгоритъмът, съответстващ на теорията. Някои от тези варианти са:

- а) ТЗ за максимум
- б) ТЗ със забрани
- в) ТЗ от отворен тип
- г) ТЗ с приоритети
- д) задача за назначенията и др.

а) Когато вместо минимум, че търси **максимум на целевата функция**, началният план се намира по метод на максималния елемент. При стратегията за преминаване към нов опорен план и намиране на оптималния план се изисква оценките δ_{ij} да не са отрицателни.

б) При **ТЗ със забрани** (блокирани превози) за някои клетки е достатъчно там да се поставят достатъчно големи цени $M \gg 0$, което ще осигури те да останат празни. Началният опорен план по възможност трябва да избягва забранените клетки. Този тип задачи възникват, когато липсва транспортна връзка, договорът за превози е прекратен и др.

в) Много често наличностите не са равни на потребностите и не е изпълнено условието за баланс от теорема 5.1, което би гарантирало съществуване на решение. Т.е. $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$. Такава задача е от **отворен тип**. За да се приложи алгоритъмът се добавя фиктивен стълб или ред. Възможностите са:

- $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$. В този случай се добавя фиктивен стълб за потребител

$$B_{n+1} \text{ с потребности } b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \text{ и цени } c_{i,n+1} = 0.$$

- Аналогично при недостиг на наличности се добавя фиктивен ред за доставчик A_{m+1} с наличности $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ и нулеви цени.

След решаване на задачата, количествата, определени за фиктивните потребители / доставчици няма да бъдат превозени.

г) ТЗ с приоритети се получава в случаите, когато задачата няма баланс. Напр. има недостиг на наличности, но някой потребител B_k трябва непременно напълно да се удовлетвори. Такива случаи възникват

при сключен договор, необходимост от спазване на срокове и др. За целта в добавения фиктивен ред наличности A_{m+1} в клетка $(m+1, k)$ се поставя цена $M \gg 0$, а в останалите клетки – нулеви цени. По този начин потребител B_k няма да получи фиктивно количество превози, а само реално. Аналогичен е случаят при небалансирана задача с добавяне на фиктивен потребител и приоритет на доставчика.

Възможни са и комбинации от различни варианти на ТЗ. В някои случаи е възможно да се получи несъвместимост на условията. Тогава ТЗ няма да има решение, удовлетворяващо всичките изисквания. Напр. при едновременно задаване на много забрани, приоритети и др.

ГЛАВА 6. ДИНАМИЧНО ОПТИМИРАНЕ

6.1. Основни понятия

Определение. **Система** е съвкупност от елементи с определени свойства (атрибути), които се проявяват при съвместното им функциониране. Част от елементите са основни, тогава при отсъствието на един или някои от тях системата не функционира правилно или не функционира изобщо. Други елементи са помощни и служат да подобряване или промяна на дейностите на системата. Сложната система се състои от по-прости подсистеми.

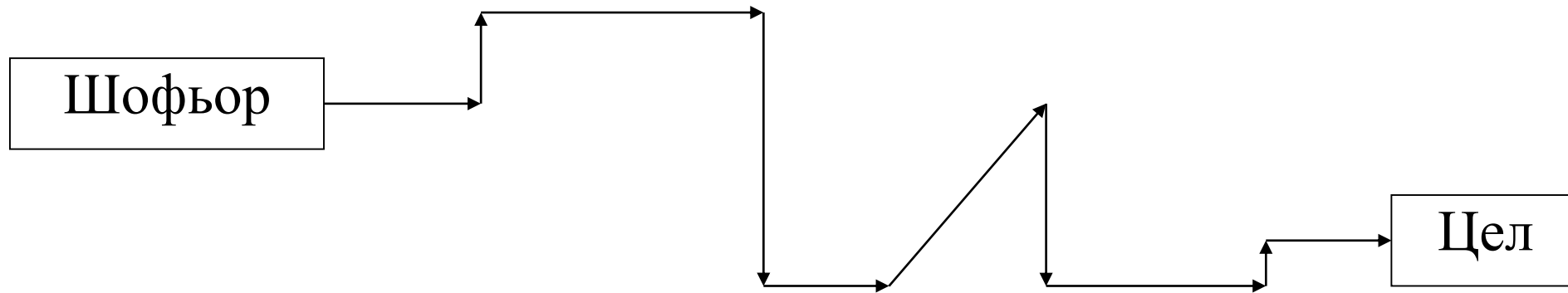
Пример 6.1. Система е например механичният часовник, с елементи зъбни колелца, стрелки и др. Основното свойство е да отмерва времето. При липса или повреда на стрелките например, часовниковата система става негодна.

Пример 6.2. Лека кола - системата има свойството да се придвижва в пространството. Състои се от по-прости подсистеми – двигателна, електрическа и др.

Определение за динамична система.

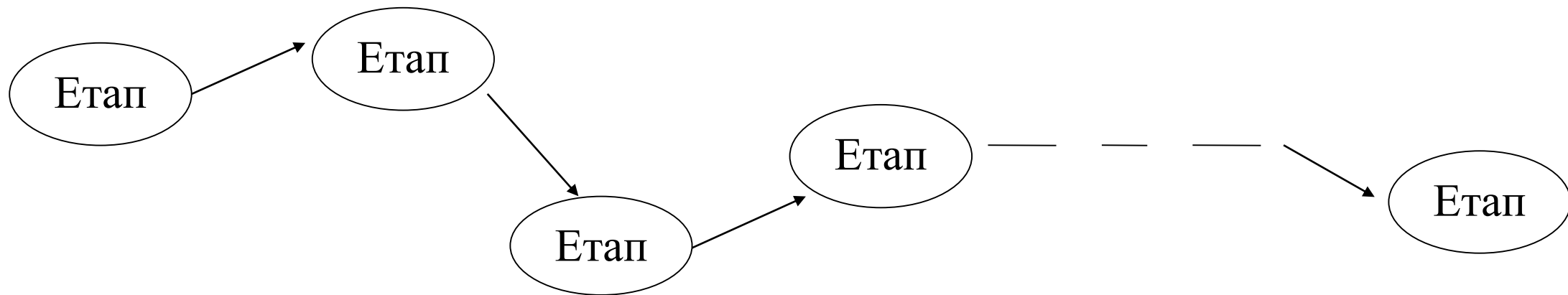
Система, която се променя във времето ще наричаме динамична. Ще считаме, че промените се осъществяват една след друга като системата се стреми към някаква цел.

Пример 6.3. Нека шофьор се движи в голям град по някакъв маршрут и целта му е да пристигне на даден адрес. На всяко кръстовище шофьорът трябва да вземе решение по кой път да тръгне. Така движението се разпределя във времето на етапи, от кръстовище до кръстовище.



По - нататък ще разглеждаме динамични системи, които преминават от едно състояние в друго с течение на времето.

Определение. Всяко преминаване от едно състояние на системата в друго ще наричаме **етап**. Между етапите считаме, че системата се развива съгласно свои вътрешни закономерности до следващия етап, в който трябва да се вземе ново решение към възможен нов етап. Такъв процес на развитие ще наричаме дискретен.



Определение. **Динамичното оптимиране** е дял от математиката, който решава задачите, свързани с развитието на системи по дискретен във времето процес с цел намирането на оптимален в определен смисъл резултат (определяне на минимален път, максимална печалба и др.).

Ако процесът на развитие на системата включва n етапа и на всеки етап се взима по едно решение, ще се вземат общо n решения.

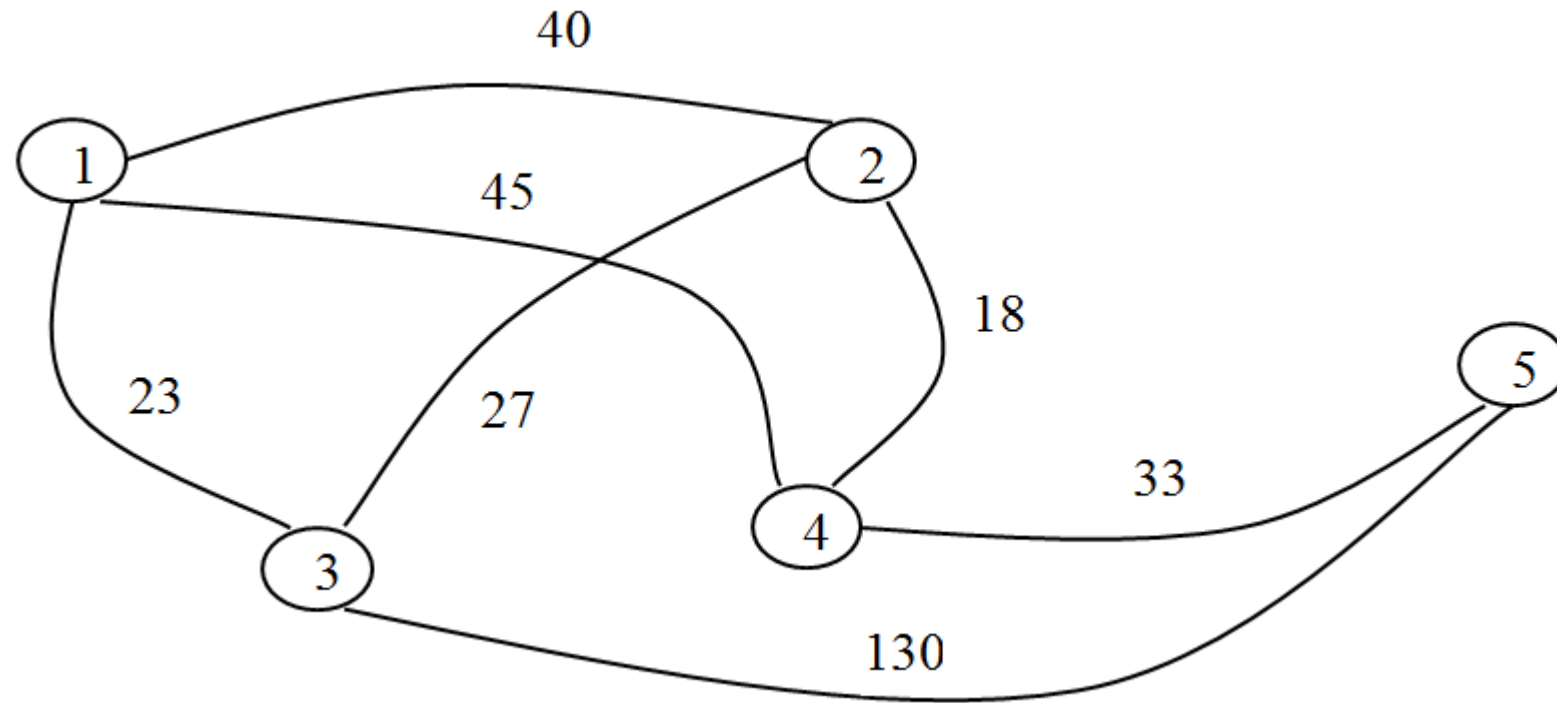
Определение. **Стратегия** или **политика на системата** се нарича наредено множество от взетите решения, подредени по реда на съответните етапи.

6.2. Представяне на решенията с графи

Определение. **Графът** е съвкупност от точки, наречени върхове на графа (множество V) и ребра или дъги, свързващи върховете (множество E). Ако е указана посоката на свързване, графът е ориентиран, в противен случай е неориентиран. В много случаи на всяко ребро се съпоставя някакво число, наречено «тегло» или цена. То може да има различен смисъл – дължина, парична сума, интервал от време и др.

В редица задачи от практиката, графът е най-естественото им описание.

Пример 6.4. Нека върховете на графа от Фиг. 6.1 изразяват градове, а ребрата са пътищата между тях. Ще считаме, че теглата са разстоянията от един връх до друг. Ако задачата е намиране на път от град 1 до град 5, то очевидно имаме няколко решения, например: 1-3-5; 1-2-4-5 и т.н. Друга задача е намирането на най-краткия път от 1 до 5.



Фиг. 6.1. Пример за неориентиран теглови граф.

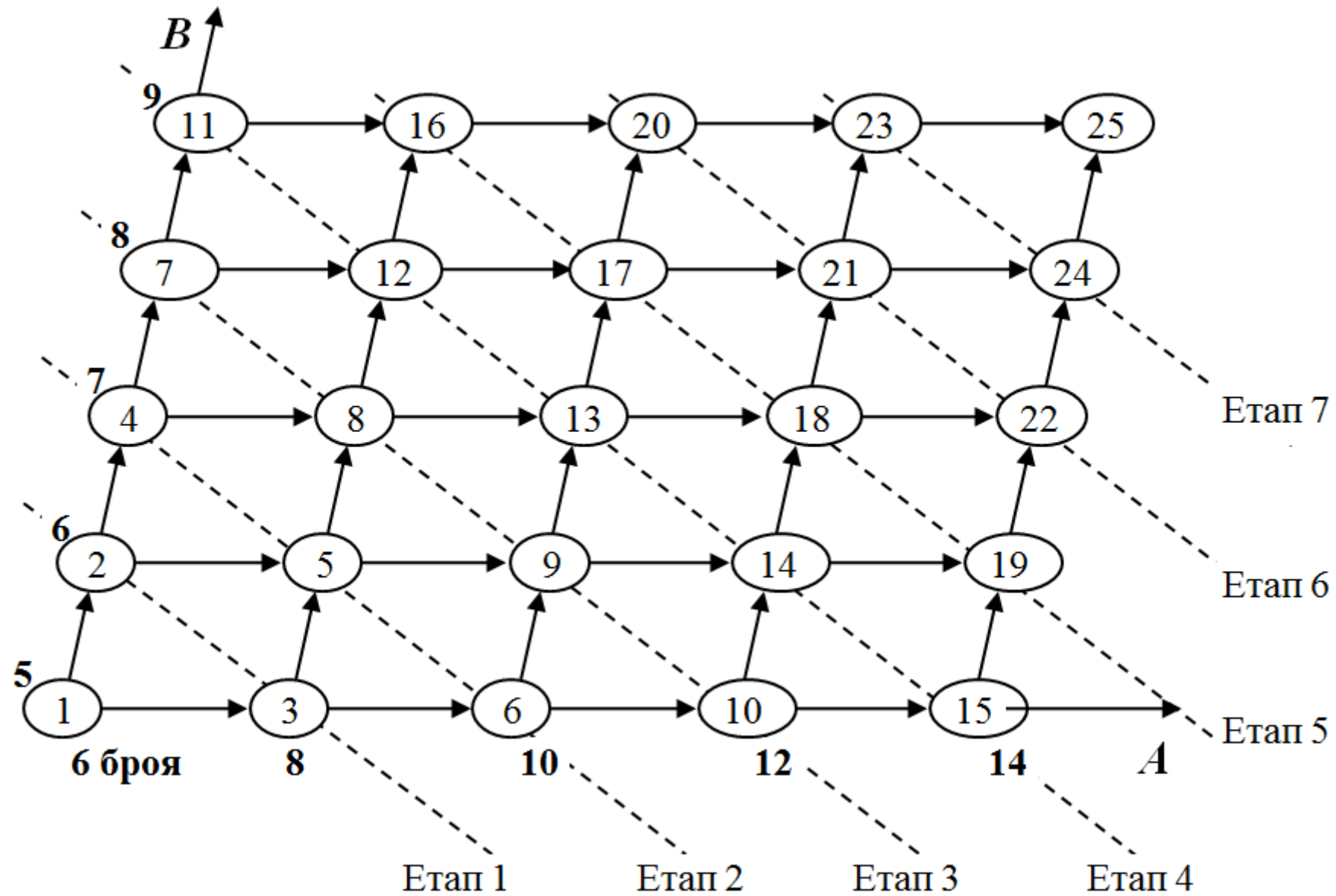
Аналогично, много други задачи, например свързани с планирането на производството, инвестициите, управлението на проекти и т.н., също могат да се опишат с графи. Различните възможни състояния на съответната динамична система във времето се представят като върхове на графа, а преминаването от едно състояние към друго – чрез дъги.

Пример 6.5. Фирма X разполага с два типа машини – тип A и тип B , съответно по 6 и 5 броя. Поради реализирани отлични печалби, в близките месеци фирмата планира разширяване на производството си, като за целта трябва да закупи допълнително оборудване от още 8 машини от тип A и 4 машини от тип B . На месец могат да се заделят пари за закупуване на 2 броя машини от тип A или на 1 брой от тип B .

а) Да се определят възможните състояния на системата и броят на етапите за взимане на решение.

б) Да се запишат две стратегии.

Решение. а) Очевидно състоянията са краен брой и етапите съответстват на всяка месечна покупка. За да подредим състоянията ги изобразяваме с помощта на ориентирания граф от фиг. 6.2.



Фиг. 6.2. Ориентиран граф към пример 6.5.

Върховете на графа са означени с кръгчета и номер, а дъгите със стрелки, показващи възможните преходи. Началото на графа е върхът $\textcircled{1}$, с 6 броя машини от тип A и 5 броя машини от тип B , а крайната цел е върхът $\textcircled{25}$, с 14 машини от тип A и 9 машини от тип B . Изобразени са две основни посоки на движение – надясно, с увеличаване броя на машините от тип A с по 2 броя на месец и нагоре – с увеличаване на броя на машините от тип B с по 1 на месец.

Тръгвайки от началото $\textcircled{1}$ можем да вземем две решения – или надясно или нагоре и да се придвижим по стрелката до следващото състояние $\textcircled{2}$ или $\textcircled{3}$. Това е първият етап за взимане на решение. След това аналогично имаме избор по посока на стрелките и попадаме на втори етап възможни решения $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ или $\textcircled{6}$ и т.н. Общият брой етапи реално е седем, тъй като при последното преминаване към състояние

25 не се взема решение. Следователно фирма X може да приключи планираното разширение на производството си след 8 месеца.

б) Възможни стратегии са:

$\langle 1, 3, 5, 8, 13, 18, 22, 24, 25 \rangle$ и $\langle 1, 2, 4, 7, 12, 17, 21, 24, 25 \rangle$.

Ако на всяко ребро на графа се съпостави число, можем да решаваме различни задачи, търсещи някаква оптимална стратегия. Тя може да се намери с помощта на различни методи, в основата на които лежи принципът на Белман.



Ричард Ърнест Белман (1920-1984) е американски математик, който въвежда динамично програмиране през 1953 г. Има важни приноси в приложната математика и изчислителната техника.

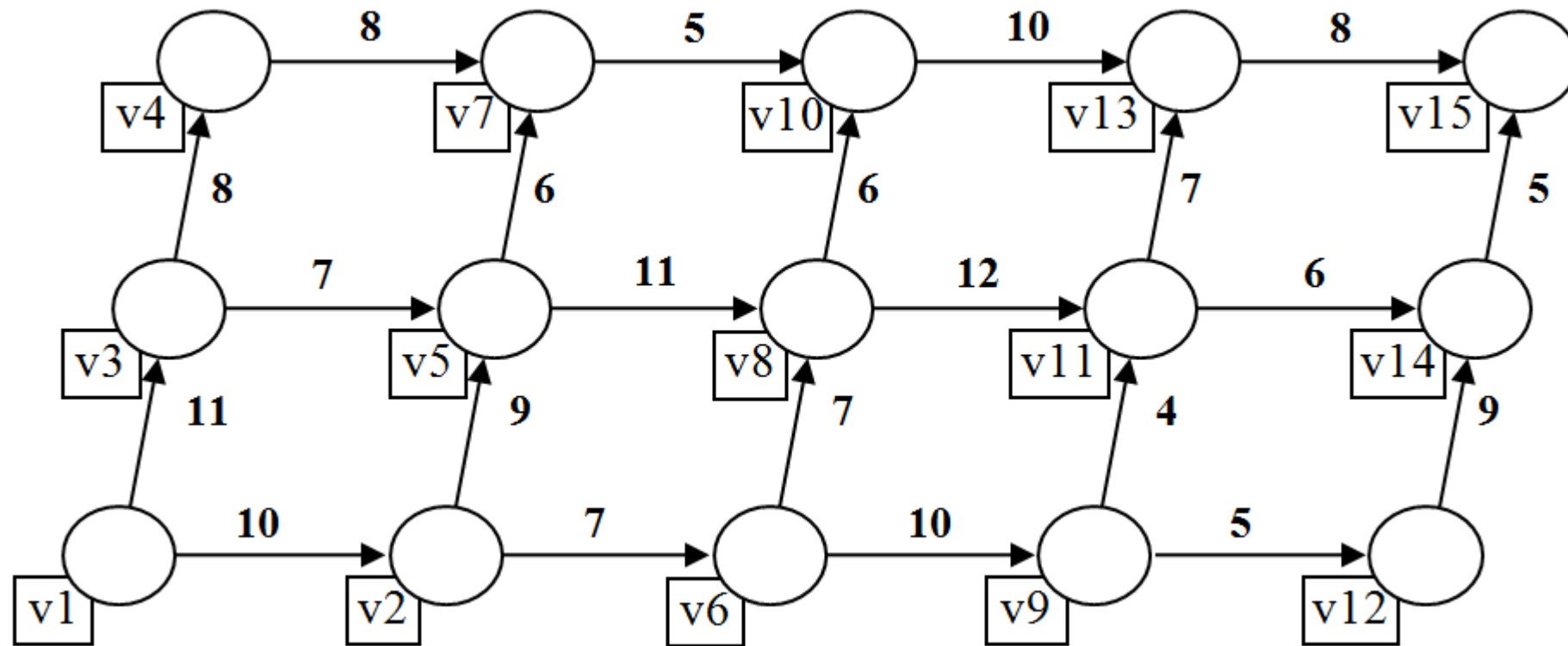
6.3. Принцип за оптималност на Белман

Този принцип е формулиран от един от създателите на динамичното оптимиране – американският математик Ричард Белман. Той гласи:

„Независимо как сме попаднали в дадено състояние на динамичната система, приетите оттук нататък до края на процеса решения да дават оптималната стратегия ”

***Следствие.* Ако сме попаднали в крайното състояние на оптималната стратегия, можем да я търсим в обратен ред.**

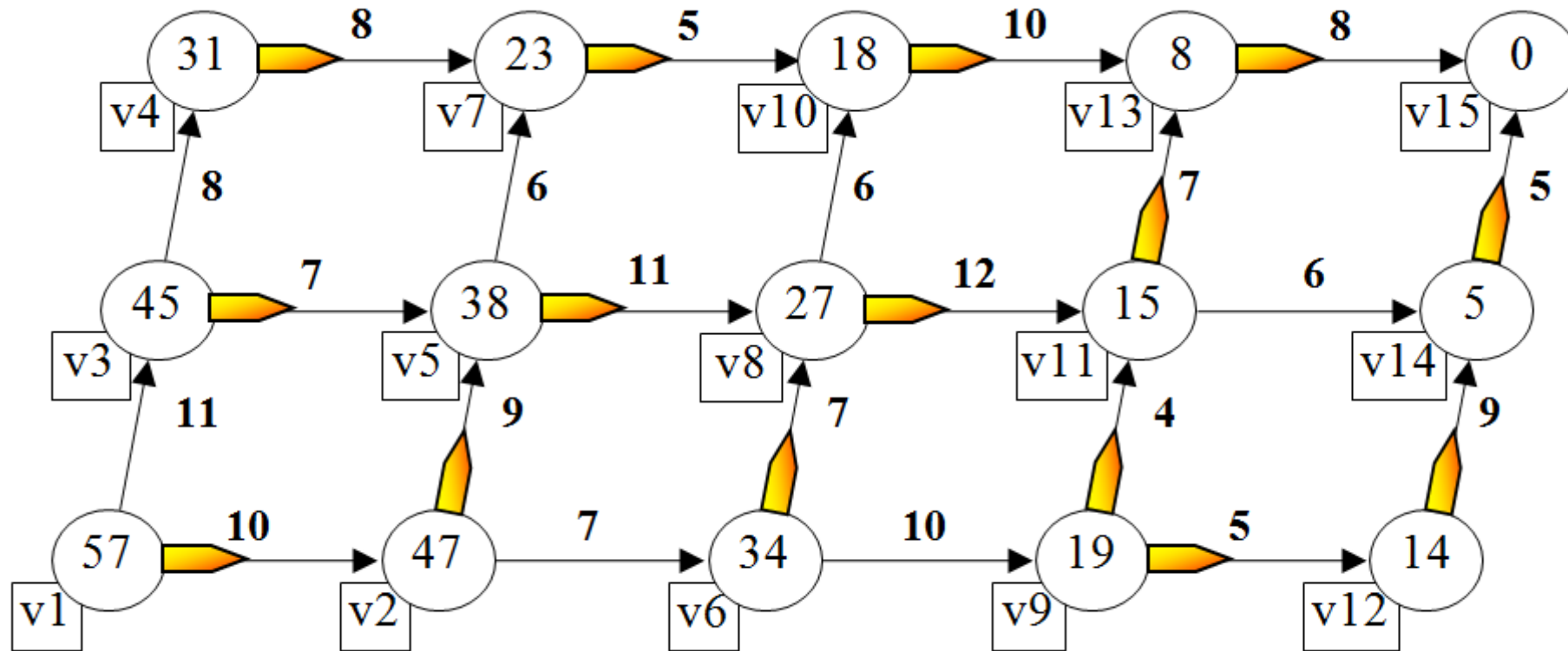
Пример 6.6. С помощта на принципа на Белман да се намери стратегия за минимална печалба на процеса, изобразен на фиг. 6.3. Тук номерата на върховете са означени с „v“ и са поставени в правоъгълничета, а дължините на дъгите (цените) са цифрите с удебелен шрифт. Предприетите решения се нанасят в кръгчетата.



Фиг. 6.3. Ориентиран теглови граф към пример 6.6.

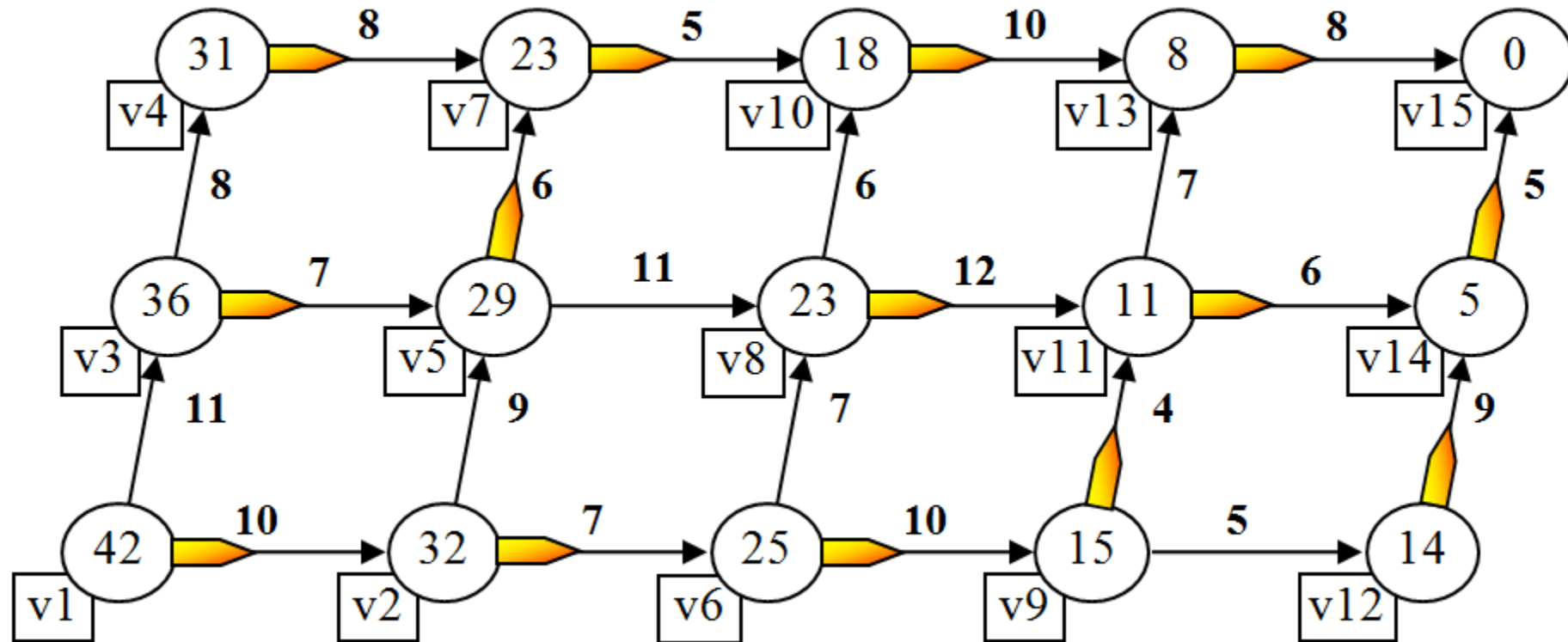
Решение. Показано е на следващата фиг. 6.4. Съгласно принципа за оптималност на Белман, започваме от крайния връх v15. Поставяме в кръгчето цена 0. В това състояние можем да попаднем само от върховете v13 или v14. Ако сме във връх v13, единственият преход до v15 има цена

8, аналогично цената на прехода от v_{14} до v_{15} е 5. Избраните преходи отбелязваме със стилизирана стрелка . Следващият етап е попълване на решенията за състоянията v_{10} , v_{11} и v_{12} . От v_{10} има единствен преход до v_{13} с цена $10 + 8 = 18$. От състояние v_{11} има две възможности – през v_{13} , който струва $7 + 8 = 15$ и през v_{14} , който струва $6 + 5 = 11$. Тъй като търсим максимална печалба, избираме прехода към v_{13} . От състояние v_{12} избираме единствения преход към v_{14} с обща цена 14. От връх v_9 имаме два възможни прехода, които са с еднаква цена, затова и двата са приемливи. Във връх v_8 избираме преход към v_{11} , който е с цена $27 > 24$ и т.н. Продължаваме процедурата назад до достигане на състояние v_1 с цена 57, което е и търсената максимална цена. Оптималната стратегия, която дава тази максимална печалба е по стилизираните стрелки: $\langle v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{13}, v_{15} \rangle$. Проверка за печалбата: $10 + 9 + 11 + 12 + 7 + 8 = 57$.



Фиг. 6.4. Решение на пример 6.6 в случай на максимум. Стилизираните стрелки показват възможните преходи. Работи се етап по етап назад от връх v15.

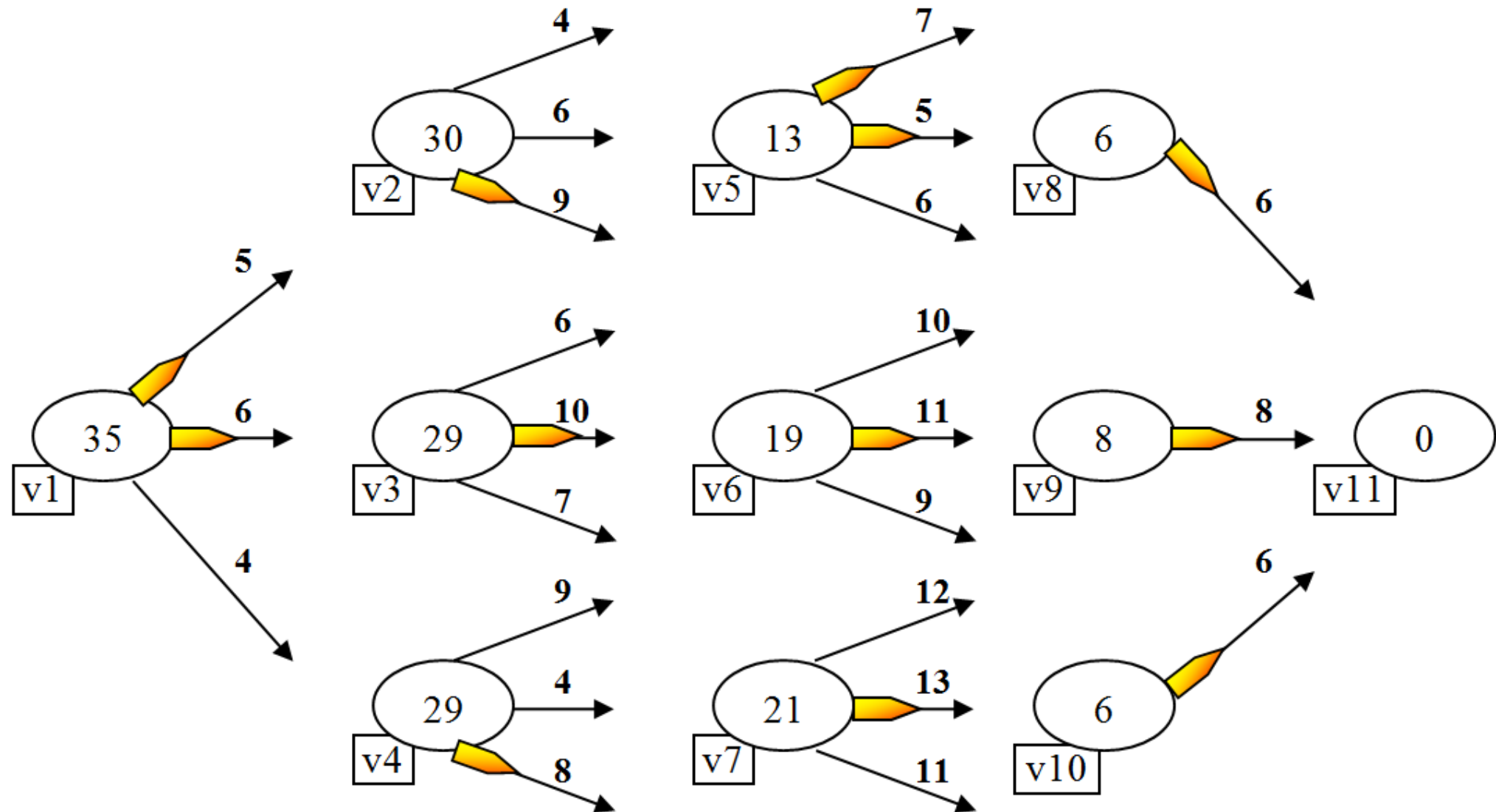
На следващата фиг. 6.5 е решението, даващо минимална цена:



Фиг. 6.5. Решение на пример 6.6 в случай на минимум.

Отговор. Минимум = 42, при стратегия: $\langle v1, v2, v6, v9, v11, v14, v15 \rangle$.

Пример 6.7. С принципа на Белман да се намери максималната печалба за процеса от фиг. 6.6, допускащ на всеки етап по три решения.



Преходи 4	Преходи 3	Преходи 2	Преходи 1
$(v1, v2): 5+30=\underline{35}$	$(v2, v5): 4+13=17$ $(v2, v6): 6+19=25$ $(v2, v7): 9+21=\underline{30}$	$(v5, v8): 7+6=\underline{13}$ $(v5, v9): 5+8=\underline{13}$ $(v5, v10): 6+6=12$	$(v8, v11): 6+0=\underline{6}$
$(v1, v3): 6+29=\underline{35}$	$(v3, v5): 6+13=19$ $(v3, v6): 10+19=\underline{29}$ $(v3, v7): 7+21=28$	$(v6, v8): 10+6=16$ $(v6, v9): 11+8=\underline{19}$ $(v6, v10): 9+6=15$	$(v9, v11): 8+0=\underline{8}$
$(v1, v4): 4+29=33$	$(v4, v6): 9+13=22$ $(v4, v6): 4+19=23$ $(v4, v7): 8+21=\underline{29}$	$(v7, v8): 12+6=18$ $(v7, v9): 13+8=\underline{21}$ $(v7, v10): 11+6=17$	$(v10, v11): 6+0=\underline{6}$

Фиг. 6.6. Решение на пример 6.7 с принципа на Белман.

Решение. Започваме решаването от последния връх v_{11} , където поставяме цена 0. Тук можем да попаднем от върховете v_8 , v_9 или v_{10} и то по единствен начин, с цени на преходите съответно 6, 8, 6. Ако се намираме в състояние v_5 можем да минем през v_8 , v_9 или v_{11} . Намираме съответно максималната цена от трите прехода, т.е. $\max \{7+6, 5+8, 6+6\} = 13$. Тя се постига през два възможни върха - v_8 и v_9 , където нанасяме стилизирани стрелки . Аналогично ако сме във връх v_6 максималното от трите решения е $\max \{10+6, 11+8, 9+6\} = 19$. Така продължаваме назад до връх v_1 . Максималната печалба е 35, която се постига за две оптимални стратегии, от връх v_1 по посока на стилизираните стрелки до края. Те са: $\langle 1, 2, 7, 9, 11 \rangle$ и $\langle 1, 3, 6, 9, 11 \rangle$.

Всички междинни пресмятания са нанесени в таблицата на фиг. 6.6. За упражнение намерете оптималната стратегия за минимална печалба.

Забележки към прилагането на принципа на Белман

Пример 6.6 демонстрира приложението на принципа на Белман за случая на задачи с n етапа, като на всеки етап се взимат не повече от две решения. Това изисква изпълнението на $R = O(2^n)$ аритметични операции. В следващия пример 6.7 на всеки етап се взимаха по 3 решения, т.е. за n етапа ще са необходими $O(3^n)$ изчисления.

В случай на процеси с n етапа и взимане на m решения на всеки етап ще се изисква изпълнението на $R = O(m^n)$ аритметични операции. Въпреки простотата на метода, количеството аритметични действия може да стане прекалено голямо, дори невъзможно за изпълнение.

Например при $m=5$, $n=20$ получаваме общо $R = O(5^{20}) = 95367431640625$ аритметични действия. Ако компютър извършва изчисленията със скорост 1000000 аритметични операции в секунда, са необходими приблизително 95367431 секунди, т.е. около 3 години денонощна работа! Затова за решаване на задачи с по-големи параметри се търсят по-ефективни методи, съобразени с типа на задачата.

6.4. Задача за разпределение на едномерен ресурс. Функционални уравнения на Белман

В много реални ситуации се налага разпределяне на n еднакви обекта в m сектора, при което се цели постигането на някакъв оптимален ефект. Когато се счита, че е без значение кой обект в кой сектор ще попадне, говорим за разпределение на едномерен ресурс.

Например разпределянето на 1000 еднакви заявки към 20 еднакви сървъра, търсене в хеш таблици или извършване на разпределени изчисления в мрежа с цел минимално време на обработка (задачи от областта на информатиката) или разпределяне на 8 еднакви машини в три цеха, разпределянето на еднакви стоки по няколко склада и други задачи от икономиката с цел максимална печалба или минимална загуба и т.н. Тези задачи намират директно приложение и в информационна система за планиране на ресурсите на предприятието (ЕРП).

Проблемът за разпределяне на ресурсите може да се реши с помощта на изкуственото му представяне на етапи, така че да може да се разглежда като динамична система. Въз основа на идеята на принципа на Белман, тръгвайки отзад напред, даденият клас задачи се решава с намиране на оптималната стратегия за всеки етап. Това се постига с построяването на т.н. функционални уравнения на Белман.

Пример 6.8. Намиране на разпределение.

За оборудването на 4 свои офиса една фирма е закупила 8 еднакви компютри. Според направено маркетингово проучване е установено приблизително какви печалби ще има фирмата от инсталирането на произволен брой компютри във всеки от офисите. Тези данни са записани в следната таблица. Намерете едно разпределение на компютрите и изчислете съответната обща печалба.

	Компютри Офиси	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
		Печалби									
x_1	Офис 1	$g_1(x_1)$	0	30	50	64	57	52	50	48	42
x_2	Офис 2	$g_2(x_2)$	0	50	77	85	88	75	66	51	63
x_3	Офис 3	$g_3(x_3)$	0	50	60	65	72	80	56	50	40
x_4	Офис 4	$g_4(x_4)$	0	30	44	45	50	55	45	40	55

Решение. Означаваме с (x_1, x_2, x_3, x_4) броя компютри за отделните офиси. Очевидно за пълно разпределение е необходимо $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$. Нека изберем за офис 1 брой компютри $x_1 = 3$, което носи печалба 64. Тогава за останалите офиси остават да се разпределят общо $8 - 3 = 5$ компютри. За офис 2 да изберем $x_2 = 2$ компютъра, които дават печалба 77. Остават още 3 компютъра свободни. Да ги разпределим $x_3 = 1$ и $x_4 = 2$, със съответни печалби 50 и 44. Така

избраното разпределение е $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 2, 1, 2)$, а общата печалба е $64+77+50+44=135$.

Забележка. В този пример не сме си поставили за цел да намерим най-печелившото разпределение, но с разглеждане на всички възможни варианти бихме могли да го намерим. Когато обаче задачата е с по-голяма размерност, очевидно пълното изчерпване е доста неефективен метод.

Обща постановка на задачата за разпределение на едномерен ресурс

Дадени са едномерен ресурс от m единици и n сектора. Цените (печалби, загуби, време или друга мярка) на даден брой единици за всеки сектор са известни. Задачата е да се намери разпределение на ресурса по сектори с максимална (или минимална) обща цена.

Данните е удобно да се нанесат в таблица от следния тип:

	Единици ресурс Сектор	X	0	1	2	...	m
		Печалби					
x_1	Сектор 1	$g_1(x_1)$	$g_1(0)$	$g_1(1)$	$g_1(2)$	...	$g_1(m)$
x_2	Сектор 2	$g_2(x_2)$	$g_2(0)$	$g_2(1)$	$g_2(2)$	...	$g_2(m)$
...	...	...					
x_n	Сектор 4	$g_n(x_n)$	$g_n(0)$	$g_n(1)$	$g_n(2)$	...	$g_n(m)$

Означения:

x_i - единици ресурс за i - ти сектор, $i=1,2,3,\dots, n$;

X - брой разпределяни ресурси, т.е. дискретна променлива със стойности $0,1,2,\dots, m$

$g_i(x_i)$ - печалби от i - ти сектор за x_i единици ресурс.

Тогава задачата за разпределение на едномерен ресурс се записва по следния начин:

Да се намери максимум или минимум на:

$$L = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n) \rightarrow \max(\min) . \quad (6.1)$$

при ограниченията:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = X, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (6.2)$$

За да решим тази задача, ще я сведем изкуствено до вземане на решения на етапи, като за всеки етап се търси оптимално разпределение:

- На 1-ви етап – оптимално разпределение за 1-вия сектор;
- На 2-ри етап – оптимално разпределение за 2-рия сектор, спрямо първия и т.н.;
- На n -ти етап – получаване на оптималното решение с оптимална печалба.

Тогава можем да приложим принципа на Белман. За целта въвеждаме означенията:

$f_n(X)$ - печалба от n -ти етап,

$f_{n-1}(X)$ - печалба от $(n-1)$ - ви етап,

...

$f_1(X)$ - печалба от 1-ви етап.

Прилагаме принципа на Белман “отзад напред”, като тръгваме от оптималното решение на последния етап към предходните оптимални решения. Разглеждаме случая за намиране на максимум:

$$\begin{aligned}
 f_n(X) &= \max_{0 \leq x_n \leq X} \{g_n(x_n) + f_{n-1}(X - x_n)\}, \quad X = 0, 1, 2, \dots, m; \\
 f_{n-1}(X) &= \max_{0 \leq x_{n-1} \leq X} \{g_{n-1}(x_{n-1}) + f_{n-2}(X - x_{n-1})\}, \quad X = 0, 1, 2, \dots, m; \\
 &\dots \\
 f_2(X) &= \max_{0 \leq x_2 \leq X} \{g_2(x_2) + f_1(X - x_2)\}, \quad X = 0, 1, 2, \dots, m; \\
 f_1(X) &= \max_{0 \leq x_1 \leq X} \{g_1(x_1)\}, \quad X = 0, 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Определение. Точката x_i , в която се достига $\max f_i(X)$ се нарича точка на междинен максимум, която ще означаваме с x_i^* .

Получените формули (6.3) се наричат **функционални уравнения на Белман**. Те описват каква стратегия да избираме на всеки етап, така че да получим търсеното решение на задача (6.1)-(6.2).

Пример 6.9. Фирма е закупила 5 еднакви машини, които трябва да разпредели в 3 цеха. Намерете разпределението на машините по цехове, която дава максимална обща печалба като използвате следната таблица за печалбите за всеки цех според броя машини:

	Машини Цех	X	0	1	2	3	4	5
		Печалби						
x_1	I	$g_1(x_1)$	0	5	8	5	4	7
x_2	II	$g_2(x_2)$	0	10	11	9	10	9
x_3	III	$g_3(x_3)$	0	4	6	8	10	12

Решение. Тук $n=3$, $m=5$. По формули (6.3) отзад напред започваме с намиране на $f_1(X) = \max_{0 \leq x_1 \leq X} \{g_1(x_1)\}$.

За всички стойности на $X = 0, 1, 2, \dots, 5$ като използваме данните за цех I изчисляваме съответно:

$$X = 0. \quad f_1(0) = \max_{0 \leq x_1 \leq 0} \{g_1(x_1)\} = 0 \text{ при } x_1^* = 0;$$

$$X = 1. \quad f_1(1) = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} \{g_1(0), g_1(1-0)\} = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} \{g_1(0), g_1(1)\} = \max\{0, 5\} = 5,$$

при $x_1^* = 1$; Разсъждението е: „На първия цех можем да дадем или 0 или $(X-0)=1-0$ машини с печалба $\max_{0 \leq x_1 \leq 1} \{g_1(0), g_1(1-0)\} = \dots$ “.

$$X = 2. \quad f_1(2) = \max_{0 \leq x_1 \leq 2} \{g_1(0), g_1(2-1), g_1(2-0)\} = \max_{0 \leq x_1 \leq 2} \{g_1(0), g_1(1), g_1(2)\}$$

$$= \max\{0, 5, 8\} = 8, \quad x_1^* = 2;$$

$$X = 3. \quad f_1(3) = \max_{0 \leq x_1 \leq 3} \{g_1(0), g_1(1), g_1(2), g_1(3)\} = \max\{0, 5, \underline{8}, 5\} = 8, \quad x_1^* = 2;$$

$$X = 4. \quad f_1(4) = \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \{g_1(0), g_1(1), g_1(2), g_1(3), g_1(4)\} = \max\{0, 5, \underline{8}, 5, 4\} = 8,$$

$$x_1^* = 2;$$

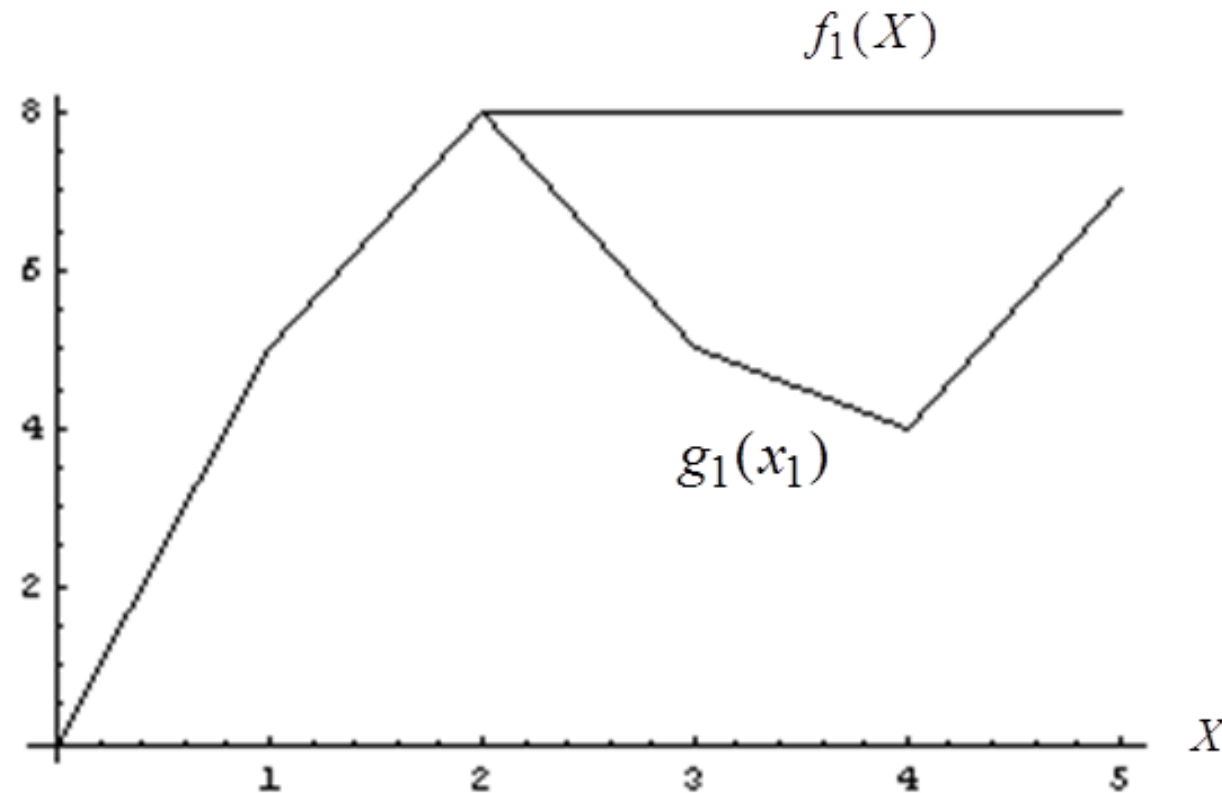
$$X = 5. \quad f_1(5) = \max_{0 \leq x_1 \leq 5} \{g_1(0), g_1(1), g_1(2), g_1(3), g_1(4), g_1(5)\} = \max\{0, 5, \underline{8}, 5, 4, 5\} = 8,$$

$$x_1^* = 2;$$

Подчертаното число е тава, което дава max. Получените стойности нанасяме в таблица:

X	0	1	2	3	4	5
$f_1(X)$	0	5	8	8	8	8
x_i^*	0	1	2	2	2	2

Графично функциите $f_1(X)$ и $g_1(x_1)$ могат да се изобразят както е показано на фиг. 6.7.



Фиг. 6.7. Графики на функциите $f_1(X)$ и $g_1(x_1)$.

По-нататък продължаваме с изчисляването на оптималното решение за втори етап, т.е.

$$f_2(X) = \max_{0 \leq x_2 \leq 1} \{g_2(X), f_1(X - x_2)\} \text{ за всички стойности на } X = 0, 1, 2, \dots, 5$$

като използваме данните за цех II. Намираме:

$$X = 0. \quad f_2(0) = \max_{0 \leq x_2 \leq 0} \{g_2(0) + f_1(0 - 0)\} = \max \{0, 0\} = 0, \text{ при } x_2^* = 0;$$

$$X = 1. \quad f_2(1) = \max_{0 \leq x_2 \leq 1} \{g_2(0) + f_1(1), g_2(1) + f_1(0)\} = \max \{0 + 5, \underline{10} + 0\} = 10,$$

при $x_2^* = 1$;

$$X = 2. \quad f_2(2) = \max_{0 \leq x_2 \leq 2} \{g_2(0) + f_1(2), g_2(1) + f_1(1), g_2(2) + f_1(0)\}$$

$$= \max \{0 + 8, \underline{10} + 5, 11 + 0\} = 15, \quad x_2^* = 1;$$

$$X = 3. \quad f_2(3) = \max_{0 \leq x_2 \leq 3} \{g_2(0) + f_1(3), g_2(1) + f_1(2), g_2(2) + f_1(1), g_2(3) + f_1(0)\}$$

$$= \max \{0 + 8, \underline{10} + 8, 11 + 5, 9 + 0\} = 18, \quad x_2^* = 1;$$

$$X = 4. \quad f_2(4) = \max_{0 \leq x_2 \leq 4} \{g_2(0) + f_1(4), g_2(1) + f_1(3), g_2(2) + f_1(2), g_2(3) + f_1(1),$$

$$g_2(4) + f_1(0)\} = \max\{0 + 8, 10 + 8, \underline{11 + 8}, 2 + 5, 10 + 0\} = 19, \quad x_2^* = 2;$$

$$X = 5. \quad f_2(5) = \max_{0 \leq x_2 \leq 5} \{g_2(0) + f_1(5), g_2(1) + f_1(4), g_2(2) + f_1(3), g_2(3) + f_1(2),$$

$$g_2(4) + f_1(1), g_2(5) + f_1(0)\}$$

$$= \max\{0 + 8, 10 + 8, \underline{11 + 8}, 9 + 8, 10 + 5, 9 + 0\} = 19, \quad x_2^* = 2;$$

Аналогично пресмятаме и последната функция $f_3(X)$ като използваме $f_2(X)$ и данните за $g_3(x_3)$. Имаме:

$$X = 0. \quad f_3(0) = \max_{0 \leq x_3 \leq 0} \{g_3(0) + f_2(0)\} = \max\{0, 0\} = 0 \text{ при } x_3^* = 0;$$

$$X = 1. \quad f_3(1) = \max_{0 \leq x_3 \leq 1} \{g_3(0) + f_2(1), g_3(1) + f_2(0)\} = \max \{0 + 10, 4 + 0\} = 10$$

при $x_3^* = 0$;

$$X = 2. \quad f_3(2) = \max_{0 \leq x_3 \leq 2} \{g_3(0) + f_2(2), g_3(1) + f_2(1), g_3(2) + f_2(0)\}$$

$$= \max \{\underline{0 + 15}, 4 + 10, 6 + 0\} = 15, \quad x_3^* = 0;$$

$$X = 3. \quad f_3(3) = \max \{0 + 18, \underline{4 + 15}, 6 + 10, 8 + 0\} = 19, \quad x_3^* = 1;$$

$$X = 4. \quad f_3(4) = \max \{0 + 19, \underline{4 + 18}, 6 + 15, 8 + 10, 10 + 0\} = 22, \quad x_3^* = 1;$$

$$X = 5. \quad f_3(5) = \max \{0 + 19, 4 + 19, \underline{6 + 18}, 8 + 15, 10 + 10, 12 + 0\} = 24, \quad x_3^* = 2;$$

Получаваме следната обща таблица на разпределенията и печалбите:

X	0	1	2	3	4	5
$f_1(X)$	0	5	8	8	8	8
x_1^*	0	1	2	2	2	2
$f_2(X)$	0	10	15	18	19	19
x_2^*	0	1	1	1	2	2
$f_3(X)$	0	10	15	19	22	24
x_3^*	0	0	0	1	1	2

Определяне на оптималното разпределение

От горната таблица се вижда, че максималната печалба е 24, ако цех III получи 2 машини. Остават 3 машини. Максималната печалба при $x=3$ на $f_2(X)$ е 18 при 1 машина за цех II. Остават 2 машини с цена 8. Следователно максимална печалба дава разпределението (2,1,2).

6.5. Графи, определения и представяния

Понятието граф бе въведено по-напред в тази глава. По-надолу ще разглеждаме предимно ориентирани графи.

Нека е зададен ориентиран граф с наредената двойка (V, E) , където V е множеството от върховете, а E е множеството от дъгите на графа.

Дъгите ще означаваме със стрелки, водещи от един връх до друг. Дъгата (P, Q) от връх P към връх Q се нарича изходяща за P и входяща за Q .

Определение. **Начален връх** се нарича връх без входящи дъги, а връх без изходящи дъги се нарича краен връх на графа.

Определение. Връх без входящи и или изходящи дъги се нарича **изолиран**.

Определение. **Път в граф** се нарича наредено множество от дъги, за които изходящият връх на всяка дъга е входящ за следващата.

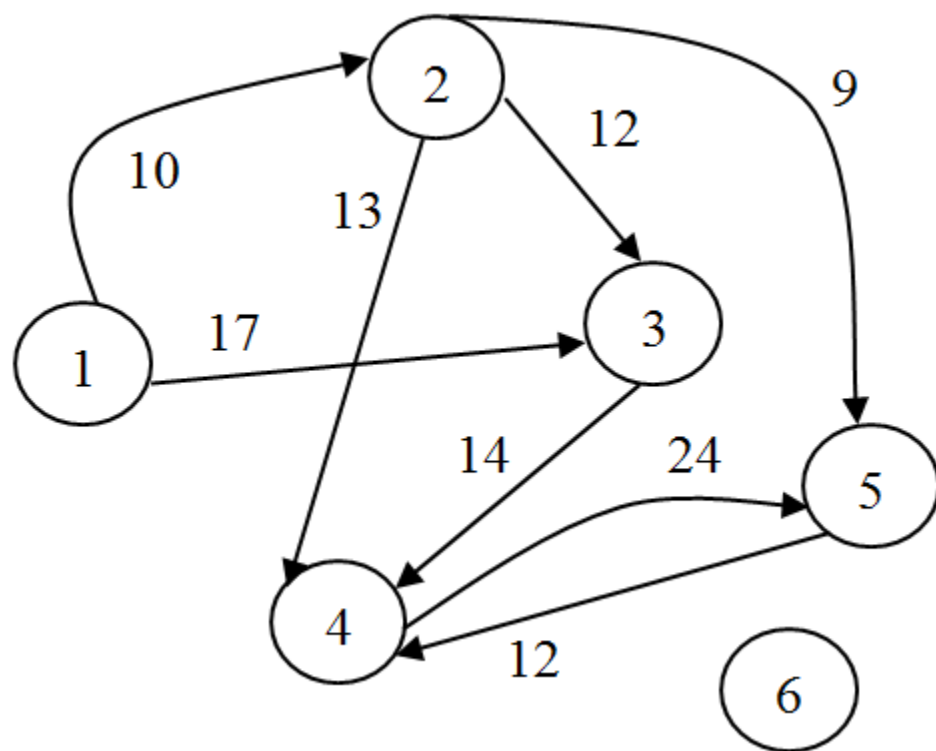
Определение. **Контур (цикъл) на граф** се нарича път, за който начален и краен връх съвпадат.

Определение. **Мрежа** се нарича ориентиран граф без контури, който има само един начален и само един краен връх.

Ако на всяка дъга от графа е съпоставено реално число в интервала $(-\infty, \infty)$, ще казваме, че са зададени **дължини** или **тегла** на графа. Дължината трябва да се разглежда в общ смисъл. В конкретен смисъл тя може да е време, печалба, разход, доход, физическа дължина и др.

Пример 6.10. Ориентиран граф с дължини (тегла) на дъгите. Представянето на графите става по най-различен начин. Ще демонстрираме това за графа от фиг. 6.8:

а) Представяне чрез списък на инцидентност (на записи). Използва се за ориентиран или неориентиран граф. Примери за този тип описание са дадени на фиг. 6.9 и фиг. 6.10. Стрелките са указатели към съседите на съответния връх, с които го свързват дъги. Зачертаната клетка е знак за край на съответния списък: nil.



Път: 1, 2, 3, 4

Път: 3, 4, 5, 4

Път: 1, 2, 4, 5, 4

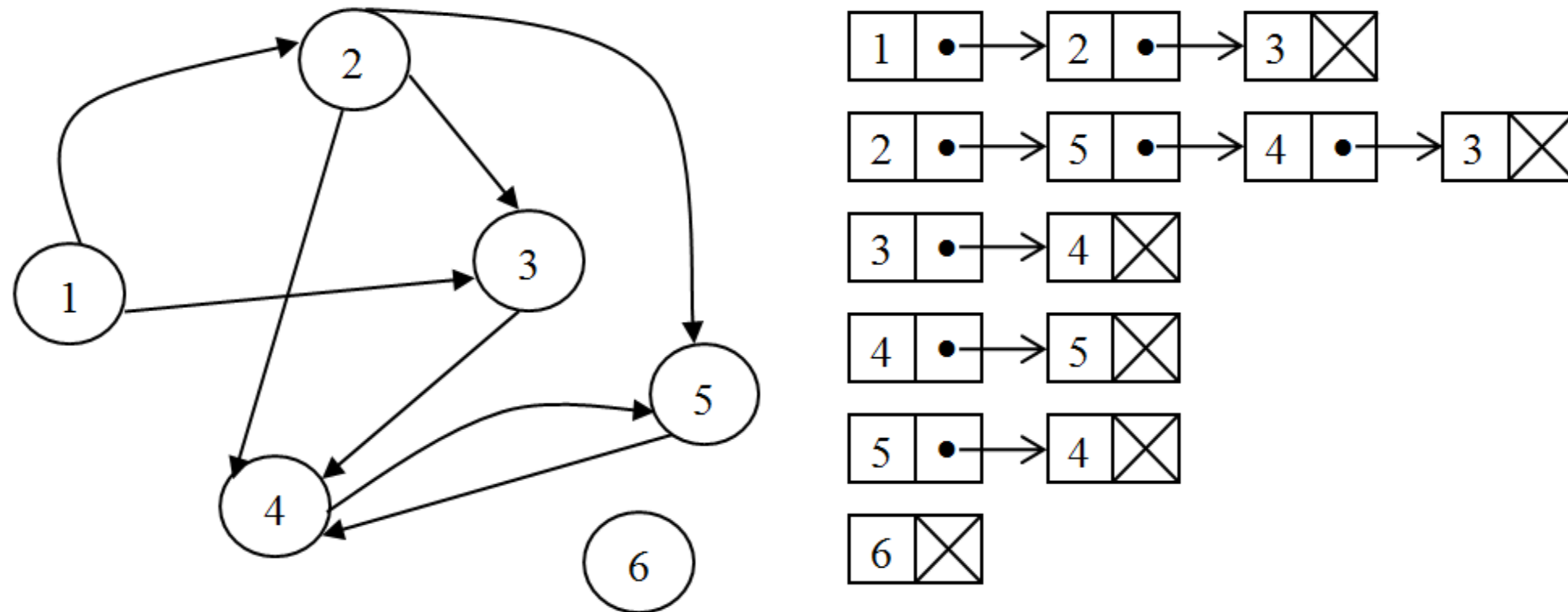
Контур: 4, 5, 4

Мрежа: Няма

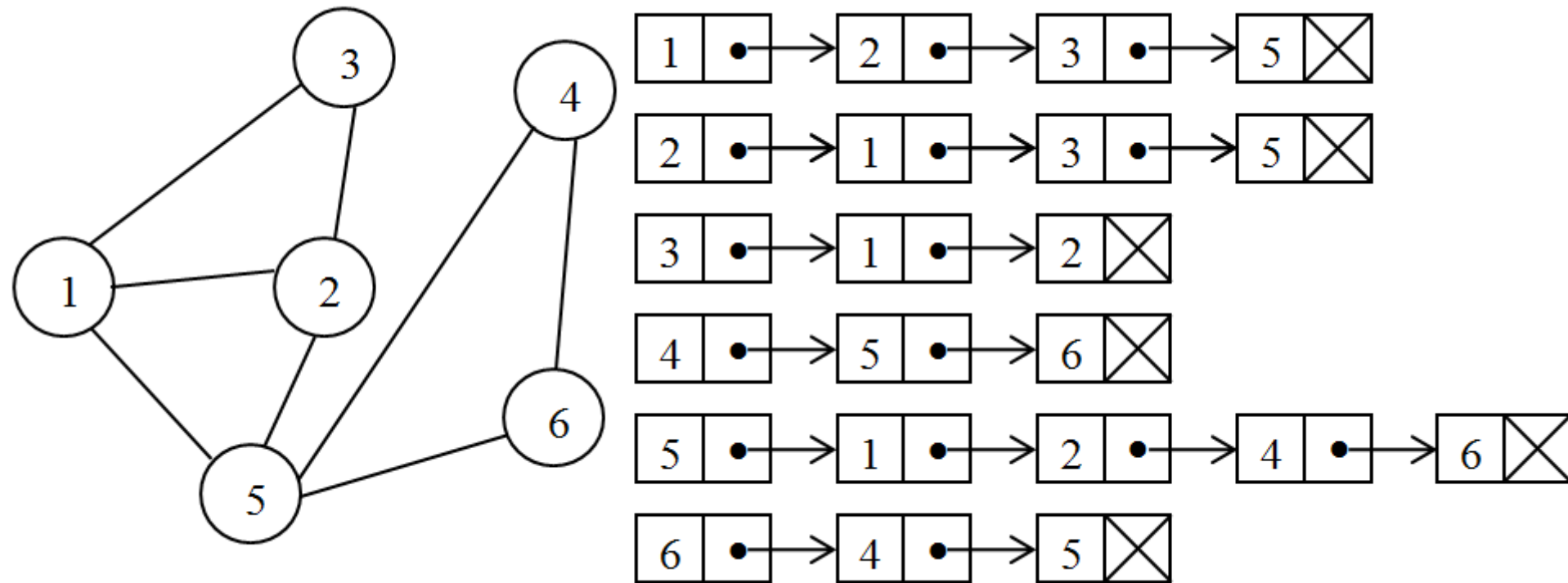
Подмрежа: 1, 2, 3, 4 при
премахване на останалите
върхове

Изолиран връх: 6

Фиг. 6.8. Ориентиран теглови граф.



Фиг. 6.9. Ориентиран граф и записите със списъци на инцидентност на върховете му.



Фиг. 6.10. Неориентиран граф и записите със списъци на инцидентност на върховете му.

б) Представяне на граф чрез матрица на инцидентност.
Съставя се матрица A с елементи:

$A_{ij} = \begin{cases} \infty \\ t_{ij} \end{cases}$	- ако връх i не е пряко свързан с връх j
	- число, указващо дължината на дъгата между връх i и връх j

За примера от фиг. 6.8 матрицата на инцидентност е:

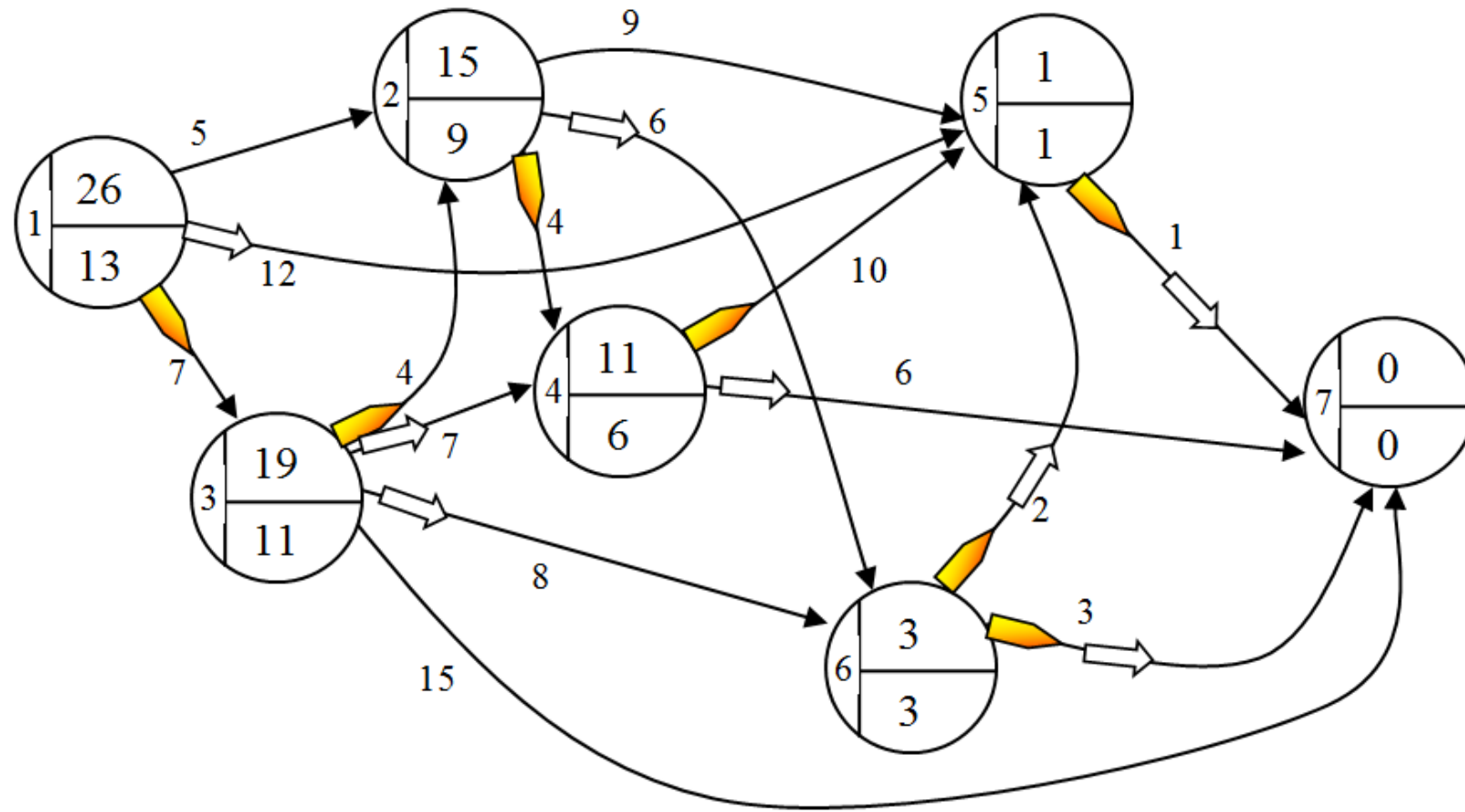
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 12 & 13 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 14 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 24 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

в) Представяне на граф чрез матрица на разстоянията. Съставя се матрица R с елементи както на матрицата на инцидентност A , освен разстоянията по главния диагонал, където винаги разстоянието е нула:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 10 & 17 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 12 & 13 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 14 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 24 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Пример 6.11. За мрежовия граф на Фиг. 6.11 да се приложи принципа на Белман за намиране на минималното и максималното разстояние от връх 1 до връх 7.

Решението за минимум е в долната, а за максимум – в горната половина на кръгчето за всеки връх.



Фиг. 6.11. Намиране на минимален и максимален път от връх 1 до връх 7 чрез принципа на Белман.

6.6. Алгоритъм на Форд-Белман

Ще разгледаме някои класически алгоритми за намиране на минимален път в графи.

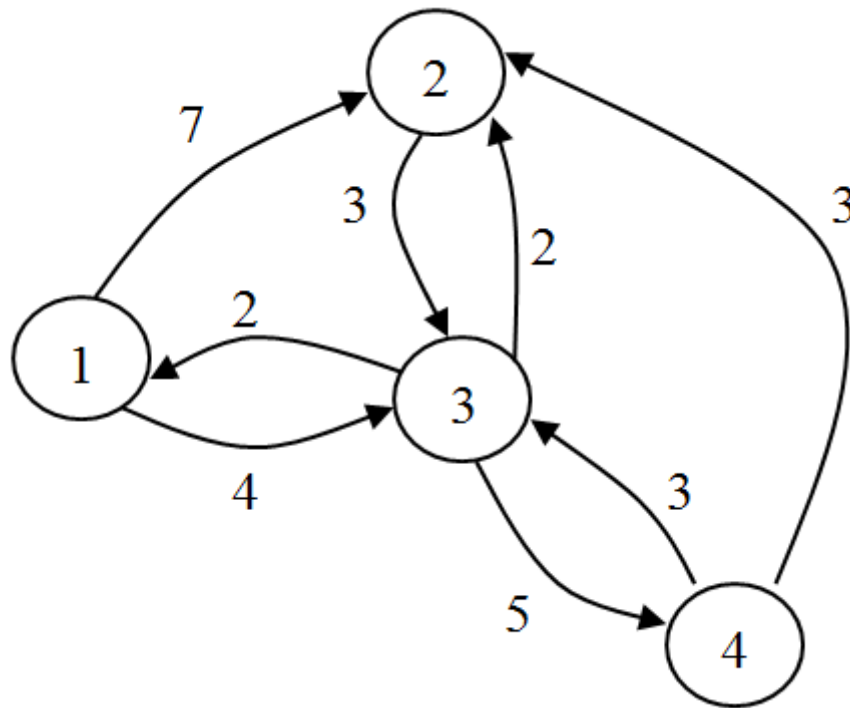
Основна задача

Даден е ориентиран граф, който не съдържа контури с отрицателна дължина (равна на сумата от теглата на дъгите им). Търсят се минималните пътища от даден връх до всички останали върхове на графа.

Тази задача е естествено обобщение на задачата за мрежово планиране. Тук се търсят минималните разстояния не само в мрежа, но в произволен път, започващ от даден връх на графа. Един от най-известните алгоритми за решаване на тази задача от динамичното оптимиране е този на Форд-Белман. Той използва за изходна информация матрицата на разстоянията R , въведена в предишния параграф.

Най-напред ще разгледаме един прост пример, който ще демонстрира идеята на алгоритъма на Форд-Белман.

Пример 6.12. На фиг. 6.12 е изобразен ориентиран теглови граф с 4 върха, съдържащ 3 контура. Да се намерят най-късите разстояния от връх 1 до всички останали върхове.



$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ 2 & 2 & 0 & 5 \\ \infty & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Фиг. 6.12. Граф с 3 контура и съответната му матрица на разстоянията.

Решение. Означаваме с D_i търсеното минимално разстояние от връх 1 до i -ти връх. Решението протича на етапи, като на всеки етап се включва нов връх и се преизчислява новата стойност на D_i . Продължава се докато получените стойности не могат повече да се намалят. С k означаваме номера на етапа. В началния етап $k = 1$ всички D_i са равни на директното разстояние от връх 1 до съответния връх.

Имаме:

$$k=1. D_i = R_{1i}, \text{ т.е. } D_1 = 0, D_2 = 7, D_3 = 4, D_4 = \infty.$$

$$k=2. D_1 = 0,$$

$D_2 = \min$ от D_2 и сумите на останалите D_i с разстоянията от i -ти връх до втори връх (втори стълб на матрицата). Имаме:

$$D_2 = \min \{7, 0+7, \underline{4+2}, \infty+3\} = 6, \text{ (минимумът е подчертан).}$$

Аналогично за минимум от D_3 и сумите на останалите D_i с трети стълб на R :

$$D_3 = \min \{4, \underline{0+4}, 7+3, \infty+3\} = 4.$$

$$D_4 = \min \{ \infty, 0 + \infty, 7 + \infty, \underline{4 + 5} \} = 9.$$

$$k = 3. D_1 = 0,$$

$$D_2 = \min \{ 6, 0 + 7, \underline{4 + 2}, 9 + 3 \} = 6.$$

$$D_3 = \min \{ 4, \underline{0 + 4}, 6 + 3, 9 + 3 \} = 4.$$

$$D_4 = \min \{ 9, 0 + \infty, 6 + \infty, \underline{4 + 5} \} = 9.$$

Достигнахме до етап, в който резултатите са същите, както в предишния и не се подобряват. Следователно сме получили търсените минимални разстояния. Пресмятанията се записани в следната таблица:

k	D_1	D_2	D_3	D_4
1	0	7	4	∞
2	0	6	4	9
3	0	6	4	9

Последният ред съдържа минималните пътища от 1 до всеки връх.

Общ случай на алгоритъма на Форд-Белман за граф с n върха

Считаме за удобство, че върхът, за който се търсят минималните разстояния е с номер 1.

$$k=1. D_i = R_{1i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

$$k=2. D_1=0,$$

$$D_2 = \min \{D_2, D_1+R_{12}, D_3+R_{32}, \dots, D_n+R_{n2}\}, \quad (6.4)$$

$$D_3 = \min \{D_3, D_1+R_{13}, D_2+R_{23}, \dots, D_n+R_{n3}\},$$

...

$$D_n = \min \{D_n, D_1+R_{1n}, D_2+R_{2n}, \dots, D_{n-1}+R_{n-1,n}\}.$$

$$k=3, 4, \dots, n-2.$$

Тази процедура се повтаря, докато получим два еднакви реда разстояния в таблицата или докато се стигне до $n-2$ в най-лошия случай.

Описание на алгоритъма на Форд-Белман с метазик

Нека е даден ориентиран теглови граф (V, E) с n върха V и дъги E , който не съдържа контур с отрицателна дължина. Целта е да се намерят минималните разстояния от връх с номер p до всички останали върхове на графа. Матрицата на разстоянията R е зададена, а търсените разстояния се запомнят в масив D . Броят на етапите очевидно не надминава $n-2$. Входно-изходните операции са пропуснати.

begin

for $v \in V$ do $D[v] := R[p, v]$; $D[p] := 0$;

for $k := 1$ to $n-2$ do

begin for $v \in V \setminus \{p\}$ do

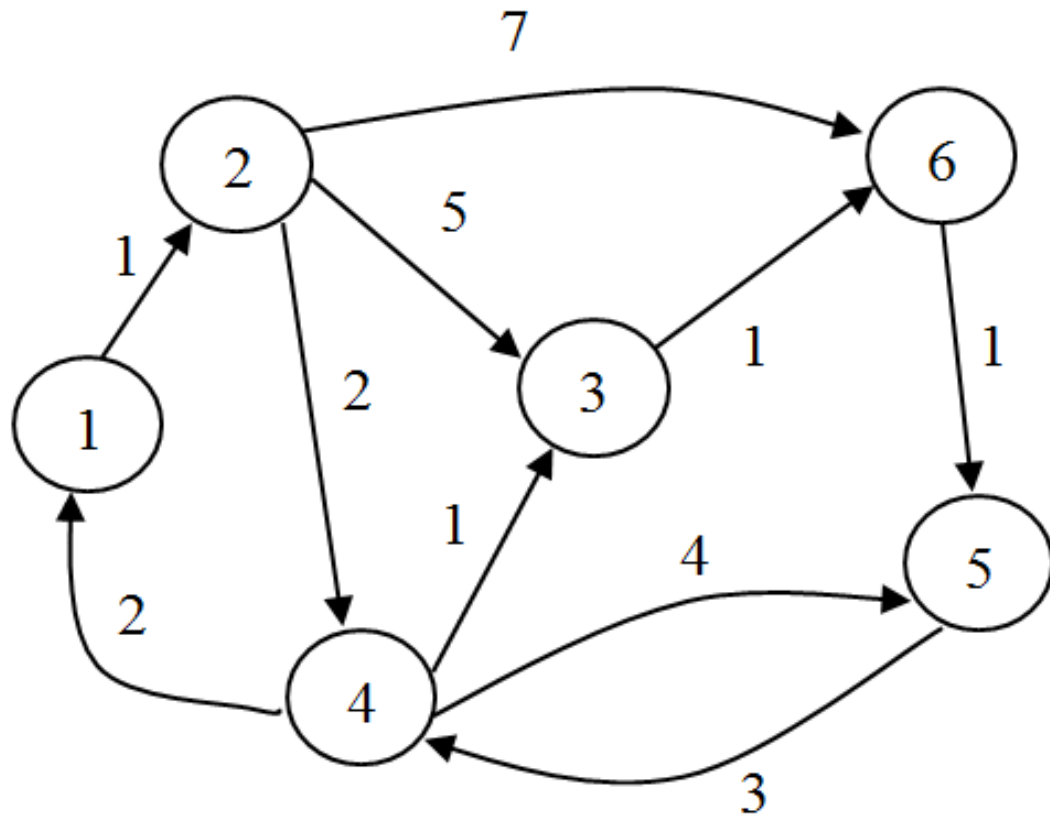
for $u \in V$ do $D[v] := \min (D[v], D[u] + R[u, v])$

end

end

Броят на необходимите аритметични операции е $O(n^3)$.

Пример 6.13. Да се приложи методът на Форд-Белман за намиране на минималните разстояния от връх 1 до всички останали върхове на графа, изобразен на фиг. 6.13.



$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 5 & 2 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Фиг. 6.13. Ориентиран граф с шест контура.

Решение. Използваме формули (6.4) и нанасяме резултатите в таблица. Във формулите случаят на междинен минимум е подчертан.

$$k=1. \quad D_1=0, D_2=R_{12}=1, D_3=D_4=D_5=D_6=\infty.$$

$$k=2. \quad D_1=0,$$

$$D_2 = \min \{D_2, D_1+R_{12}, D_3+R_{32}, D_4+R_{42}, D_5+R_{52}, D_6+R_{62}\} = \\ \min \{1, \underline{0+1}, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty, \infty+\infty\} = 1,$$

$$D_3 = \min \{D_3, D_1+R_{13}, D_2+R_{23}, D_4+R_{43}, D_5+R_{53}, D_6+R_{63}\} = \\ \min \{\infty, 0+\infty, \underline{1+5}, \infty+1, \infty+\infty, \infty+\infty\} = 6,$$

$$D_4 = \min \{D_4, D_1+R_{14}, D_2+R_{24}, D_3+R_{34}, D_5+R_{54}, D_6+R_{64}\} = \\ \min \{\infty, 0+\infty, \underline{1+2}, 6+\infty, \infty+3, \infty+\infty\} = 3,$$

$$D_5 = \min \{D_5, D_1+R_{15}, D_2+R_{25}, D_3+R_{35}, D_4+R_{45}, D_6+R_{65}\} = \\ \min \{\infty, 0+\infty, 1+\infty, 6+\infty, \underline{3+4}, \infty+1\} = 7,$$

$$D_6 = \min \{D_6, D_1+R_{16}, D_2+R_{26}, D_3+R_{36}, D_4+R_{46}, D_5+R_{56}\} = \\ \min \{\infty, 0+\infty, 1+7, \underline{6+1}, 3+\infty, 7+\infty\} = 7.$$

$$k=3. \quad D_1 = 0,$$

$$D_2 = \min \{1, \underline{0+1}, 6+\infty, 3+\infty, 7+\infty, 7+\infty\} = 1,$$

$$D_3 = \min \{6, 0+\infty, 1+5, \underline{3+1}, 7+\infty, 7+\infty\} = 4,$$

$$D_4 = \min \{3, 0+\infty, \underline{1+2}, 4+\infty, 7+3, 7+\infty\} = 3,$$

$$D_5 = \min \{7, 0+\infty, 1+\infty, 4+\infty, \underline{3+4}, 7+1\} = 7,$$

$$D_6 = \min \{7, 0+\infty, 1+7, \underline{4+1}, 3+\infty, 7+\infty\} = 5.$$

$$k=4. \quad D_1 = 0,$$

$$D_2 = \min \{1, \underline{0+1}, 6+\infty, 3+\infty, 7+\infty, 7+\infty\} = 1,$$

$$D_3 = \min \{6, 0+\infty, 1+5, \underline{3+1}, 7+\infty, 7+\infty\} = 4,$$

$$D_4 = \min \{3, 0+\infty, \underline{1+2}, 4+\infty, 7+3, 7+\infty\} = 3,$$

$$D_5 = \min \{7, 0+\infty, 1+\infty, 4+\infty, \underline{3+4}, 7+1\} = 7,$$

$$D_6 = \min \{7, 0+\infty, 1+7, \underline{4+1}, 3+\infty, 7+\infty\} = 5.$$

$$k=5. \quad D_1 = 0,$$

$$D_2 = \min \{1, \underline{0+1}, 6+\infty, 3+\infty, 7+\infty, 5+\infty\} = 1,$$

$$D_3 = \min \{6, 0+\infty, 1+5, \underline{3+1}, 7+\infty, 5+\infty\} = 4,$$

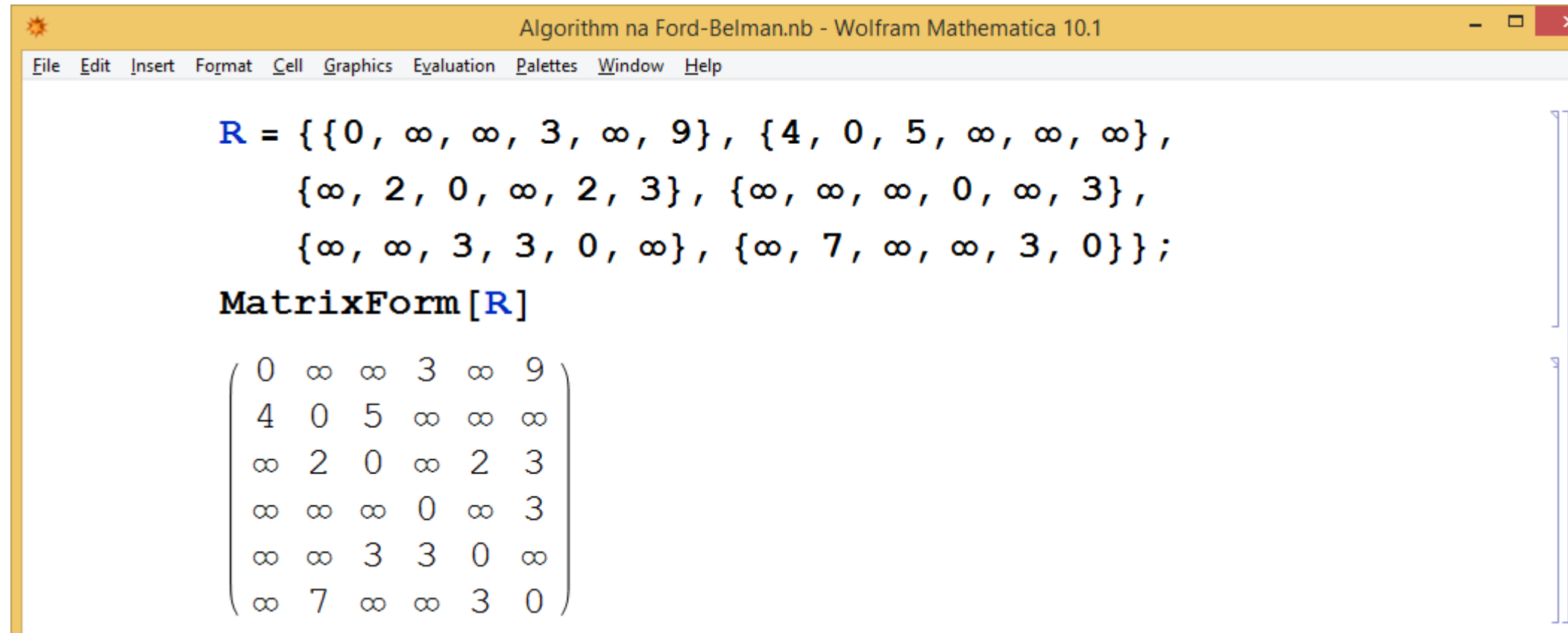
$$D_4 = \min \{3, 0+\infty, \underline{1+2}, 4+\infty, 7+3, 5+\infty\} = 3,$$

$$D_5 = \min \{7, 0+\infty, 1+\infty, 4+\infty, 3+4, \underline{5+1}\} = 6,$$

$$D_6 = \min \{7, 0+\infty, 1+7, \underline{4+1}, 3+\infty, 5+\infty\} = 5.$$

k	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	0	1	6	3	7	7
3	0	1	4	3	7	5
4	0	1	4	3	6	5
5	0	1	4	3	6	5

Пример 6.14. Втори пример за алгоритъма на Форд-Белман при зададена матрица на разстоянията, решен с Wolfram Mathematica.



```

Algorithm na Ford-Belman.nb - Wolfram Mathematica 10.1
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

R = {{0, ∞, ∞, 3, ∞, 9}, {4, 0, 5, ∞, ∞, ∞},
      {∞, 2, 0, ∞, 2, 3}, {∞, ∞, ∞, 0, ∞, 3},
      {∞, ∞, 3, 3, 0, ∞}, {∞, 7, ∞, ∞, 3, 0}};
MatrixForm[R]


$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 3 & \infty & 9 \\ 4 & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & 2 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 3 & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$


```

```

k = 1; d = R[[1]]; Print[ "k=", k, " d= ", d]
For[k = 2, k ≤ 5, k++,
  {d1 = {∞, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞}; For[j = 1, j ≤ 6, j++,
    {m = ∞;
      For[i = 1, i ≤ 6, i++,
        If[m > d[[i]] + R[[i,j]], m = d[[i]] + R[[i,j]]];
        d1[[j]] = m] }
  ]; d = d1; Print[ "k=", k, " d= ", d]
}]

```

```
k=1 d= {0, ∞, ∞, 3, ∞, 9}
```

```
k=2 d= {0, 16, ∞, 3, 12, 6}
```

```
k=3 d= {0, 13, 15, 3, 9, 6}
```

```
k=4 d= {0, 13, 12, 3, 9, 6}
```

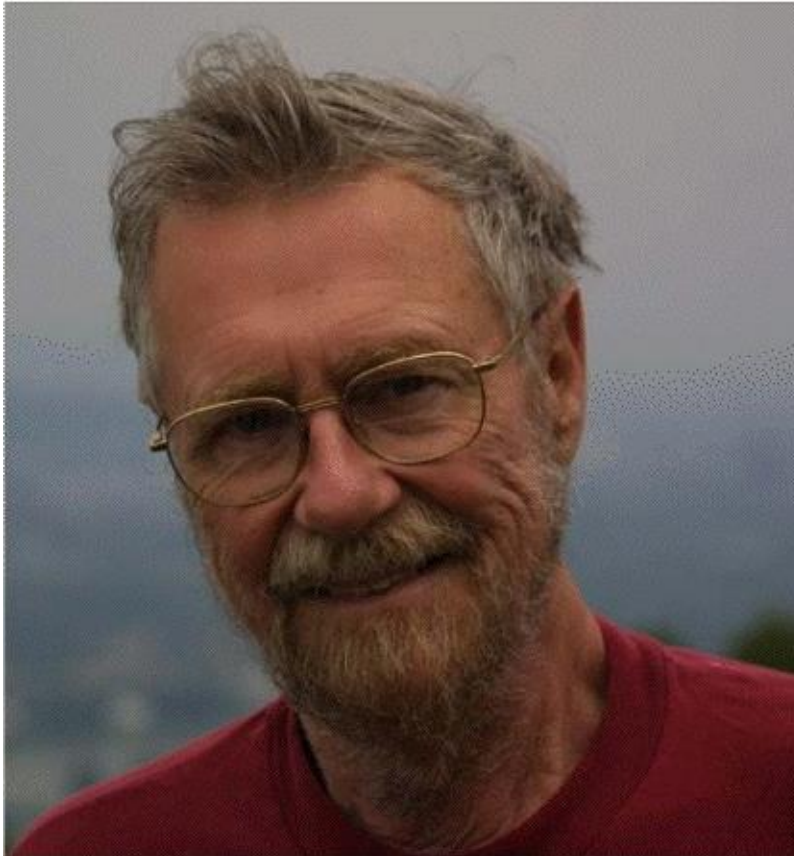
```
k=5 d= {0, 13, 12, 3, 9, 6}
```

6.7. Алгоритъм на Дийкстра

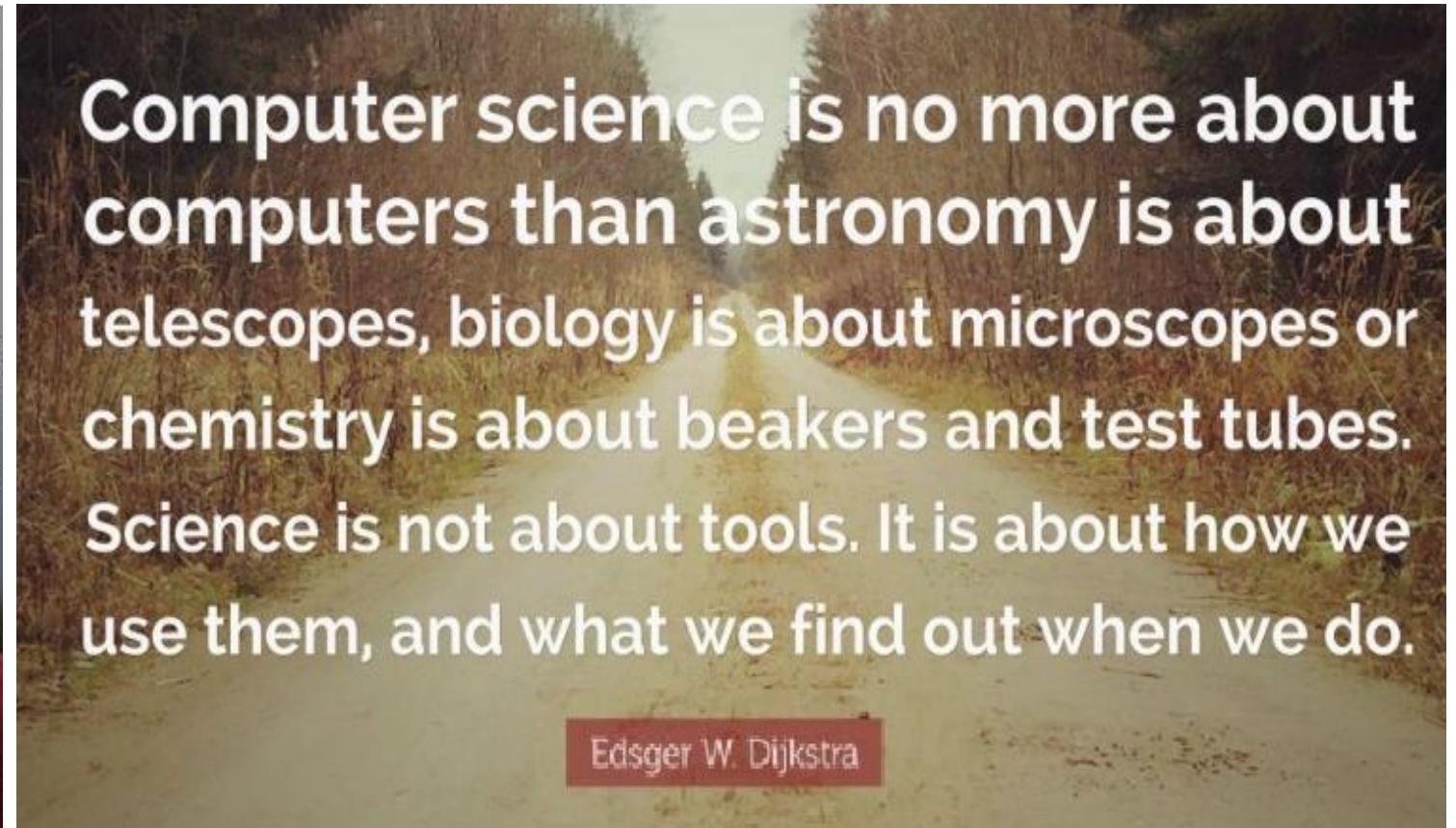
Основна задача

Даден е ориентиран граф, в който всички дължини на дъгите са неотрицателни, т.е. $R_{ij} \geq 0$. Не се допуска изолиран връх без поне една свързваща го с друг връх дъга. Търсят се минималните пътища от даден връх до всички останали върхове на графа.

Тази задача е частен случай от основната задача, решена в предишния параграф с алгоритъма на Форд-Белман. Тук ще представим един по-ефективен алгоритъм, изискващ само $O(n^2)$ аритметични операции, известен като алгоритъм на Дийкстра. В случая на не-много „плътен“ граф, сложността на този алгоритъм се оценява на $O(n \cdot \text{Log}(n))$.



Edsger Dijkstra
(1930-2002)



Формули за алгоритъма на Дийкстра за граф с n върха

Нека за удобство да считаме, че изходният връх е с номер 1. Стандартно означаваме съвкупността от върховете на графа с V . Въвеждаме още едно множество T , което в началото е равно на множеството от върховете $\{2, 3, \dots, n\}$, т.е. $T = V \setminus \{1\}$. Пресмятаме на етапи и нанасяме резултатите в таблица, както при метода на Форд-Белман. На всеки етап (ред от таблицата) се избира главен елемент от оставащите върхове T , равен на $\min$ от D_i , като означаваме с i номера на върха, в който се достига минимумът. На следващия етап този възел се изключва от T , тъй като за тази точка разстоянието е достигнало своя възможен минимум.

Продължаваме процедурата до изключване на всички върхове, т.е. докато $T = \emptyset$.

$k = 1. D_i = R_{1i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

$k = 2.$ Избира се главен елемент $D_u = \min \{D_i, i \in T\}, T = T \setminus \{u\}$. За всички точки от T пресмятаме:

$$D_2 = \min \{D_2, D_u + R_{u,2}\},$$

$$D_3 = \min \{D_3, D_u + R_{u,3}\},$$

...

$$D_n = \min \{D_n, D_u + R_{u,n}\}.$$

$k = 3, 4, \dots, n-1.$

(6.5)

Пример 6.15. Да се реши задачата от пример 6.13 (фиг. 6.13) с алгоритъма на Дийкстра.

Решение. Матрицата на разстоянията е:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 5 & 2 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$k=1$, $D_1=0$, $D_2=R_{12}=1$, $D_3=D_4=D_5=D_6=\infty$. $T=\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$k=2$. Избира се главен елемент $D_u = \min \{D_i, i \in T\} = 1$, т.е. $u=2$, $D_u=1$; $T=\{3, 4, 5, 6\}$. В таблицата главният елемент е заграден с кръгче.

$$D_3 = \min \{D_3, D_2 + R_{2,3}\} = \min \{\infty, \underline{1+5}\} = 6,$$

$$D_4 = \min \{D_4, D_2 + R_{2,4}\} = \min \{\infty, \underline{1+2}\} = 3,$$

$$D_5 = \min \{D_5, D_2 + R_{2,5}\} = \min \{\infty, \underline{1+\infty}\} = \infty,$$

$$D_6 = \min \{D_6, D_2 + R_{2,6}\} = \min \{\infty, \underline{1+7}\} = 8.$$

$k=3$. Избира се главен елемент $D_u = \min \{D_i, i \in T\} = 3$, т.е. $u=4$, $D_u = 3$; $T = \{3, 5, 6\}$.

$$D_3 = \min \{D_3, D_4 + R_{4,3}\} = \min \{6, \underline{3+1}\} = 4,$$

$$D_5 = \min \{D_5, D_4 + R_{4,5}\} = \min \{\infty, \underline{3+4}\} = 7,$$

$$D_6 = \min \{D_6, D_4 + R_{4,6}\} = \min \{\underline{8}, 3+\infty\} = 8.$$

$k=4$. Избира се главен елемент $D_u = \min \{D_i, i \in T\} = 4$, т.е. $u=3$, $D_u = 4$; $T = \{5, 6\}$.

$$D_5 = \min \{D_5, D_3 + R_{3,5}\} = \min \{\underline{7}, 4+\infty\} = 7,$$

$$D_6 = \min \{D_6, D_3 + R_{3,6}\} = \min \{8, \underline{4+1}\} = 5.$$

$k=5$. Избира се главен елемент $D_u = \min \{D_i, i \in T\} = 5$, т.е. $u=6$, $D_u = 5$; $T = \{6\}$.

$$D_5 = \min \{D_5, D_6 + R_{6,5}\} = \min \{7, \underline{5+1}\} = 6.$$

Заградените в кръгчета стойности са търсените минимални разстояния от връх 1 до останалите.

k	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	T
1	0	1	∞	∞	∞	∞	{2,3,4,5,6}
2			6	3	∞	8	{3,4,5,6}
3			4		7	8	{3,5,6}
4					7	5	{5,6}
5					6		{5}

Описание на алгоритъма на Дийкстра с метазик

Даден е ориентиран свързан теглови граф (V, E) с n върха V и дъги E , който не съдържа отрицателни тегла. Търсят се минималните разстояния от връх с номер p до всички останали върхове на графа.

Матрицата на разстоянията R е зададена, а текущите минимални разстояния се запомнят в масив D . С $D[u]$ е отбелязан главният елемент, u е номерът на съответния му връх. Множеството на неоптимизирани до даден етап върхове е T . Входно-изходните операции са пропуснати.

begin

for $v \in V$ do $D[v] := R[p, v]$; $D[p] := 0$;

$T = V \setminus \{p\}$;

While $T \neq \emptyset$ do

begin $u :=$ произволен връх $w \in T$, за който $D[w] = \min\{D[q], q \in T\}$;

$T := T \setminus \{u\}$;

```

        for  $v \in T$  do  $D[v] := \min (D[v], D[u] + R[u,v] )$ 
    end
end

```

6.8. Алгоритъм на Флойд-Уоршел

Разгледаните алгоритми на Форд-Белман и Дийкстра решават задачата за най-кратък път от даден връх на графа до всички останали.

Обобщение на тази задача е следната:

Основна задача

Даден е ориентиран граф без цикли с отрицателна дължина. Търсят се най-кратките пътища между всеки два върха.

Очевидно тази задача може да се решава с описаните алгоритми, използвани за всеки един връх. Тогава сложността на алгоритъма на Форд-Белман става $O(n^4)$, а този на Дийкстра - $O(n^3)$. За решаване на

задачата ще приведем и един друг класически алгоритъм, известен като алгоритъм на Флойд-Уоршел и предложен за първи път от Бърнард Рой.

Описание на алгоритъма на Флойд-Уоршел с метазик

begin

 for $i:=1$ to n do

 for $j=1$ to n do $D[i,j]:=R[i,j]$;

 for $i:=1$ to n do $D[i,i]:=0$;

 for $m:=1$ to n do

 for $i:=1$ to n do

 for $j=1$ to n do

$D[i,j]:=\min (D[i,j], D[i,m]+ D[m,j])$;

end

Очевидно трите цикъла изискват $O(n^3)$ аритметични операции. Този алгоритъм се препоръчва за много големи и плътни графи.

ГЛАВА 7. КОМБИНАТОРИКА. ЕЛЕМЕНТИ ОТ ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

7.1. Комбинаторика

Множества. Операции с множества

Под **множество** се разбира съвкупност от обекти, обединени по някакъв общ признак. Обектите, от които се състои множеството, се наричат негови елементи. Казваме, че едно множество е определено, ако еднозначно могат да се посочат неговите елементи.

Символният запис $a \in A$ означава, че елементът a принадлежи на, или е от, множеството A . Записът $a \notin A$ означава, че елементът a не принадлежи на множеството A .

Множеството A се нарича **крайно**, ако се състои от краен брой елементи, т.е. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Мощност на множеството A

означаваме с $|A|$. В случая, когато A е крайно множество с n елемента, записваме $|A| = n$. Без ограничение на общността всяко крайно множество с n елемента може да отъждествим с множеството $N = \{1, 2, \dots, n\}$ от първите n естествени числа.

Безкрайните множества се делят на два големи класа – безкрайни изброими множества (равномощни на множеството на естествените числа N) и безкрайни неизброими множества.

Множество A , състоящо се от елементи x , притежаващи свойство $P(x)$, записваме по следния начин: $A = \{x | x : P(x)\}$. Всеки елемент на множеството A се записва само веднъж. Например $\{2, 2, 4, 6\}$ е некоректно зададено множество.

Освен това редът на елементите в записа на множеството е без значение – записите $\{2, 4, 6, 8\}$ и $\{8, 6, 2, 4\}$ са на едно и също множество.

Множеството $\mathfrak{U}$, съдържащо всички разглеждани множества се нарича **универсално множество**. Обикновено то се определя от типа на разглежданите обекти. Например, ако разглежданите обекти са реални числа, то $\mathfrak{U}$ е множеството на всички реални числа R , ако разглеждаме геометрични обекти в равнината, то $\mathfrak{U}$ е множеството от всички точки в декартовата координатна система.

Множеството $\emptyset$, което не съдържа нито един елемент, се нарича **празно множество**.

Празното и универсалното множество често се наричат тривиални множества. Интерес представляват нетривиалните множества, които означаваме с големите латински букви A , B , C и т.н.

Множеството A се нарича **подмножество** на множеството B , ако всеки елемент на A е елемент и на B . Пишем $A \subseteq B$, четем: „ A се включва или се съдържа в B “.

Всяко множество A има две тривиални подмножества – самото множество A , и празното множество $\emptyset$. Всички останали подмножества на множеството A се наричат **собствени**, или **истински, подмножества** на A .

Множествата A и B са равни ако се състоят от едни и същи елементи, т.е. $A = B$ тогава и само тогава, когато $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Често това определение се използва за доказване на равенства между множества.

Подобно на бинарните операции върху числа в аритметиката, теорията на множествата използва бинарни операции върху множества – сечение, обединение, разлика и декартово произведение на множества. Единствената унарна операция с е допълнение, или отрицание, на множество.

Сечение на множествата A и B се нарича ново множество, състоящо се от всички елементи, които принадлежат едновременно на двете множества, т.е. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Обединение на множествата A и B се нарича ново множество, което съдържа всички елементи както на A , така и на множеството B , т.е. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Разлика на множествата A и B се нарича ново множество, което съдържа всички елементи на A , които не са елементи на множеството B , т.е. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Декартово произведение на множествата A и B се нарича множеството $A \times B$, състоящо се от всички наредени двойки (a, b) , на които първият елемент е от A , а вторият от B , т.е. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Допълнение на множеството A се нарича разликата $\bar{A} = \mathfrak{I} \setminus A$.

Нека A и B са крайни множества, съответно с n и m на брой елементи, т.е. $|A| = n$, $|B| = m$.

Мощността на обединението на две крайни множества A и B се пресмята по следната формула:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (7.1.)$$

Мощността на декартовото произведение на две крайни множества се пресмята по следната формула:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| \quad (7.2.)$$

Пример 7.1. Нека $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 8, 9\}$.

Имаме $|A| = 4$, $|B| = 6$.

Сечението на множествата A и B е $A \cap B = \{2, 6, 8\}$, т.е. $|A \cap B| = 3$.

Обединението $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, т.е. имаме $|A \cup B| = 7$.

Но $|A \cup B| \neq |A| + |B| = 4 + 6 = 10$. Защо?

Мощността на обединението на двете множества пресмятаме по формула (7.1): $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 6 - 3 = 7$.

Пример 7.2. Нека $A = \{1, 2\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Декартовото произведение на множествата A и B и, съответно, B и A са множествата

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\} \text{ и}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Очевидно $A \times B \neq B \times A$, но $|A \times B| = |B \times A| = 2 \cdot 3 = 6$.

Някои често използвани **свойства на операциите с множества са:**

(комутативност): $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(асоциативност): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(дистрибутивност): $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, (7.3.)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(закони на де Морган): $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Пермутации без повторение

Нека A е крайно множество, $|A| = n$. Всяко подреждане на всичките n елемента на A (или всички различни подреждания на първите n естествени числа) се нарича **пермутация без повторение** от n -ти ред. Две пермутации се различават една от друга по реда на участващи в тях елементи.

Теорема. Броят на всички различни пермутации от n -ти ред е

$$P_n = n! = 1.2 \dots n.$$

По определение $0! = 1$.

Пример 7.3. Всички пермутации на три елемента a, b, c са:

$$P_3 = |\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}| = 3! = 1.2.3 = 6.$$

Пример 7.4. Да се пресметне броят на различните петцифрени числа, които могат да се запишат с цифрите 0, 1, 2, 3 и 4, ако всички цифри участват.

Тъй като участват всички пет посочени цифри, то никоя от тях не се повтаря. Броят на всички различни подреждания на петте числа е $P_5 = 5! = 120$. Пермутациите, които започват с 0 (като например 04231) не са числа, затова трябва да ги извадим. Всички подреждания, които започват с нула са $P_4 = 4! = 24$. За броя на числата имаме $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96$ различни числа.

Може да получим търсения брой и така: за цифрата на десетохилядните имаме избор от четири цифри (без нулата), за цифрата на хилядните имаме избор отново от четири цифри (нула е възможен избор), за цифрата на стотиците – избор от три цифри, за десетиците – избор от две цифри и за единиците остава една цифра, т.е. получаваме $4.4.3.2.1 = 96$.

Определение. Всеки избор на k елемента от n се нарича **извадка на n елемента от k -ти клас**.

Различаваме четири вида извадки в зависимост от това дали:

- е от значение или не реда на елементите в k -орката – наредена и ненаредена извадка съответно;
- всеки елемент в извадката може да се среща най-много веднъж или може да се среща повече пъти – извадка без повторение и извадка с повторение съответно.

Комбинации без повторение

Всички различни **ненаредени извадки без повторение** на n елемента от k -ти клас се наричат **комбинации без повторение** на n елемента от k -ти клас. Две комбинации без повторение се различават една от друга по вида на участващите в тях елементи.

Теорема. Броят на всички различни комбинации без повторение на n елемента от k -ти клас е $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Биномните коефициенти имат редица интересни свойства. Някои от по-често използваните са:

$$C_n^0 = C_n^n = 1;$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n;$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ при } 0 \leq k \leq n.$$

Пример 7.5. Всички комбинации без повторение на четири елемента a, b, c, d от втори клас са: $\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$. Техният брой е шест. Пресмятаме: $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$.

Следващите три примера са стандартни комбинаторни задачи.

Пример 7.6. Дадени са n точки, никои три от които не лежат на една права. Броят на правите, които минават през тези точки е равен на броя на комбинациите на n елемента от втори клас, защото две точки определят една права без значение на техния ред. Пресмятаме $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. За $n = 5$, например, ще получим десет прави.

Пример 7.7. Броят на диагоналите в изпъкнал n -ъгълник е $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}$ (от броя на правите изваждаме броя на страните на многоъгълника).

Пример 7.8. Нека е дадено множество от N елемента, M от които са от тип α . Броят на различните ненаредени извадки на n елемента, в които точно k елемента са от тип α е: $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$.

Вариации без повторение

Всички различни **наредени извадки без повторение** на n елемента от k -ти клас наричаме **вариации без повторение** на n елемента от k -ти клас. Две вариации без повторение се различават една от друга или по реда на участващите в тях елементи или по вида елементите, които участват в тях.

Теорема. Броят на всички различни вариации без повторение на n елемента от k -ти клас е $V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Пример 7.9. Броят на различните трицифрени числа, съставени от различни цифри 1, 3, 5, 7, 9 е равен на броя на вариациите на пет елемента от трети клас. Този брой е $V_5^3 = 5.4.3 = 60$.

Пример 7.10. Събрание от тридесет души трябва да избере председател, заместник-председател и секретар, а след това трима члена на ревизионна комисия. По колко начина може да стане това?

Изборът на председател, заместник-председател и секретар е наредена извадка на 30 елемента от трети клас. Изборът на членове на ревизионната комисия е ненаредена извадка без повторение на 27 души от трети клас. Пресмятаме $V_{30}^3 \cdot C_{27}^3 = 71253000$ начина.

Вариации с повторение

Всички различни **наредени извадки с повторение** на n елемента от k -ти клас наричаме **вариации с повторение** на n елемента от k -ти клас.

Теорема. Броят на всички различни вариации с повторение на n елемента от k -ти клас е $\tilde{V}_n^k = n^k$.

Пример 7.11. Броят на осембитовите двоични думи е $\tilde{V}_2^8 = 2^8 = 256$, на десетбитовите думи е съответно $\tilde{V}_2^{10} = 2^{10} = 1024$.

7.2. Случайни събития. Класическа вероятност

Основни понятия

Основни понятия в теорията на вероятностите са понятията **опит**, **изход** и **събитие**.

Опит се нарича действие, което се извършва при определени условия. **Изход** е конкретния резултат, с който опитът завършва. При всяка реализация, опитът завършва само с един от възможните си изходи.

Множеството от всички възможни изходи на даден опит се нарича **пространство от елементарните изходи** на опита и се означава с Ω . Пространството Ω може да е крайно, безкрайно изброимо или безкрайно неизброимо множество.

Всеки изход на опита се нарича **елементарно събитие** и се означава с ω , т.е. Ω е пространство на елементарните събития.

Всяко подмножество на Ω се нарича **случайно събитие**, т.е. A е случайно събитие тогава и само тогава, когато $A \subseteq \Omega$.

Ако опитът завършва с краен брой възможни изходи $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Като математически обект случайното събитие е множество с елементи – определени елементарни изходи на опита, т.е. $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$.

Изходите на даден опит, които са елементи на събитието A се наричат **благоприятни изходи за събитието A** , а останалите изходи се наричат **неблагоприятни за A** .

Казваме че **събитието A настъпва**, когато единственият изход, с който опитът завършва е благоприятен за A . Най-често едно събитие се описва с общите свойства на неговите благоприятни изходи.

Множеството от всички елементарни изходи Ω е събитие (тъй като $\Omega \subseteq \Omega$), което се благоприятства от всички възможни изходи на опита и следователно настъпва при всяка реализация на опита. Това събитие се нарича **достоверно събитие**.

Множеството $\emptyset$ също е събитие (тъй като $\emptyset \subseteq \Omega$), което не се благоприятства от нито един изход на опита и не настъпва при която и да е негова реализация. Това събитие се нарича **невъзможно събитие**.

По-нататък под случайно събитие ще разбираме всяко истинско подмножество A на Ω , т.е. $A \subseteq \Omega$. Всяко елементарно събитие $\{\omega_i\}$ също е случайно събитие, което има един благоприятен изход.

Пример 7.12. Множеството от елементарни изходи при опита “хвърля се една монета веднъж върху гладка повърхност” е $\Omega = \{Л, Г\}$. Събитието $A = \{\text{пада се лице}\}$ има един благоприятен изход $A = \{Л\}$, и мощността е $|A| = 1$.

Пример 7.13. Множеството от елементарни изходи при опита “хвърлят се две различни монети веднъж върху гладка повърхност” е $\Omega = \{ЛЛ, ЛГ, ГЛ, ГГ\}$.

Събитието $A = \{\text{двете монети показват различни страни}\}$ има два благоприятни изхода $A = \{ЛГ, ГЛ\}$, $|A| = 2$. Случайното събитие A може да се зададе още по следните начини: $A = \{\text{пада се точно едно лице}\}$ или $A = \{\text{пада се точно един герб}\}$.

Събитието $B = \{\text{пада се най-много един герб}\}$ има три благоприятни изхода $B = \{ЛЛ, ЛГ, ГЛ\}$, $|B| = 3$.

Пример 7.14. Множеството от елементарни изходи при опита „хвърляме два различни зара веднъж“ е:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), (3,1), \dots, (6,6)\}$$

$$|\Omega| = \tilde{V}_6^2 = 6^2 = 36 \text{ изхода.}$$

Събитието $A = \{\text{поне единият зар показва една точка}\} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$ има 11 благоприятни изхода, $|A| = 11$.

Събитието $B = \{\text{сумата от точките на двата зара е 7}\} = \{(1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5,2), (6,1)\}$ има шест благоприятни изхода, $|B| = 6$.

Събитието $C = \{\text{сумата от точките на двата зара е повече от 10}\} = \{(5,6), (6, 5), (6, 6)\}$ има три благоприятни изхода, $|C| = 3$.

За всички разгледани дотук опити множеството от елементарни изходи е с краен брой изходи, т.е. Ω е крайно множество.

Означаваме го с $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, т.е. $|\Omega| = n$.

В следващия пример разглеждаме опит с безкрайно изброимо много елементарни изходи.

Пример 7.15. Две деца хвърлят зар дотогава, докато се паднат шест точки. Нека с $У$ („успех“) означим падането на шест точки на зара, а с $Н$ („неуспех“) – падането на 1, 2, 3, 4 или 5 точки.

При този опит Ω е безкрайно изброимо множество, т.е. $\Omega = \{У, НУ, ННУ, \dots\}$. Събитието $A = \{\text{първото дете печели играта}\}$ е също безкрайно изброимо множество и неговите благоприятни изходи са $A = \{У, ННУ, ННННУ, \dots\}$.

Пример 7.16. Разглеждаме множеството от елементарни изходи на опита „хвърлят се две еднакви монети веднъж върху гладка повърност“. Тъй като монетите са еднакви изходите „ЛГ“ и „ГЛ“ са неразличими и $\Omega = \{ЛЛ, ЛГ, ГГ\}$, т.е. $|\Omega| = 3$. При това изходът „двете монети показват различни страни“ е по-малко възможен от останалите изходи, т.е. елементарните изходи на опита не са равновъзможни.

Действия със събития

Основните действия със събития – сума на събития, произведение и разлика на събития са аналог на съответните операции с множества – обединение, сечение и разлика, тъй като случайните събития всъщност са множества.

Нека Ω е пространство на елементарните изходи на даден опит и $A, B \subseteq \Omega$ са случайни събития.

Обединение на събитията A и B ($A \cup B$) наричаме ново събитие, което настъпва, ако е настъпило поне едно от двете събития.

Благоприятни изходи за $A \cup B$ са всички благоприятни за A и всички благоприятни за B изходи. Обединението на събития обикновено се означава със знака „+“, $A + B$.

Сечение на събитията A и B ($A \cap B$) наричаме ново събитие, което настъпва, ако са настъпили едновременно и двете събития.

Благоприятни изходи за $A \cap B$ са всички благоприятни едновременно за A и B изходи. Две събития се наричат **несъвместими**, ако $A \cap B = \emptyset$. Сечението на събития обикновено се означава със знака „ $\cdot$ “, $A \cdot B$.

Разлика на събитията A и B ($A \setminus B$) наричаме ново събитие, което настъпва, когато настъпва събитието A и не настъпва събитието B .

Благоприятни изходи за $A \setminus B$ са всички благоприятни за A и неблагоприятни за B изходи.

Допълнение на събитието A наричаме събитието $\bar{A} = \Omega \setminus A$. Събитието $\bar{A}$ се нарича още противоположно на A или отрицание на A .

Противоположното събитие $\bar{A}$ настъпва тогава и само тогава, когато не настъпва събитието A .

Всички благоприятни изходи за A са неблагоприятни за $\bar{A}$ и обратно.

Теорема. Нека Ω е пространство на елементарните изходи на даден опит и $A, B, C \subseteq \Omega$ са случайни събития. За събитията A, B и C са валидни свойствата комутативност, асоциативност, дистрибутивност и законите на де Морган (виж 7.3).

Пример 7.17. Да разгледаме отново събитията от Пример 7.14.

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\};$$

$$B = \{(1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5,2), (6,1)\}; C = \{(5,6), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Получаваме:

$$A \cap B = \{(1,6), (6,1)\};$$

$$B \cap C = \emptyset;$$

$$B \setminus A = \{(2, 5), (3, 4), (4, 3), (5,2)\};$$

$$B \cup C = \{(1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5), (6,6)\}.$$

Класическа вероятност

Нека пространството от елементарните изходи на опит $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ се състои от краен брой **равновъзможни изходи**.

Нека случайното събитие $A \subset \Omega$ има m на брой благоприятни изхода, т.е. $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}$, или $|A| = m$.

Вероятността да настъпи събитието A се означава с $P(A)$ и се пресмята по **формула за класическата вероятност**:

$$P(A) = \frac{\text{брой благоприятни изходи за } A}{\text{общ брой изходи на } \Omega} = \frac{m}{n}. \quad (7.4)$$

За вероятността $P(A)$ на случайното събитие A са в сила следните свойства:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, при това $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$ и $P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$; (7.5)
2. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Забележка. Условието за това всички изходи на опита да са равновъзможни е съществено в определянето на класическата вероятност на едно събитие.

Пример. 7.18. От кутия, съдържаща 5 бели и 3 черни топки вадим една топка. Да намерим вероятността за това извадената топка да е бяла. Очевидно Ω се състои от всички изходи да извадим бяла топка и от всички изходи да извадим черна топка. Ако определим $\Omega = \{б, ч\}$, очевидно двата изхода не са равновероятни – изборът на бяла топка е по-възможен.

Затова определяме Ω по следния начин $\Omega = \{б_1, б_2, б_3, б_4, б_5, ч_1, ч_2, ч_3\}$, където всичките осем изхода са равновероятни. Тогава събитието $A = \{\text{извадената топка е бяла}\}$ ще се определи от следните благоприятни изходи $A = \{б_1, б_2, б_3, б_4, б_5\}$ и $P(A) = \frac{5}{8}$.

Пример 7.19. При хвърляне два различни зара да се намерят вероятностите на събитията $A = \{\text{поне единият зар показва една точка}\}$; $B = \{\text{сумата от точките на двата зара е седем}\}$; $C = \{\text{сумата от точките на двата зара е повече от десет}\}$; $D = \{\text{и двата зара показват четен брой точки}\}$.

От Пример 7.14. имаме $P(A) = \frac{11}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. За да определим $P(D)$ пресмятаме броя на благоприятните изходи за D . Всеки зар показва четен брой точки по три различни начина $\{2, 4, 6\}$. Двата зара ще показват едновременно четен брой точки по $|D| = 3 \cdot 3 = 9$ начина. Тогава $P(D) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Пример 7.20. От двадесет ученика случайно се избират шест за участие в анкета „Спорт, учене и здраве“. Известно е, че дванадесет от всички ученици са активни спортисти.

Каква е вероятността на следните събития:

а) $A = \{\text{всички избрани за анкетата да са активни спортисти}\};$

б) $B = \{\text{половината от избраните да са активни спортисти}\}.$

Определяме общия брой изходи на опита от 20 ученика да изберем шест. Имаме комбинации на 20 елемента от 6-ти клас, $|\Omega| = C_{20}^6 = 38\,760$.

а) Шест активно спортуващи избираме по $C_{12}^6 = 924$ начина.

$$\text{Пресмятаме } P(A) = \frac{C_{12}^6}{C_{20}^6} = \frac{924}{38\,760} = 0,024.$$

б) Аналогично на а) може да изберем трима активно спортуващи от общо 12 по $C_{12}^3 = 220$ различни начина и трима, които не спортуват по $C_8^3 = 56$ различни начина.

$$\text{Пресмятаме } P(B) = \frac{C_{12}^3 \cdot C_8^3}{C_{20}^6} = \frac{220 \cdot 56}{38\,760} = 0,318.$$

7.2. Условна вероятност. Вероятност на сума и произведение от събития

Нека B е събитие, за което $P(B) > 0$. Условната вероятност на събитието A , при условие че B е настъпило се означава с $P(A/B)$ и се пресмята по формулата

$$P(A/B) = \frac{P(A.B)}{P(B)}. \quad (7.6)$$

Ако A и B са събития с $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то вероятността за съвместното им настъпване се пресмята по правилото за умножение на вероятности

$$P(A.B) = P(B). P(A/B) = P(A). P(B/A). \quad (7.7)$$

Събитията A и B са **независими**, ако $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Вероятността на **сума на две събития** A и B се пресмята формулата:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (7.8)$$

Ако събитията A и B са независими, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример 7.21. От учениците в едно училище 30% не са участвали в състезанието „Аз и Европа“, а 25% от участниците в състезанието са получили награда. Каква е вероятността един случайно избран ученик да е награден?

Означаваме с $A = \{\text{избраният ученик е участвал в състезанието}\}$,
 $B = \{\text{избраният ученик е награден}\}$.

Търсим $P(A \cdot B)$. Имаме $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$. Освен това е дадено, че $P(B / A) = 0,25$.

Тогава $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) = 0,7 \cdot 0,25 = 0,175$.

Пример 7.22. В една кутия има 9 бели и 11 черни топки. Изваждат се една след друга две топки без връщане. Каква е вероятността на събитието $A = \{\text{двете извадени топки са бели}\}$?

Означаваме с $A_i = \{i\text{-тата топка е бяла}\}$, $i = 1, 2$. Имаме $P(A_1) = \frac{9}{20}$, а

$P(A_2 / A_1) = \frac{8}{19}$ (останали са 19 топки, от които осем са бели).

Пресмятаме $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} = 0,189$.

Пример 7.22. Вероятността акционер да получи високи дивиденди от една фирма е 0,65, а от друга – 0,75. Каква е вероятността акционерът да получи високи дивиденди поне от една от фирмите.

Означаваме $A_i = \{\text{получени високи дивиденди от } i\text{-тата фирма}\}$, $i = 1, 2$.

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0,75 + 0,65 - 0,65 \cdot 0,75 = 0,9125.$$

7.3. Формула за пълната вероятност. Формула на Бейс

Нека Ω е множеството от възможни изходи на даден опит.

Събитията $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуват пълна група от събития (ПГС), ако са изпълнени следните свойства:

1) $H_i \cdot H_j = \emptyset$ за всяко $i \neq j$, ($i, j = 1, \dots, n$), т.е. те са две по две несъвместими;

2) $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ (обединението им е Ω), т.е. имаме $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$.

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ са пълна група от събития и събитието A настъпва след настъпването на някое от събитията от пълната група.

Тогава вероятността на събитието A се пресмята по **формулата за пълната вероятност**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i). \quad (7.9)$$

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ са пълна група от събития. Ако събитието A е настъпило, то вероятността $P(H_i / A)$ за всяко $i = 1, \dots, n$ се пресмята по формула на Бейс:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A / H_i)}. \quad (7.10)$$

Пример 7.23. В една кутия има 8 бели и 2 черни топки, а в друга – 4 бели и 6 черни топки. От първата кутия е избрана една топка и е прехвърлена във втората. Ако от втората кутия избираме топка:

- а) Каква е вероятността топката да е бяла?
- б) Нека сме извадили бяла топка от втората кутия. Каква е вероятността прехвърлената топка от първата кутия да е била черна?

Означаваме с $H_1 = \{\text{прехвърлената топка от първата кутия е бяла}\}$, $H_2 = \{\text{прехвърлената топка е от първата кутия е черна}\}$. Очевидно събитията H_1 и H_2 образуват пълна група от събития. Нека $A = \{\text{извадената топка от втората кутия е бяла}\}$. Записваме вероятностите в таблица.

$P(H_i)$	Състав на 2 ^{-та} кутия след H_i	$P(A/ H_1)$
$P(H_1) = \frac{8}{10}$	5 бели, 6 черни	$P(A/ H_1) = \frac{5}{11}$
$P(H_2) = \frac{2}{10}$	4 бели, 7 черни	$P(A/ H_2) = \frac{4}{11}$

$$\text{а) } P(A) = P(H_1)P(A/ H_1) + P(H_2)P(A/ H_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{11} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{24}{55}.$$

б) Търсим $P(H_2 / A)$ по формулата на Бейс:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/ H_2)}{P(H_1)P(A/ H_1) + P(H_2)P(A/ H_2)} = \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{24}{55}} = \frac{1}{6}.$$

ГЛАВА 8. СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ. ЧИСЛОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ДИСКРЕТНИ И НЕПРЕКЪСНАТИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

8.1. Случайни величини. Основни понятия

Величина, която в зависимост от резултата на опита, приема по една числова стойност от определено множество на реалните числа, неизвестно коя преди опита, се нарича **случайна величина**.

Случайна величина, която приема краен брой или безброй изброимо много стойности се нарича **дискретна случайна величина**. Случайна величина, която приема безброй неизброимо много стойности, запълващи определен интервал от реалната права, се нарича **непрекъснатата случайна величина**.

Случайните величини ще означаваме с гръцки букви ξ , η , ζ и т.н.

Обикновено дискретните случайни величини се получават в резултат на броене. Например брой на определени единици – брой раждания, брой гласоподаватели, брой кредити и т.н.

Непрекъснатите случайни величини обикновено се получават в резултат на измервания – на ръст, на тегло, на добив и т.н.

За да е определена една случайна величина не е достатъчно да знаем какво е множеството от възможните ѝ стойности. Трябва да знаем също каква е вероятността случайната величина ξ да приема конкретна възможна стойност

Функцията $F_{\xi}(x)$, която за всяка стойност на $x \in (-\infty, +\infty)$ показва вероятността случайната величина ξ да приема стойности по-малки от x , се нарича **функция на разпределение** на случайната величина ξ , т.е. $F_{\xi}(x) = P(\xi < x)$.

По-важните свойства на функцията на разпределение $F_\xi(x)$ са:

1. $F_\xi(x)$ е определена за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$;
2. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$, за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$;
3. $F_\xi(x)$ е монотонно растяща, т.е. от $x_1 < x_2$ следва $F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$;
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$;
5. $P(\xi \geq x) = 1 - F_\xi(x)$.

Една случайна величина е напълно определена, ако е известна нейната функция на разпределение.

От определението и свойствата на функцията на разпределение $F_\xi(x)$ следва, че вероятността на събитието $P(a \leq \xi < b)$ се пресмята по следния начин:

$$P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a). \quad (7.11)$$

8.2. Дискретни случайни величини. Числови характеристики

Дискретната случайна величина (съкратено д. сл. в.) е напълно определена, ако са известни всички стойности, които тя може да приема и вероятностите, с които приема тези стойности.

Нека д.сл.в. ξ има краен брой стойности $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ със съответни вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$, т.е. $P(\xi = \xi_i) = p_i, i = 1, \dots, n$.

Стойностите ξ_i и свързаните с тях вероятности p_i се представят в табличен вид, чрез т.нар. **закон за разпределение на д.сл.в.:**

Табл. 8.1. Закон за разпределение на дискретна случайна величина

ξ_i	ξ_1	ξ_2	$\dots$	ξ_n
$p_i = P(\xi = \xi_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

За закона за разпределение на дискретната случайна величина са в сила следните свойства:

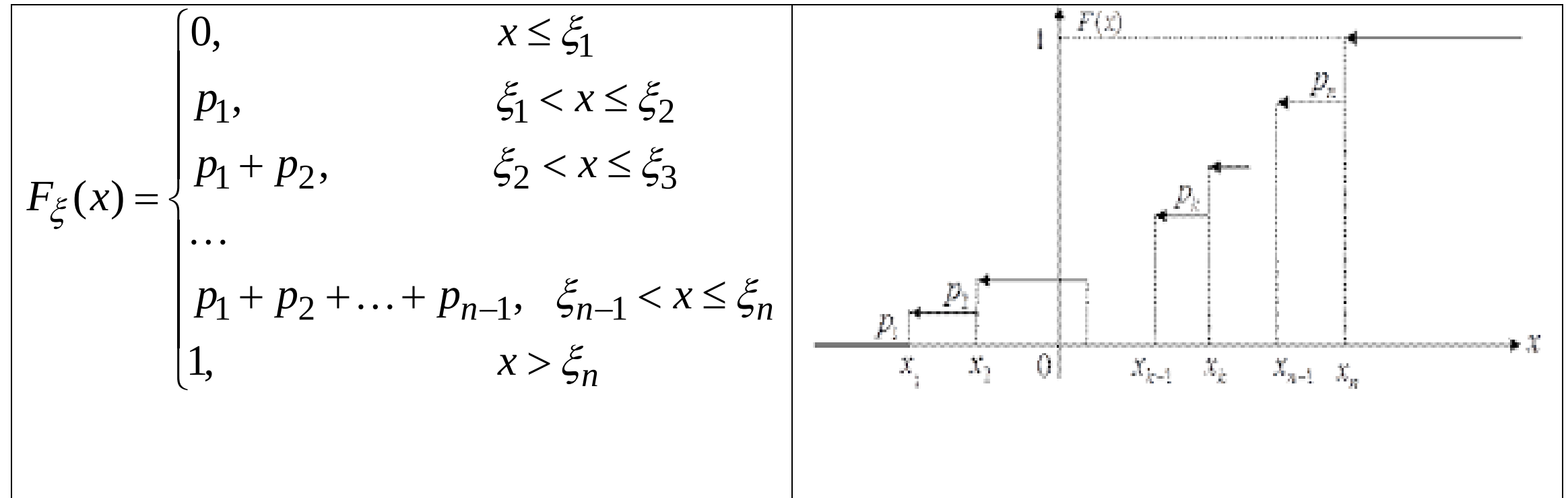
$$1. \sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1; \quad 2. P(a \leq \xi < b) = \sum_{\substack{\forall i: \exists \xi_i \\ a \leq \xi_i < b}} p_i.$$

Една дискретна случайна величина е напълно определена, ако е известна нейната функция на разпределение $F_\xi(x)$ или нейният закон на разпределение.

От функцията на разпределение може да се получи законът за разпределение на случайната величина и обратно. Ако е даден законът за разпределение на случайна величина (Табл. 8.1.), функцията на разпределение се получава по формулата:

$$F_\xi(x) = \sum_{\forall i: \exists \xi_i < x} p_i \text{ за всяко } x \in (-\infty, +\infty).$$

Графиката на функцията на разпределение има стъпаловиден вид, както е показано на Фиг. 8.1.



Фиг. 8.1. Функция на разпределение на д. сл. в. и графиката ѝ.

Функцията на разпределение на д. сл. в. е непрекъснатата отляво,
т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0 -} F_{\xi}(x) = F_{\xi}(x_0)$.

Пример 8.1. Хвърлят се два различни зара. Сл. в. $\xi = \{\text{абсолютната стойност на разликата на падналите се точки}\}$. Да се намери законът за разпределение и функцията на разпределение на ξ . Да се пресметне: а) $P(\xi < 3)$; б) $P(2 \leq \xi < 4)$; в) $P(\xi \geq 3)$; г) $P(2 < \xi \leq 4)$; д) $P(\xi > 2)$.

Съставяме таблица на абсолютните стойности на разликата на падналите се точки

-	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Възможните стойности на ξ са 0, 1, 2, 3, 4, 5. Нанасяме ги в таблица с техните вероятности:

ξ_i	0	1	2	3	4	5
p_i	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

За функцията на разпределение получаваме:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/6, & 0 < x \leq 1 \\ 4/9, & 1 < x \leq 2 \\ 2/3, & 2 < x \leq 3 \\ 5/6, & 3 < x \leq 4 \\ 17/18, & 4 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

а) От свойствата на ф. р. $P(\xi < 3) = F_{\xi}(3) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} = 0,667$.

Тази вероятност може да пресметнем и от закона на разпределение (з.р.) на случайната величина:

$$P(\xi < 3) = \sum_{\substack{\forall i: \exists \xi_i \\ \xi_i < 3}} p_i = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{24}{36} = 0,667.$$

б) От свойствата на функцията на разпределение имаме

$$P(2 \leq \xi < 4) = F(4) - F(2) = \frac{30}{36} - \frac{16}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = 0,389.$$

Аналогично на а) може да пресметнем вероятността

$$P(2 \leq \xi < 4) = \sum_{\forall i: \exists \xi_i, 2 \leq \xi_i < 4} p_i = p(2) + p(3) = \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{14}{36} = 0,389;$$

в) От свойствата на функцията на разпределение получаваме

$$P(\xi \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0,556$$

г) Като имаме предвид нестрогите неравенства получаваме:

$$P(2 < \xi \leq 4) = F(4+) - F(2+) = \frac{34}{36} - \frac{24}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0,278 \text{ или от з.р.}$$

$$P(2 < \xi \leq 4) = \sum_{\substack{\forall i: \exists \xi_i, \\ 2 < \xi_i \leq 4}} p_i = p(3) + p(4) = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = 0,278.$$

д) Като имаме предвид строгото неравенство, пресмятаме

$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - F(2+) = 1 - \frac{24}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0,334 \text{ или}$$

$$P(\xi > 2) = \sum_{\forall i: \exists \xi_i, \xi_i > 2} p_i = p(3) + p(4) + p(5) = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{12}{36} = 0,334.$$

Пример 8.2. Дискретната случайна величина ξ е зададена с функцията си на разпределение $F_{\xi}(x)$.

Намерете закона за разпределение на случайната величина.

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0,1, & 2 < x \leq 4 \\ 0,4, & 4 < x \leq 5 \\ 0,6, & 5 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Решение. В този пример е дадена функцията на разпределение, а търсим закона на разпределение на дискретната случайна величина.

Стойностите на случайната величина ξ са точките на прекъсване на $F_{\xi}(x)$, т.е. ξ има стойности 2, 4, 5 и 6. Вероятностите $P(\xi = \xi_i)$ се пресмятат от функцията на разпределение по следния начин:
 $P(\xi = \xi_i) = P(\xi_i < \xi \leq \xi_i) = F(\xi_i+) - F(\xi_i)$.

Последователно намираме:

$$P(\xi = 4) = F(4+) - F(4) = 0,4 - 0,1 = 0,3;$$

$$P(\xi = 2) = F(2+) - F(2) = 0,1 - 0 = 0,1;$$

$$P(\xi = 5) = F(5+) - F(5) = 0,6 - 0,4 = 0,2; \quad P(\xi = 6) = F(6+) - F(6) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Попълваме резултатите в таблица:

ξ_i	2	4	5	6
$p_i = P(\xi = \xi_i)$	0,1	0,3	0,2	0,4

Математическото очакване $E\xi$ на дискретно разпределената случайна величина ξ е равно на сумата от произведенията на всички нейни възможни стойности и съответните им вероятности, т.е.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot p_i. \quad (8.1)$$

Математическото очакване притежава следните свойства:

1. $EC = C$ ($C = \text{const}$);
2. $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$;
3. $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$, при ξ и η – независими.

Мода M_0 на случайната величина ξ се нарича онази нейна стойност ξ_0 , за която вероятността $P(\xi = \xi_0)$ е най-голяма или с други думи – най-вероятната стойност на случайната величина. Една случайна величина може да няма мода, а може и да има повече от една мода.

Дисперсия $D\xi$ на случайната величина ξ се нарича математическото очакване на случайната величина $(\xi - E\xi)^2$, $E(\xi - E\xi)^2$. За дискретно разпределена случайна величина ξ дисперсията се пресмята по формулата:

$$D\xi = \sum_{i=1}^n (\xi_i - E\xi)^2 p_i. \quad (8.2)$$

От свойствата на математическото очакване следва, че $D\xi$ може да се пресметне и по следния начин:

$$D\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \cdot p_i - (E\xi)^2. \quad (8.3)$$

Дисперсията притежава следните свойства:

1. $D\xi \geq 0$ за произволна случайна величина;
2. $DC = 0$;
3. $D(C\xi) = C^2 D\xi$;
4. $D(\xi_1 \pm \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$, ако ξ_1 и ξ_2 са независими.

Стандартно отклонение на случайната величина ξ се нарича числото $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

Пример 8.3. Да се пресметнат математическото очакване, модата, дисперсията и стандартното отклонение на случайните величини от Пример 8.2.

За случайната величина от Пример 8.2. по формула (8.1) пресмятаме:

$$E\xi = \sum_{i=1}^4 \xi_i \cdot p_i = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,4 = 4,8.$$

Модата на случайната величина е $Mo = 6$, $P(\xi = 6) = 0,4$. Използваме (8.3) за дисперсията:

$$D\xi = \sum_{i=1}^6 \xi_i^2 \cdot p_i - (E\xi)^2 = 2^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,2 + 6^2 \cdot 0,4 - (4,8)^2 = 1,56$$

$$\text{Съответно } \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{1,56} = 1,249.$$

8.3. Биномно разпределена дискретна случайна величина

Всяка редица от n независими опита, при всеки от които събитието A настъпва с една и съща вероятност $P(A) = p$, ($P(\bar{A}) = 1 - p = q$), се нарича **редица от опити на Бернули** или **схема на Бернули**. Схема на Бернули означаваме: $B(n, p)$.

Настъпването на събитието A ще наричаме **успех**, а настъпването на $\bar{A}$ – **неуспех**.

Независими опити имаме при всички извадки с връщане, хвърляне на зар няколко пъти и др.

Вероятността за настъпване на k успеха в схема на Бернули $B(n, p)$ се пресмята по формулата: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ за всяко $k = 0, \dots, n$.

Числата $P_n(k)$ се наричат още биномни вероятности. За тях са в сила редица свойства, някои по-често използвани са:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k); \quad P_n(k \geq 1) = 1 - q^n; \quad \sum_{k=0}^n P_n(k) = 1.$$

Числото k_0 , за което биномната вероятност $P_n(k_0)$ е има най-голяма стойност се нарича **най-вероятен брой успехи** в схемата на Бернули $B(n, p)$.

Да означим най-вероятния брой успехи за схема на Бернули с $B(n, p)$ с m , т.е. $P(m) = \max_{0 \leq k \leq n} P_n(k)$.

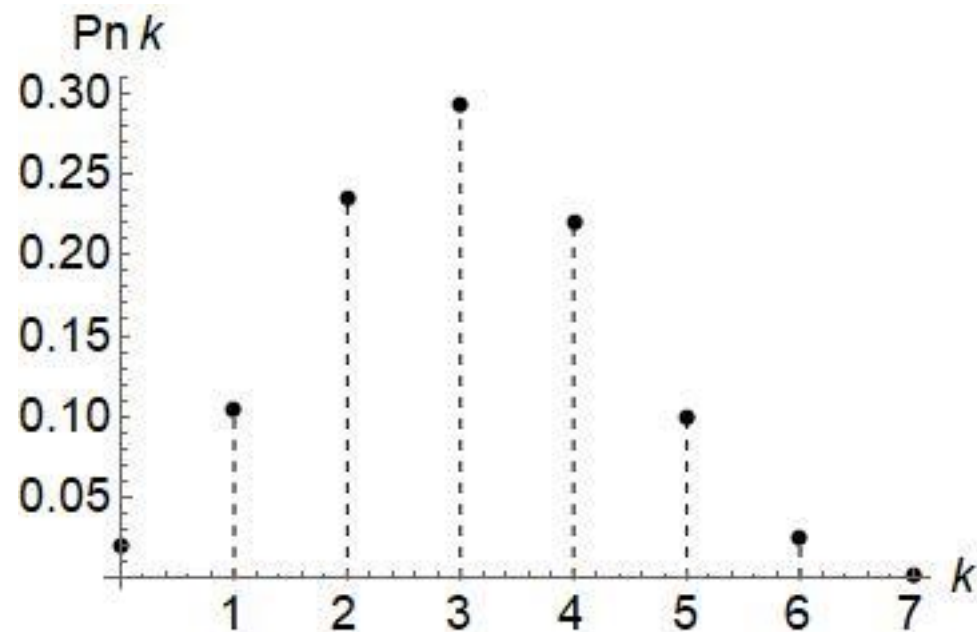
Най-вероятният брой успехи m е решението в цели числа на системата неравенства:

$$(n+1)p - 1 \leq m \leq (n+1)p \tag{8.4}$$

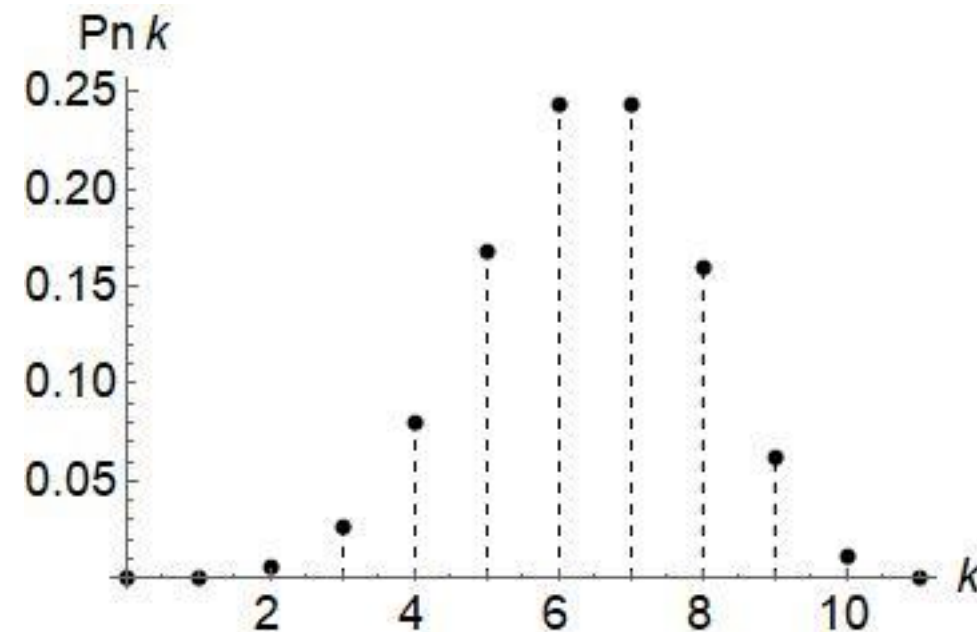
Ако $(n+1)p$ е дробно число, то m е единствено (Фиг. 8.3, $m = 3$). Ако $(n+1)p$ е цяло число, то за m имаме две стойности $m_1 = (n+1)p$ и $m_2 = (n+1)p - 1$, като $P_n(m_1) = P_n(m_2)$, т.е. имаме два най-вероятни броя на успехите (Фиг. 8.4., $m_1 = 6$, $m_2 = 7$).

Случайната величина ξ има **биномно разпределение** с параметри n и p (означаваме $\xi \in Bi(n, p)$), ако приема стойности $k = 0, 1, \dots, n$ с вероятности $P(\xi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$. Случайна величина с такова разпределение има смисъл на брой „успехи” в схема на Бернули $B(n, p)$.

На Фиг. 8.3. и Фиг. 8.4. са показани биномните вероятности за всяко $k = 0, \dots, n$ в схема на Бернули $B(7, 3/7)$ и $B(10, 7/11)$ съответно.



Фиг. 8.3. Биномни вероятности
схема на Бернули $B(7, 3/7)$



Фиг. 8.4. Биномни вероятности
схема на Бернули $B(10, 7/11)$

Законът на разпределение на $\xi \in Bi(n, p)$ има вида:

ξ_i	0	1	...	k	...	n
p_i	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	...	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	...	p^n

Математическото очакване и дисперсията на $\xi \in Bi(n, p)$ се пресмятат съответно по формулите:

$$E\xi = n.p \text{ и } D\xi = n.p.q. \quad (8.5)$$

Пример 8.4. Вероятността баскетболист да улови успешно кош е 70%.

а) Напишете закона за разпределение на случайната величина ξ = „брой попадения в кош при осем опита”;

б) Намерете модата на случайната величина ξ и очаквания брой попадения в кош;

в) Намерете вероятността броят на попаденията да е поне три и не повече от пет;

г) Намерете вероятността броят на попаденията да е поне пет;

д) Намерете дисперсията и стандартното отклонение на ξ .

Решение. а) Случайната ξ = „брой попадения в коша при осем опита” е биномно разпределена сл.в., т.е. $\xi \in Bi(8;0,7)$, защото опитите са независими и при всеки опит вероятността за успех (да улучи коша) е една и съща $p=0,7$ и $n=8$.

Законът за разпределение на случайната величина $\xi \in Bi(8;0,7)$ е $P(\xi = k) = P_8(k) = C_8^k 0,7^k 0,3^{8-k}$, за всяко $k=0, 1, , \dots, 8$.

В Табл. 8.2. е представен законът на разпределение на $\xi \in Bi(8;0,7)$.

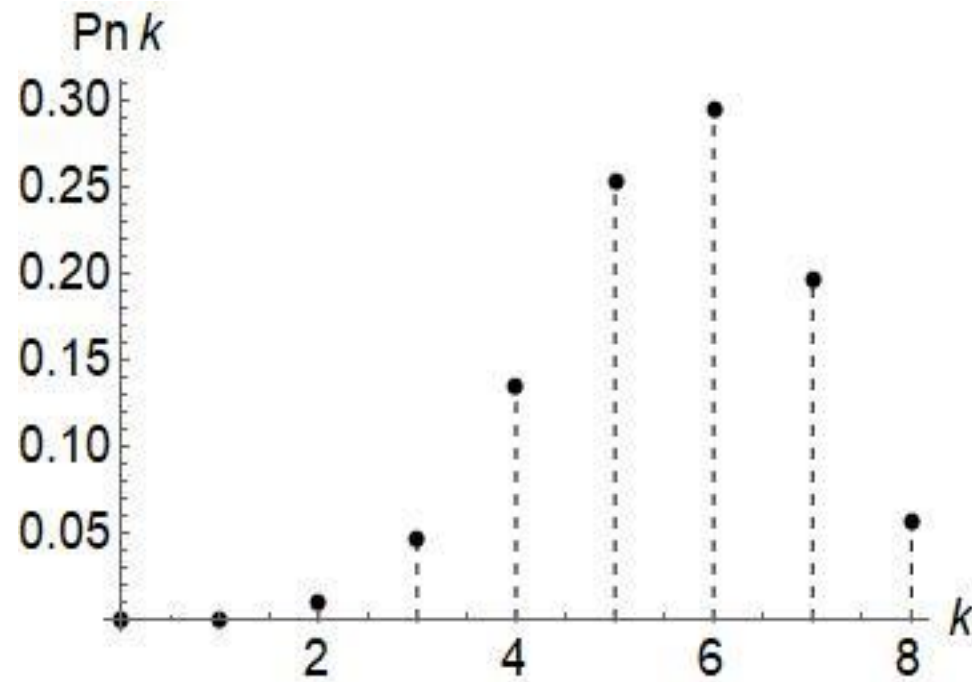
Табл. 8.2. Закон на разпределение на $\xi \in Bi(8;0,7)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_n(k)$	0.0000656	0.00122	0.0100	0.0467	0.136	0.254	0.296	0.198	0.0576

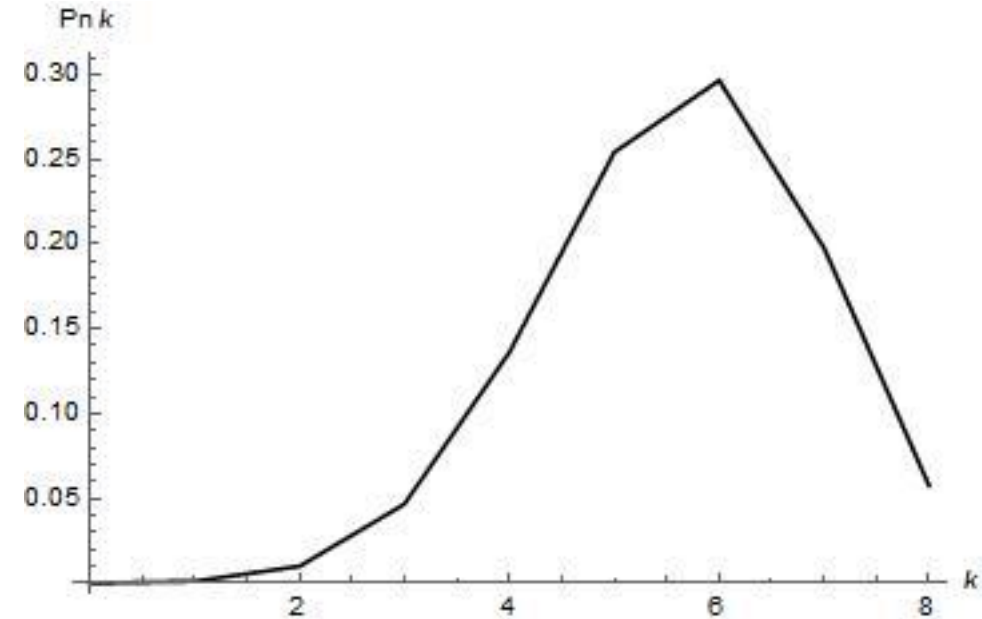
На Фиг. 8.5. са визуализирани точките с координати $(k, P_8(k))$ за всяко $k=0, 1, , \dots, 8$. Линията, свързваща тези точки (Фиг. 8.6.) се нарича **полигон на разпределение** на случайната величина.

б) Модата на случайната величина пресмятаме по формула (8.4) $(n+1)p = (8+1) \cdot 0,7 = 6,3 \notin \mathbb{Z}$, т.е. $M_0 = 6$, както се вижда и от Фиг. 8.5.

Математическото очакване, или очакваният брой попадения в коша пресмятаме по формулата $E\xi = n \cdot p = 8 \cdot 0,7 = 5,6$.



Фиг. 8.5. Закон на разпределение на сл. в. $\xi \in Bi(8; 0,7)$



Фиг. 8.6. Полигон на разпределение на сл. в. $\xi \in Bi(8; 0,7)$

в) Вероятността $P(3 \leq \xi \leq 5)$ намираме като сума от биномните

вероятности:
$$P(3 \leq \xi \leq 5) = \sum_{k=3}^5 C_8^k (0,7)^k \cdot (0,3)^{8-k} = 0,437.$$

г) Вероятността $P(\xi \geq 5)$ намираме като сума от биномните

вероятности
$$P(\xi \geq 5) = \sum_{k=5}^8 C_8^k (0,7)^k \cdot (0,3)^{8-k} = 0,806.$$

д) Дисперсията $D\xi$ пресмятаме $D\xi = n \cdot p \cdot q = 8 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 1,68.$

Стандартното отклонение е $\sigma\xi = \sqrt{npq} = 1,296.$

Във *Wolfram Mathematica* използваме вградените функции за случайната величина $\xi \in dist$, където *dist* е определено разпределение:

- PDF[dist,x] (Probability Density Function) за пресмятане на $P(\xi = k)$
- ;

- CDF[dist,x] (Cumulative Distribution Function) за пресмятане на $F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$;
- Mean[dist] – пресмята математическото очакване на $\xi \in \text{dist}$;
- Variance [dist] – пресмята дисперсията на $\xi \in \text{dist}$;
- StandardDeviation[dist] – пресмята стандартното отклонение на случайната величина $\xi \in \text{dist}$.
- BinomialDistribution[n,p] – вградена функция за биномно разпределена случайна величина $\xi \in Bi(n; p)$.

Пресмятанията в Пример 8.4. може да извършат на *Wolfram Mathematica* по следния начин:

Пример 8. 4.

```
(* a) *)
```

```
tbl = Table[{k, PDF[BinomialDistribution[8, 0.7], k]},  
            {k, 0, 8}];
```

```
(* б) *)
```

```
Mean[BinomialDistribution[8, 0.7]];
```

```
(* в) *)
```

```
Sum[PDF[BinomialDistribution[8, 0.7], k], {k, 3, 5}];
```

```
(* г) *)
```

```
Sum[PDF[BinomialDistribution[8, 0.7], k], {k, 5, 8}];
```

```
(* д) *)
```

```
Variance[BinomialDistribution[8, 0.7]];
```

```
StandardDeviation[BinomialDistribution[8, 0.7]];
```

8.4. Геометрично разпределена дискретна случайна величина

Случайната величина ξ = „брой неуспехи до първия успех в схема на Бернули $B(n, p)$ ” е **геометрично разпределена случайна величина** с параметър p . Означаваме $\xi \in Ge(p)$. Случайната величина $\xi \in Ge(p)$ приема стойности $k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятности $P(\xi = k) = (1-p)^k p$.

Математическото очакване и дисперсията на величината $\xi \in Ge(p)$ са съответно

$$E\xi = \frac{1-p}{p} \text{ и } D\xi = \frac{1-p}{p^2}. \quad (8.6)$$

Често се разглежда случайната величина $\eta = \xi + 1$, където η = „брой опити в схема на Бернули $B(n, p)$ до първия успех (включително)”, т.е. η

приема стойности $1, 2, 3, \dots$, с вероятности $P(\eta = k) = (1 - p)^{k-1} p$.
Математическото очакване и дисперсията на величина η са

$$E\eta = \frac{1}{p} \text{ и } D\eta = \frac{1-p}{p^2}. \quad (8.7)$$

Пример 8.5. За да влезе в игра участник хвърля едновременно два различни зара до поява на поне една шестица. Да се намери:

- а) вероятността да влезе в играта при третото хвърляне на заровете;
- б) вероятността да не хвърля заровете повече от пет пъти, за да влезе в играта.
- в) очакваният брой хвърляния на зара до влизане в играта.

Нека ξ = „брой хвърляния до падане на поне една шестица“. Вероятността за „успех“, т.е. да се паднат шест точки поне на единия зар при всяко хвърляне е една и съща, т.е. опитите са независими и тази вероятност е $p = \frac{11}{36}$. Тогава $\xi \in Ge(11/36)$.

а) Тъй като шест точки и на двата зара трябва да се паднат при третия опит, то броят на неуспехите е два, т.е. търсим вероятността

$$P(\xi = 2) = (1 - p)^2 \cdot p = \left(\frac{25}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{36}\right) = 0,15. \quad \text{С } Wolfram \text{ Mathematica}$$

пресмятаме `PDF[GeometricDistribution[11/36],2]`.

$$\text{б) Търсим } P(\xi \leq 5) = \sum_{k=0}^4 (1 - p)^k \cdot p = 0,84. \quad \text{С } Wolfram \text{ Mathematica}$$

`Sum[PDF[GeometricDistribution[11/36],k],{k,0,4}]`.

$$\text{в) } E\xi = \frac{1 - p}{p} = \frac{1 - 11/36}{11/36} = 2,27, \text{ т.е. за влизане в играта средният брой}$$

неуспешни хвърляния е 2.

С *Wolfram Mathematica*: `Mean[GeometricDistribution[11/36]]`.

Дисперсията пресмятаме по формулата $D\xi = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-11/36}{(11/36)^2} = 7,44$

или `Variance[GeometricDistribution[11/36]]`.

За стандартното отклонение получаваме $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = 2,73$ или от `StandardDeviation[GeometricDistribution[11/36]]`.

8.5. Непрекъснати случайни величини. Числови характеристики

Непрекъснатите случайни величини приемат стойности в определен интервал от числовата ос. Зависимостта между стойностите на случайната величина и техните вероятности се задава с функция, наречена **плътност на разпределение** $f_\xi(x)$.

За $f_{\xi}(x)$ е в сила равенството $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) = 1$, т.е. лицето под графиката на функцията $f_{\xi}(x)$ е равно на единица.

Функцията на разпределение $F_{\xi}(x) = P(\xi < x)$ се дефинира като функция на горната граница на интеграл от $f_{\xi}(x)$ (откъдето следват и част от нейните свойства, като непрекъснатост и диференцируемост), а

именно: $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t)dt$. Оттук следва, че $F'(x) = f_{\xi}(x)$.

Една непрекъснатата случайна величина е напълно определена, ако е известна нейната функция на плътността или нейната функция на разпределение. Както и при дискретните случайни величини, ако знаем едната от тях може да намерим другата, и обратно.

Вероятността на събитието $P\{a \leq \xi < b\}$ се пресмята като интеграл от функцията на плътността: $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f_{\xi}(x)dx$.

Математическото очакване, дисперсията и стандартното отклонение на непрекъснато разпределена случайна величина се пресмятат съответно по формулите:

$$\begin{aligned}
 E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi}(x) dx; \\
 D\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 \cdot f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_{\xi}(x) dx - (E\xi)^2; \\
 \sigma_{\xi} &= \sqrt{D\xi}.
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

Нека случайната величина има функция на разпределение $F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}$. Стойността x_{α} ($0 < \alpha < 1$) се нарича α -**квантил** на разпределението на ξ , ако е изпълнено $F_{\xi}(x_{\alpha}) = P\{\xi < x_{\alpha}\} = \alpha$.

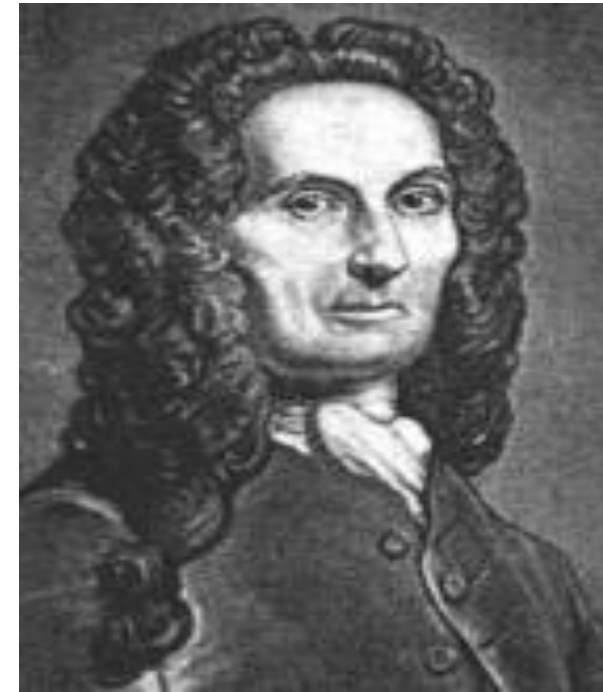
Квантилът $x_{0,5}$ се нарича **медиана** и се означава с Md.

Квантилите $x_{0,25}$, $x_{0,50}$, $x_{0,75}$ се наричат кватили, а квантилите $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, $x_{0,3}$, $x_{0,4}$, $x_{0,5}$, $x_{0,6}$, $x_{0,7}$, $x_{0,8}$, $x_{0,9}$ – децили.

8.6. Нормално разпределена случайна величина

Нормалното разпределение или разпределението на Гаус е едно от най-важните непрекъснати разпределения и има изключително значение за статистиката.

Първата идея за нормалното разпределение принадлежи на английския математик от френски произход Абрахам де Моавър и е определено от него като непрекъснатата форма на биномно разпределение.



Abraham de Moivre
(1667-1754 г.)

В началото на XIX в. независимо от Моавър, нормалното разпределение е било открито и описано от видния немски математик Карл Фридрих Гаус (Carl Friedrich Gauß) (1777-1855г.) и френския математик, физик и астроном Пиер Симон Лаплас (Pierre-Simon Laplace)

(1749-1827г.), които са го приложили в теорията на случайните грешки. Затова често нормалното разпределение се нарича Гаус-Лапласово разпределение.

Непрекъснатата случайна величина ξ е разпределена по нормален (гаусов) закон с параметри μ и σ , означаваме $\xi \in N(\mu, \sigma)$, ако има плътност на разпределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (8.9)$$

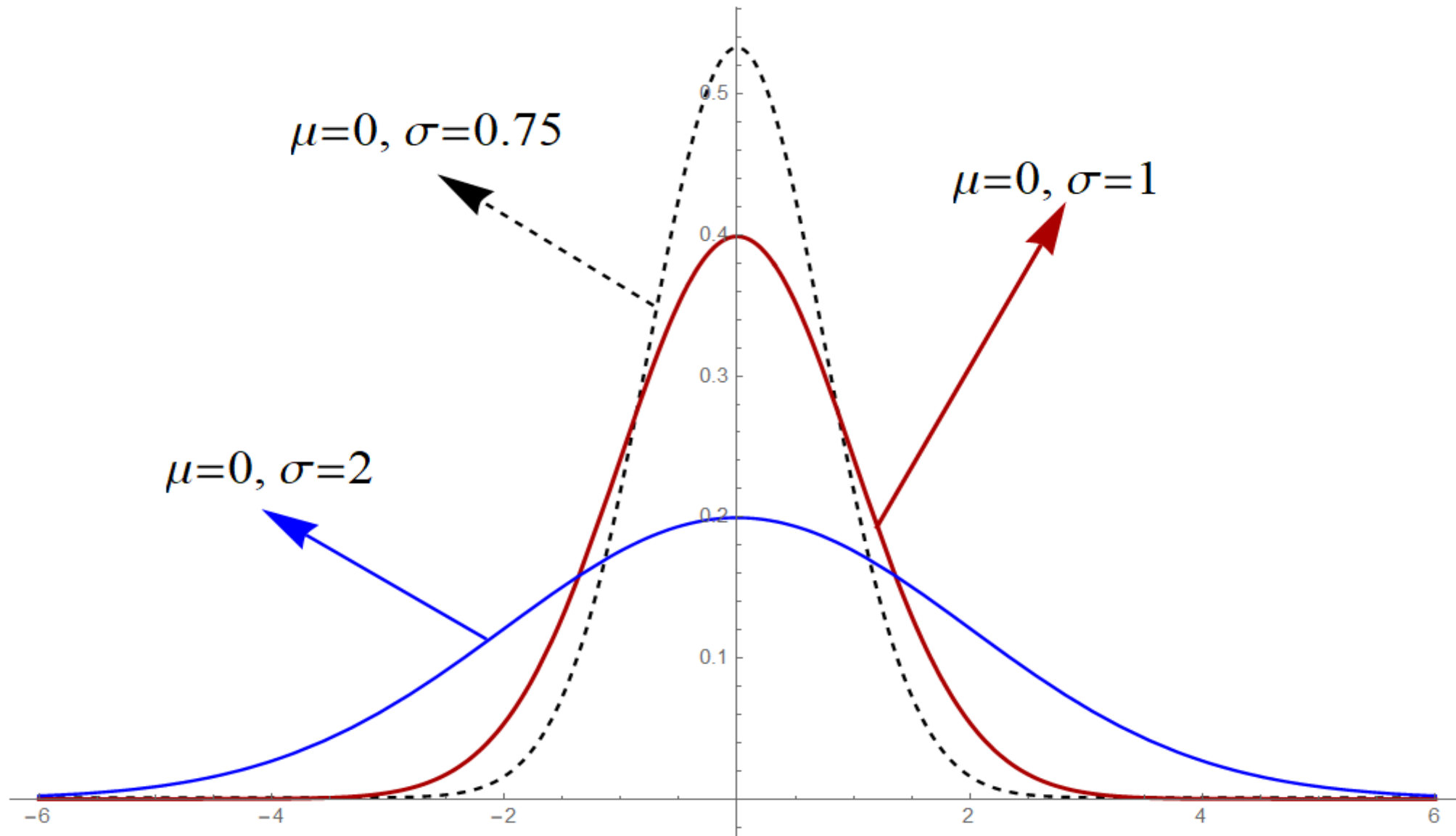
Графиката на $f(x)$ е камбановидна крива, симетрична относно правата $x = \mu$ с две инфлексни точки (за $x = \mu - \sigma$ и $x = \mu + \sigma$) и максимум за $x = \mu$.

При това $f_{\max} = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, което може да разглеждаме като

височина на камбановидната крива. От условието $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) = 1$ следва, че с увеличаване на σ , височината на „камбанката“ намалява и за да остане лицето под графиката константа, кривата става по-ниска и по-широка. Обратно, намаляването на σ води до по-висока и по-тясна камбановидна крива. Това може да видим от графиката на $f(x)$ за различните σ при фиксирано μ (Фиг. 8.7).

Параметрите μ и σ съвпадат с основните числови характеристики на $\xi \in N(\mu, \sigma)$, т.е. $E\xi = \mu$, $\sigma = \sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$.

При стойности на параметрите $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, разпределението на случайната величина $Z \in N(0, 1)$ се нарича стандартно нормално разпределение.

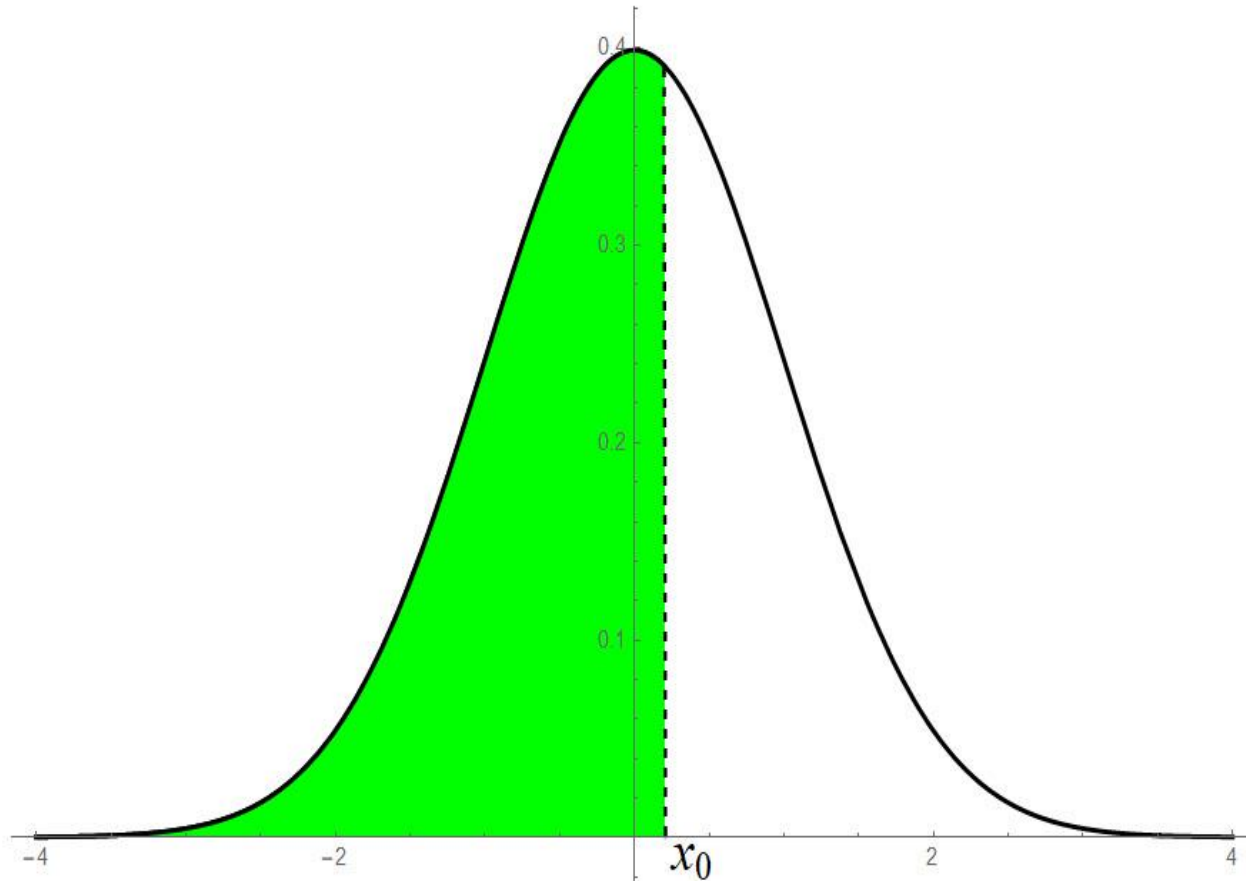


Фиг. 8.7. Графика на $f(x)$ за нормално разпределение при различни стойности на σ .

За стандартното нормално разпределение е прието функцията на разпределение $F_{\xi}(x)$ да се означава с $\Phi(x)$, а плътността $f_{\xi}(x)$ да се

означава с $\varphi(x)$, т.е. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $\Phi(x) = P(Z < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Ако ξ е нормално разпределена случайна величина с параметри μ и σ , т.е. $\xi \in N(\mu, \sigma)$, то случайната величина $\frac{\xi - \mu}{\sigma}$ е стандартно нормално разпределена, т.е. $Z = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \in N(0, 1)$.

Фиг. 8.8. Функцията на разпределение $\Phi(x)$.

Функцията на разпределение $\Phi(x)$ е дефинирана за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$. Стойността $\Phi(x_0)$ е равна на лицето под графиката на $\varphi(x)$ в интервала $(-\infty, x_0)$, т.е. лицето на заштрихованата част на Фиг. 8.8.

За $x \in [0, +\infty)$ стойностите на $\Phi(x)$ дадени в таблица (Приложение 2). За пресмятане на $\Phi(-x)$ се използва формулата $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Пример 8.6. За нормално разпределената случайна величина $Z \in N(0,1)$, пресметнете: а) $P(Z < 1,67)$; б) $P(Z < -0,28)$; в) $P(0,32 < Z < 1,5)$.

а) От Приложение 1, имаме $P(Z < 1,67) = \Phi(1,67) = 0,95254$

С *Wolfram Mathematica* същото може да пресметнем `CDF[NormalDistribution[],1.67]`. Тук `NormalDistribution[]` (без параметри) задава стандартно нормално разпределение.

б) Пресмятаме чрез таблицата от Приложение 2 $P(Z < -0,28) = \Phi(-0,28) = 1 - \Phi(0,28) = 1 - 0,61 = 0,39$. Може да пресметнем директно с *Wolfram Mathematica*: `CDF[NormalDistribution[],-0.28]`.

в) Пресмятаме:

$$P(0,32 < Z < 1,5) = \Phi(1,5) - \Phi(0,32) = 0,933 - 0,6255 = 0,3075 \text{ или}$$

$$\text{CDF[NormalDistribution[],1.5]} - \text{CDF[NormalDistribution[],0.32]}.$$

Пример 8.7. Случайната величина ξ е нормално разпределена с параметри $\mu = 50$ и $\sigma^2 = 25$. Намерете вероятността:

а) $P(45 \leq \xi \leq 48)$; б) $P(52 \leq \xi \leq 60)$; в) $P(\xi > 54)$.

От условието имаме $\xi \in N(50,5)$. За да намерим търсените вероятности, трябва да преминем към стандартно нормално разпределение $Z = \frac{\xi - 50}{5} \in N(0,1)$.

$$\begin{aligned} \text{а) } P(45 < \xi < 48) &= P\left(\frac{45-50}{5} < \frac{\xi-50}{5} < \frac{48-50}{5}\right) = P(-1 < Z < -0,4) = \\ &= \Phi(-0,4) - \Phi(-1) = 1 - \Phi(0,4) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) - \Phi(0,4) = 0,8413 - 0,6554 = 0,1859. \end{aligned}$$

Може да пресметнем с *Wolfram Mathematica*, без да преминаваме към стандартно нормално разпределение:

$$\text{CDF[NormalDistribution[50,5],48]} - \text{CDF[NormalDistribution[50,5],45]}.$$

б) Пресмятаме

$$P(52 < \xi < 60) = P\left(\frac{52-50}{5} < \xi < \frac{60-50}{5}\right) = P(0,4 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(0,4) = 0,9772 - 0,6554 = 0,3218$$

$$\begin{aligned} \text{в)} P(\xi > 54) &= 1 - P(\xi \leq 54) = 1 - P\left(\frac{\xi - 50}{5} < \frac{54 - 50}{5}\right) = 1 - P(Z < 0,8) = \\ &= 1 - \Phi(0,8) = 1 - 0,788 = 0,212. \end{aligned}$$

Пример 8.8. Точките от проведени състезания с ученици от девети клас е нормално разпределена случайна величина $\xi \in N(150, 20)$. Ръководството на училището трябва да определи 30-те процента ученици с най-висок брой точки за участие в националното състезание. Да се определи какъв е минималният брой точки, които трябва да има ученик, за да участва в състезанието.

Нека означим минималния брой точки с x_0 . Търсим $P(\xi > x_0) = 0,3$ или $P(\xi \leq x_0) = 0,7$, т.е. търсим 0,7 квантил на ξ или $x_{0,7} = ?$

$$P\left(\frac{\xi - 150}{20} \leq \frac{x_0 - 150}{20}\right) = 0,7, \text{ т.е. } P\left(Z \leq \frac{x_0 - 150}{20}\right) = 0,7$$

$$\Phi\left(\frac{x_0 - 150}{20}\right) = 0,7, \quad \frac{x_0 - 150}{20} = 0,52, \quad x_0 = 0,52 \cdot 20 + 150 = 160,4.$$

С *Wolfram Mathematica* може директно да използваме вградената функция `Quantile[NormalDistribution[150, 20], 0.7]`, откъдето получаваме 160.488 за търсения брой точки. В отговор – учениците, които имат повече от 161 точки са търсените 30% от най-успешите и могат да участват в националното състезание.

8.6. Локална и интегрална гранични теореми

Биномните вероятности $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$ в случаите, когато $n \rightarrow \infty$ и $np \rightarrow \lambda$ се апроксимират с Поасоново разпределение

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

При големи n биномните вероятности $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$ може да се апроксимират с нормално разпределение.

На Фиг. 8.9 е показано, че полигона на биномно разпределение при $n=45$ и $p=0,5$ се доближава до графиката на функцията на плътността на нормално разпределение.

Използваните асимптотични формули са известни като локална гранична теорема за апроксимация на вероятностите $P_n(k)$ за фиксирано k и интегрална гранична теорема за апроксимация на вероятностите $P_n(a \leq k \leq b)$.

Теорема. Локална гранична теорема (Моавър-Лаплас)

В схема на Бернули $B(n, p)$ при $n \rightarrow \infty$, за биномните вероятности

$$P_n(k) \text{ е в сила } P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - npq}{\sqrt{npq}}\right).$$

Теорема. Интегрална гранична теорема В схема на Бернули $B(n, p)$ при $n \rightarrow \infty$, за биномните вероятности $P_n(a \leq k \leq b)$ е в сила

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

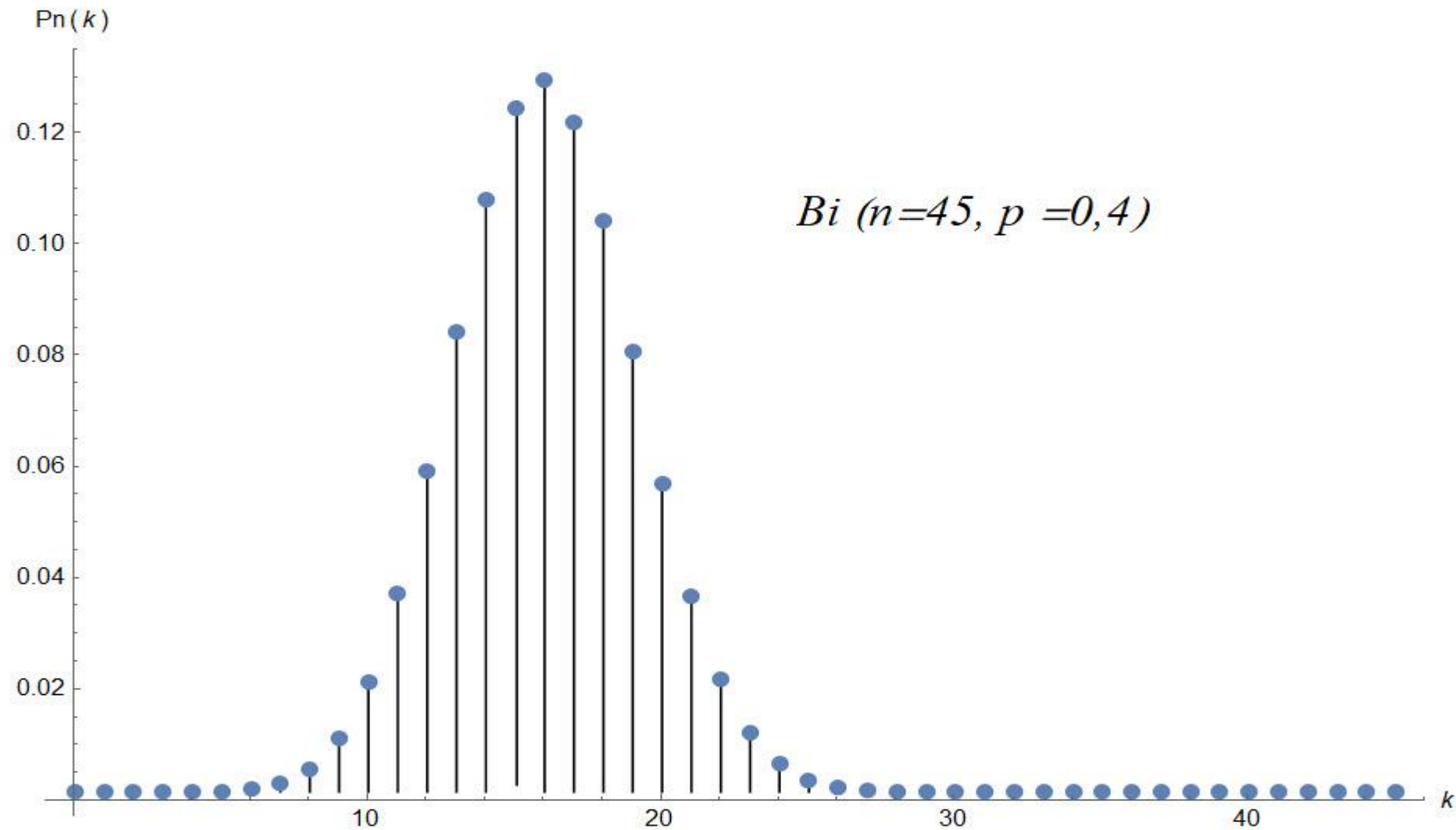
Пример 8.9. Монета се хвърля 12 100 пъти. Да се определи вероятността герб да се падне между 6125 и 6725 пъти.

Имаме схема на Бернули $B(12\,100; 0,5)$ ($n = 12\,100$, $p = 0,5$). Търсената вероятност може да бъде пресметната чрез интегралната гранична теорема.

Пресмятаме $n.p = 6050$ и $\sqrt{npq} = \sqrt{3025} = 55$.

Тогава имаме:

$$\begin{aligned} P_{12100}(6125 \leq k \leq 6725) &\approx \Phi\left(\frac{6725 - 6050}{55}\right) - \Phi\left(\frac{6125 - 6050}{55}\right) = \\ &= \Phi(12,27) - \Phi(1,36) = 1 - 0,913085 = 0,086915. \end{aligned}$$



Фиг. 8.9. Биномно разпределение $Bi(n=45, p=0.4)$.

ГЛАВА 9. ЕЛЕМЕНТИ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА СТАТИСТИКА

9.1. Исторически бележки

Статистиката се смята за „млада“ наука, но нейната история е много интересна и любопитна. За „майка“ на статистиката се смятат правителствените институции (включително фараоните, царете и императорите). За „баща“ на статистиката се смята хазартът.

Думата „статистика“ произлиза от латинската думна *status*, което означава състояние.

Фундаментална роля в развитието на статистиката изиграват теорията на вероятностите и теорията на измерването.

За основоположник на дедуктивната статистика се смята швейцарският статистик Якоб Бернули (Jacob Bernoulli, 1654-1705).

Трудът му “Ars Conlectandi” е един от първите по теория на вероятностите. В него се разглежда разпределението при хвърляне на монета и става “бестселър” сред хазартните играчи. Именно хазартът е причина да се положат математическите основи на статистиката през 17 век.

Изразът „статистически данни” за първи път се появява през 18 век. Той се използва за означаване на справки за населението, производството, политическата ситуация и е наречен „политическа аритметика”.

Терминът „статистика” е въведен от немския философ и статистик Готфрид Ахенвалд (Gottfried Achenwall, 1719-1772) и е означавал „политическо състояние”. За рождена година на статистиката като наука се смята 1746 година, когато Ахенвалд започва да чете университетски курс по статистика в Марбургския (Marburg) университет.

Фундаментална роля в развитието на статистиката е изиграл британският свещеник и математик Томас Бейс (Thomas Bayes, 1702–1761), който за първи път прави опит да използва теорията на вероятностите като средство за получаване на дедуктивни изводи, т. е. от извадката към генералната съвкупност.

За основател на съвременната статистика се счита белгийският астроном Ламбер Адолф Жак Кетле (Lambert Adolphe Jacques Quetelet, 1796-1874). По негова инициатива започват да се провеждат международни статистически конгреси, а през 1885 г. се основава Международният статистически институт, който съществува и до днес.

Теорията на измерването е ключов елемент на връзката между математиката и приложните науки. Английският математик, астроном и физик Исак Нютон (Isaac Newton, 1642–1727) е първият, който чрез средната стойност от няколко наблюдения намалява грешката от измерването при наблюдението на астрономическите обекти.

През 1777 г. швейцарският статистик от датски произход Даниел Бернули (Daniel Bernoulli (1700–1782), племенник на Якоб Бернули (Jacob Bernoulli, 1654-1705), полага основите на анализа на грешките при измерването.

Фундаменталната роля на измерването е разгледана от английския учен Франсис Галтон (Francis Galton, 1822-1911). Той прилага статистическите методи в биологията (1889 г.) и за първи път формулира методите на *корелационния* и *регресионния анализ*.

Неговият ученик английският статистик Карл Пирсън (Karl Pearson, 1857-1936), който често се нарича „баща на статистиката” има голям принос в развитието на статистиката.

Редица английски статистици широко използват статистиката в решаване на практически задачи в различни области на науката. Уийлям Госет (William Gosset, 1876-1936), който пише под псевдонима Стюдънт (student - студент), разработва *теорията за малките извадки*.

Чарлз Спирмън (Charles Spearman, 1863-1945) предлага *факторния анализ*, математическите формули, на които са разработени от американския психолог Луис Търстон (Louis Leon Thurstone, 1887–1955) през 1927 година.

Роналд Фишер (Sir Ronald Fisher, 1890-1962) развива методите за количествен анализ и създава метода на *дисперсионния анализ*, а през 1920-те години въвежда понятието „нулева хипотеза” – H_0 .

9.2. Основни понятия

Статистиката е набор от техники и процедури, които включват събиране, организиране, анализ, интерпретация и представяне на данни, т.е. информация, която може да се изрази числово.

Променлива е всяка характеристика (признак) на изследваните обекти, която може да бъде измерена.

Променливата приема различни стойности за различните обекти на изследването. Ръстът и теглото на човек, неговата интелигентност, отношението му към религията са примери на променливи.

Променливите, които могат да бъдат непосредствено количествено измерени се наричат **количествени променливи** (ръст, тегло, възраст, алкохолно съдържание в бира, брой попадения в баскетболни кошове в един състезателен сезон), а тези, които не могат – **качествени променливи** (пол, цвят на очите, мнение за обслужването в хотел и др.).

Количествените променливи от своя страна се делят на дискретни и непрекъснати.

Дискретните променливи приемат стойности от изброимо крайно или безкрайно множество, например цели числа. Те се получават обикновено в резултат на броене – брой на преминалите през кръстовище автомобили, брой на точките от тест и т.н.

Непрекъснатите променливи приемат числови стойности от безкрайно неизброимо множество, напр. определен интервал от реалната права. Те обикновено се получават в резултат на измервания. Дължината, височината и температурата са примери за такива променливи.

Измерването е процес на присвояване на числова стойност на определена характеристика на наблюдавания обект в съответствие с дадено правило. Начинът, по който числата се присвояват на наблюдението определя **скалата за измерване**.

Традиционната за статистиците класификационна система за измерване за първи път е предложена от американския психолог Стенли Стивънс (Stanley Stevens, 1906–1973) през 1946 г. Той дефинира следните четири типа скали за измерване: номинална, ординална (рангова), интервална и пропорционална. Всяко измерване се класифицира към една от тези четири скали.

Променливите, измерени съответно с номинални, ординални (рангови), интервални и пропорционални скали се наричат съответно: **номинални, ординални (рангови), интервални и пропорционални променливи**. Качествените променливи се измерват в номинална и/или рангова (категорийна) скала, а количествените – в интервална и/или пропорционална скала. Първите две скали се наричат неметрични, а вторите две – метрични. Правилното класифициране на скалите на измерване е важно, защото впоследствие те се превръщат в предпоставка за прилагането на едни или други методи за статистически анализ.

Номиналната скала е сравнително най-слабата измерителна скала. На нея се представят значенията на неметрични, неранжирани променливи. Основно свойство на номиналната скала е наличието на две или повече взаимно несъвместими категории, които не могат да се сравняват помежду си. Поради това тя съдържа само данни, представени посредством наименования, означения или категории. Тя предоставя

сравнително най-малки познавателни възможности при анализа като изчисляване на някои относителни дялове и характеризиране на структурата на изучаваната съвкупност.

Номинални променливи са например пол, образование, семейно положение, националност и др. Номинална променлива, която се състои само от две категории се нарича **дихотомна** (още двоична, бинарна или алтернативна).

Ординалната скала (рангова скала) се използва също за представяне на неметрирани признаци, но такива, в които може да се установи наредба (възходяща или низходяща) на база на степенни различия между тях. Например променливата образование: начално, основно, средно, бакалавър, магистър, доктор. Пример за ординални данни е всяко състезание, в което има класирани на първо, второ, трето и т. н. място.

Необходимо е да се отбележи, че подредбата на първо, второ, трето и т. н. място не дава информация за това колко сходни едни с други са резултатите на участниците в първенството и каква е разликата между тях.

Интервалната скала се използва за измерване на метрирани признаци. Всяка интервална скала притежава единица на измерване и начална точка (нула) на отчитането, които са условни. Мерните числа могат да бъдат положителни, отрицателни или с нулева стойност, цели или дробни числа. Нулата в тази скала не означава отсъствие на измервания признак. Например, при измерване на температурата по скалата на Целзий, нулева е температурата на топене на леда при нормално налягане, но 0°C не означава липса на температура. Наличието на мерна единица определя едно важно свойство на интервалната скала – на равни разлики между различни нива на скалата отговарят равни разлики в интензитета на измерваната характеристика.

Освен това, чрез използване на мерната единица може да бъде определено разстоянието между всеки две нива от скалата.

Пропорционалната скала дава най-много информация за свойствата на изследвания обект в сравнение с разгледаните дотук скали. Тази скала се характеризира с фиксирана абсолютна нула за начало на измерванията и различни мерни единици. С пропорционална скала се измерват маса, дължина, заряд, а така също и цени, разходи, печалба и т.н. Параметрите, които се измерват с пропорционални скали се изразяват с числови стойности по такъв начин, че между числата да бъде спазена същата пропорция, каквато съществува между интензивността на признаците в самите обекти, независимо от използваните мерни единици. Например, масата може да се измерва с различни мащаби и единици – килограми, тонове, фунтове, унции, пудове, паунди и др.

Но, ако е установено, че масата на един обект е два пъти по-голяма от масата на друг с използване на една и съща мерна единица, то това отношение е валидно и при измерване с други мерни единици.

При всяко статистическо изследване се разглеждат един или няколко признака, свойствени за голяма група еднородни обекти (изделия, индивиди, събития).

Генерална съвкупност се нарича множеството от стойностите на разглеждания признак за всички изследвани (интересуващи ни) обекти.

В случаите, когато се изследва само една характеристика на обектите, обикновено множеството от измерванията се отъждествява със съвкупността на самите обекти и по този начин за генерална съвкупност се приема множеството на изследваните обекти. Така, по определение, генералната съвкупност се състои от всички индивиди, които са обект на дадено изследване.

Например, генералната съвкупност може да се състои от всички дванадесетокласници в страната, от всички имащи право на глас и т.н.

Обикновено генералната съвкупност се разглежда като множество с голям брой елементи, което може да бъде крайно или безкрайно. Ако множеството се състои от краен брой елементи, то техният брой се нарича **обем** на генералната съвкупност.

В повечето случаи не е възможно да се получат всички измервания (данни) за генералната съвкупност. Затова основен метод за изучаване на генералната съвкупност е изследването на една нейна част с цел да се получи информация за цялата съвкупност. Такава част от генералната съвкупност се нарича **извадка**.

Извадка се нарича всяко подмножество на генералната съвкупност. Броят на елементите в извадката се нарича **обем на извадката**.

Репрезентативна (представителна) извадка е тази, която отразява достоверно генералната съвкупност.

Ако изборът на елементите става по случаен начин, то извадката се нарича **случайна**. Случайните извадки с голям обем (по-голям от 30) се смятат за репрезентативни.

Когато обработваме числени статистически данни, всеки признак – (променлива) допуска количествена оценка. Затова можем да говорим за разпределение на случайна величина X с неизвестен закон на разпределение. Опитът, с който е свързана случайната величина X се състои в случаен избор на представител на генералната съвкупност, а стойността на X се определя от стойността на променливата за този представител. Правят се n независими опита (наблюдения, измервания), при които случайната величина X приема стойности $x_1, x_2, \dots, x_n$, които образуват извадка с обем n .

9.3. Първична обработка на данните

Нека е направена случайна извадка с обем n и са получени n на брой стойности от измерването на наблюдавания признак и по реда на получаването им те са: $x_1, x_2, \dots, x_n$. За тези данни се казва, че са в **негруппиран статистически ред**.

Вариационен ред на данните е подреденият във възходящ ред техен негруппиран статистически ред, например: $\hat{x}_1 \leq \hat{x}_2 \leq \dots \leq \hat{x}_n$.

Пример 9.1. Трудовият стаж (в години) на десет случайно избрани работника в една фирма е: 7, 14, 11, 17, 21, 15, 18, 20, 30, 15.

Вариационният ред на данните е: 7, 11, 14, 15, 15, 17, 18, 20, 21, 30.

Честотна таблица Често в данните за една извадка наблюдаваната променлива има повтарящи се стойности. Когато извадката е с голям обем е удобно да имаме по-компактно представяне на данните.

Честотната таблица представя всички получени стойности на наблюдаваната променлива с честотата на тяхното срещане. Нека $x_1, x_2, \dots, x_k$ са всички различни стойности, а n_i , за $i = 1, 2, \dots, k$ е честотата на срещане за всяко x_i . Очевидно $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Честотна таблица (или **таблица на абсолютните честоти**) се нарича таблица от вида:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Таблица на относителните честоти Нека $x_1, x_2, \dots, x_k$ са всички различни стойности на наблюдаваната променлива и $v_i = \frac{n_i}{n}$. Таблица на относителните честоти се нарича таблица от вида:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
v_i	v_1	v_2	$\dots$	v_k

Таблица на натрупаните (кумулятивни) честоти Нека $x_1, x_2, \dots, x_k$ са всички различни стойности на наблюдаваната променлива и $\gamma_i = \sum_{j=1}^i n_j$

.

Таблица на натрупаните (кумулятивните) честоти се нарича таблица от вида:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
γ_i	$\gamma_1 = n_1$	$\gamma_2 = n_1 + n_2$	$\dots$	$\gamma_k = n$

Таблица на натрупаните относителни честоти При горните означения нека $\eta_i = \frac{\gamma_i}{n}$. Таблица на натрупаните относителни честоти се нарича таблица от вида:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
γ_i	$\eta_1 = \frac{n_1}{n}$	$\eta_2 = \frac{n_1 + n_2}{n}$	$\dots$	$\eta_k = 1$

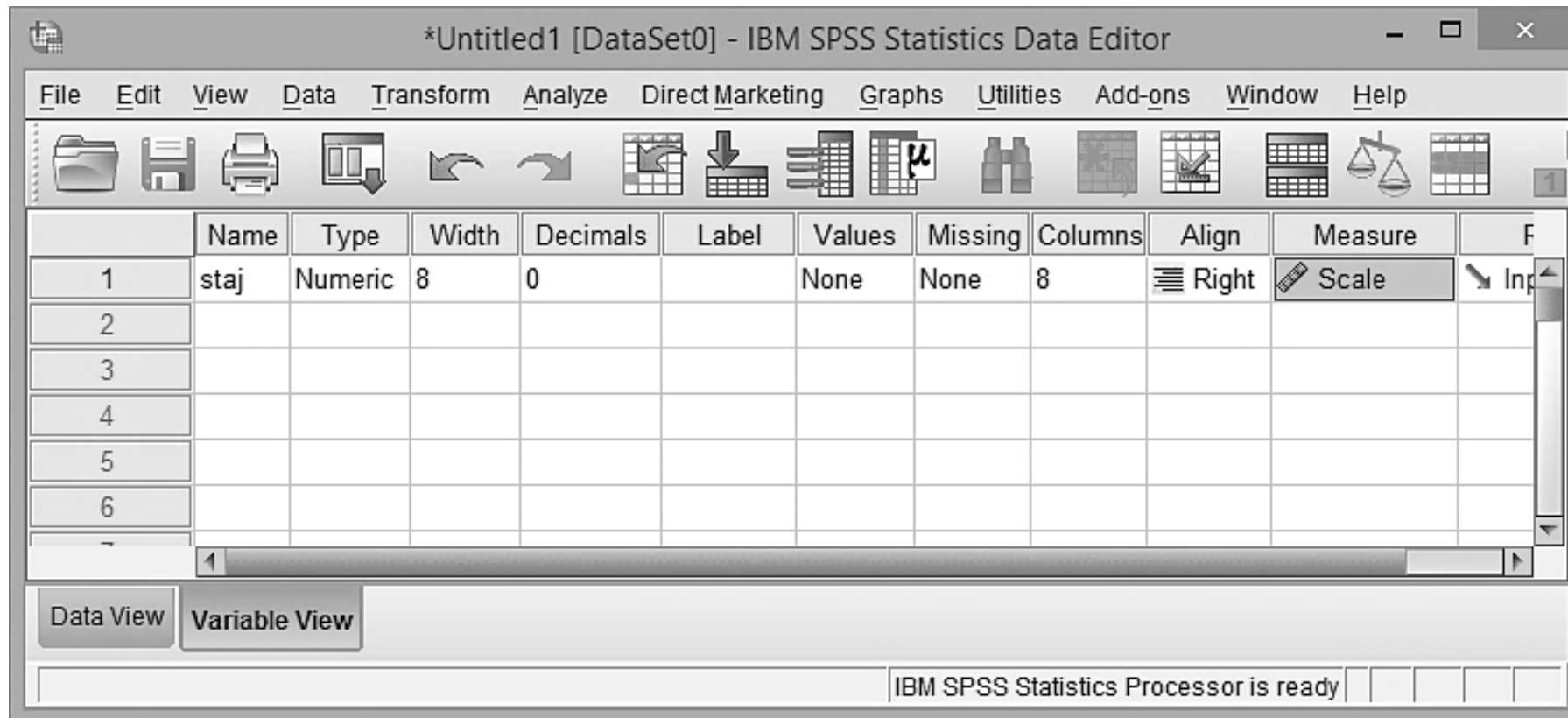
Пример 9.2. Трудовият стаж в години на 22 работника във фирма е: 12, 14, 12, 11, 14, 17, 11, 7, 15, 15, 14, 17, 11, 7, 12, 14, 12, 14, 11, 7, 14, 12.

Таблиците на абсолютните, относителните, кумулативните и натрупаните кумулативни честоти на данните са:

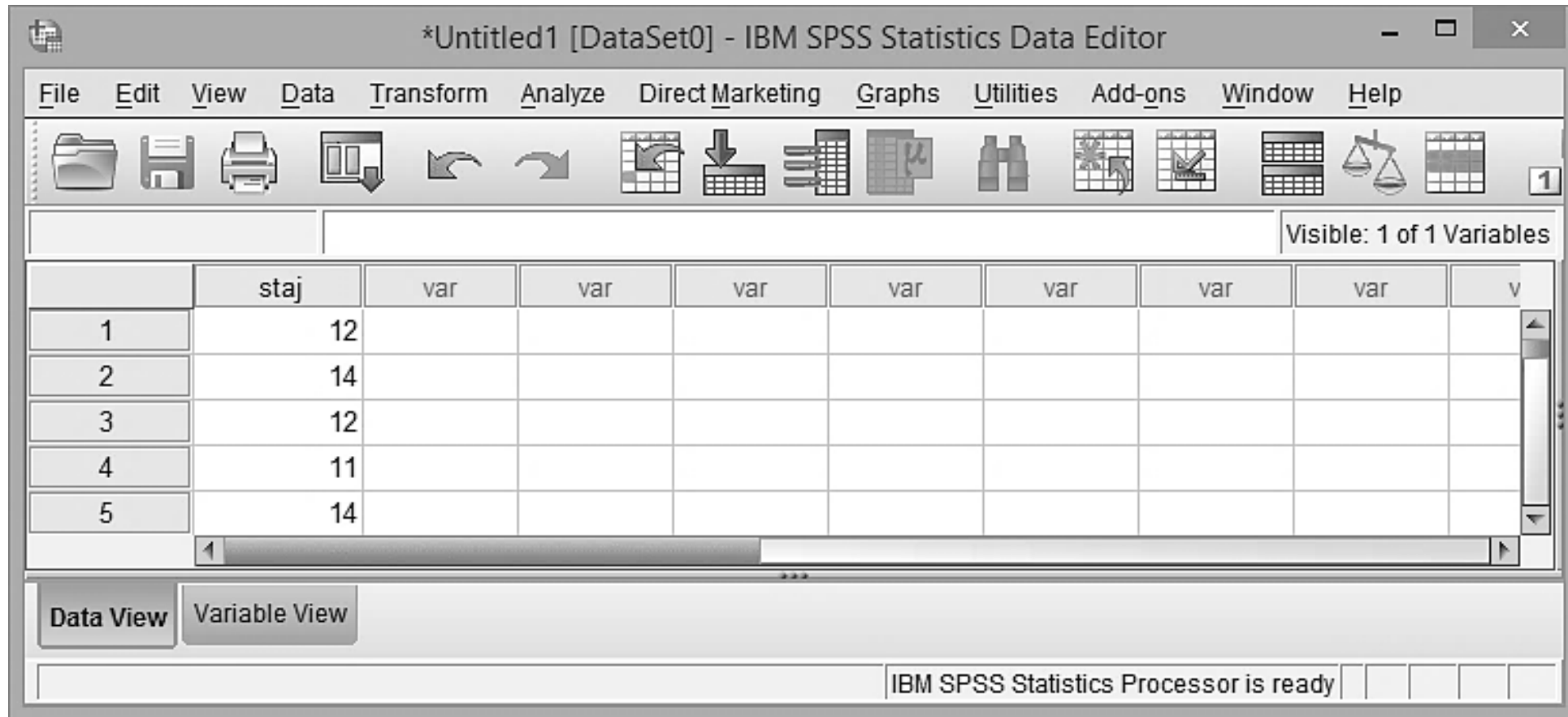
x_i	7	11	12	14	15	17
n_i	3	4	5	6	2	2
ν_i	$\frac{3}{22} = 0,136$	$\frac{4}{22} = 0,182$	$\frac{3}{22} = 0,227$	$\frac{6}{22} = 0,273$	$\frac{2}{22} = 0,091$	$\frac{2}{22} = 0,091$
γ_i	3	7	12	18	20	22
η_i	$\frac{3}{22} = 0,136$	$\frac{7}{22} = 0,318$	$\frac{12}{22} = 0,545$	$\frac{18}{22} = 0,818$	$\frac{20}{22} = 0,909$	$\frac{22}{22} = 1$

Обработка на данни с използване на софтуерния пакет IBM SPSS

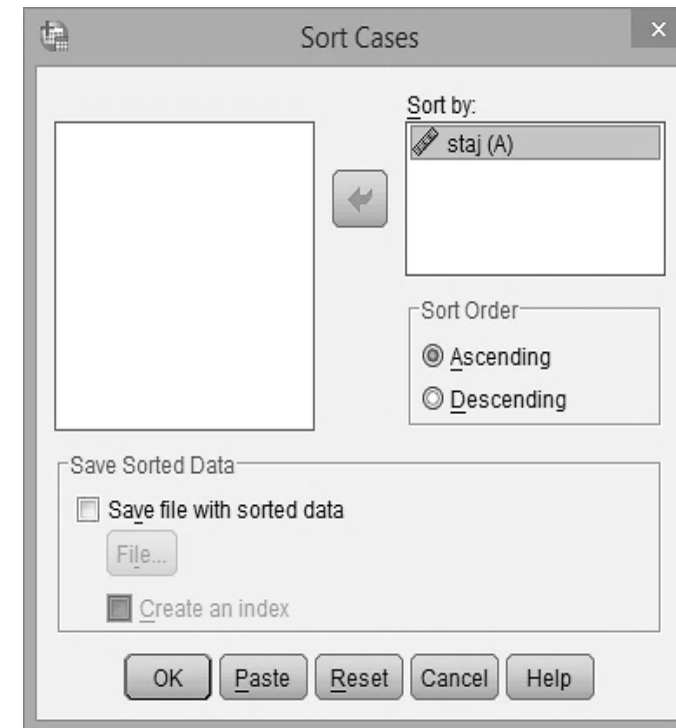
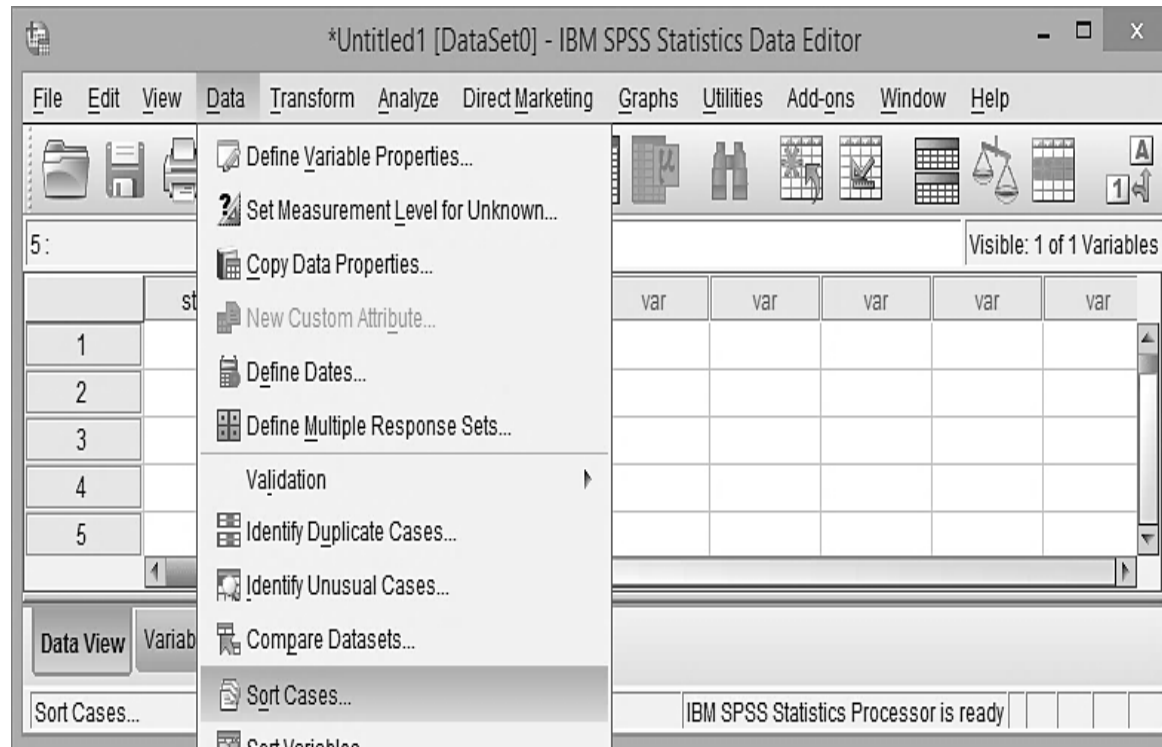
При стартиране на SPSS в прозореца от долния десен ъгъл избираме *Variable View*, за да въведем името на променливата, типа ѝ, броя на знаците след десетичната запетая и др.



В прозореца *Data View*, в първата колона е въведеното от нас име на променливата – **staj** и може да въведем данните.



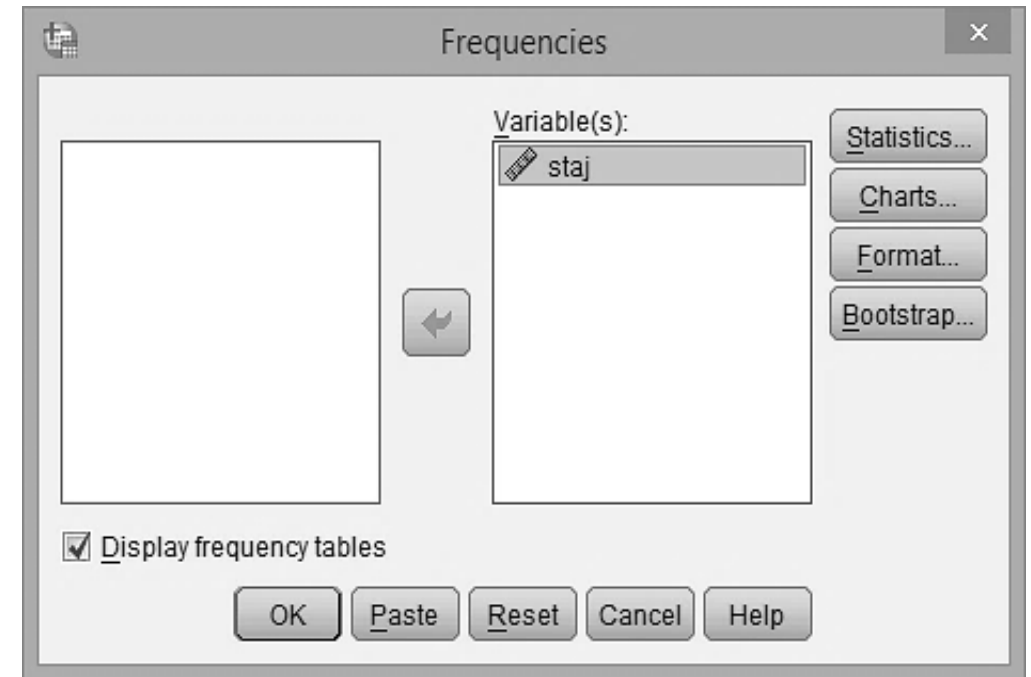
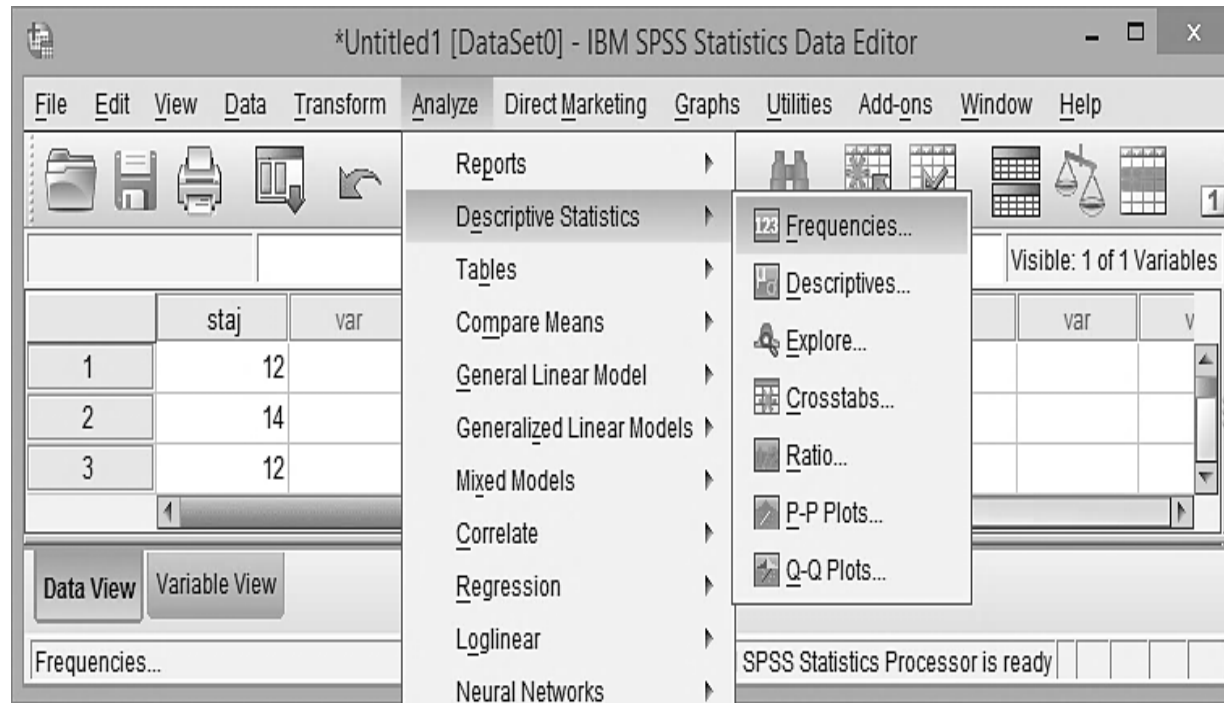
- Вариационен ред в SPSS: *Data* → *Sort Cases*



В прозореца *Sort by* избираме променливата, на която търсим вариационен ред и след **OK** получаваме подредените данни.

Честотна таблица, таблица на относителните честоти и на натрупаните (кумулятивни) относителни честоти в SPSS:

- *Analyze* → *Descriptive Statistics* → *Frequencies*



SPSS работи с два прозореца *Data Editor* за дефиниране, въвеждане, редактиране на данни и запазване на някои междинни резултати и *Viewer* за отпечатване на резултатите от статистическата обработка – таблици, графики и др.

В прозореца *Viewer* получаваме следната таблица:

Staj		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	7	3	13,6	13,6	13,6
	11	4	18,2	18,2	31,8
	12	5	22,7	22,7	54,5
	14	6	27,3	27,3	81,8
	15	2	9,1	9,1	90,9
	17	2	9,1	9,1	100,0
	Total	22	100,0	100,0	

Колоната *Frequency* представлява честотната таблица, колоната *Percent* е таблицата на относителните честоти (умножени по 100 – защото е в проценти (%)), а колоната *Cumulative Percent* е таблицата на натрупаните относителни честоти в %.

Групиран статистически ред Използва се, когато данните са много. Тогава вариационният ред се разделя на интервали, обикновено с равни дължини. Броят на подинтервалите k може да се намери от неравенството $\min k : 2^k > n$. Определят се средите на получените интервали – m_i . Построява се таблица на групирания статистически ред, като на първия ред се записват стойностите на m_i , а на втория – честотите, т.е. броят на данните, които се намират в дадения подинтервал.

m_i	m_1	m_2	...	m_k
f_i	f_1	f_2	...	f_k

Пример 9.3. Трудовият стаж в години на 60 случайни работника от една фирма е: 7, 14, 11, 17, 17, 21, 15, 15, 18, 11, 15, 16, 20, 14, 25, 25, 35, 27, 24, 24, 31, 28, 33, 25, 28, 33, 24, 7, 13, 21, 16, 22, 23, 28, 23, 27, 27, 31, 34, 34, 37, 41, 20, 41, 13, 20, 20, 25, 30, 22, 22, 34, 31, 34, 24, 29, 34, 36, 8, 37. Да се състави групиран статистически ред на данните.

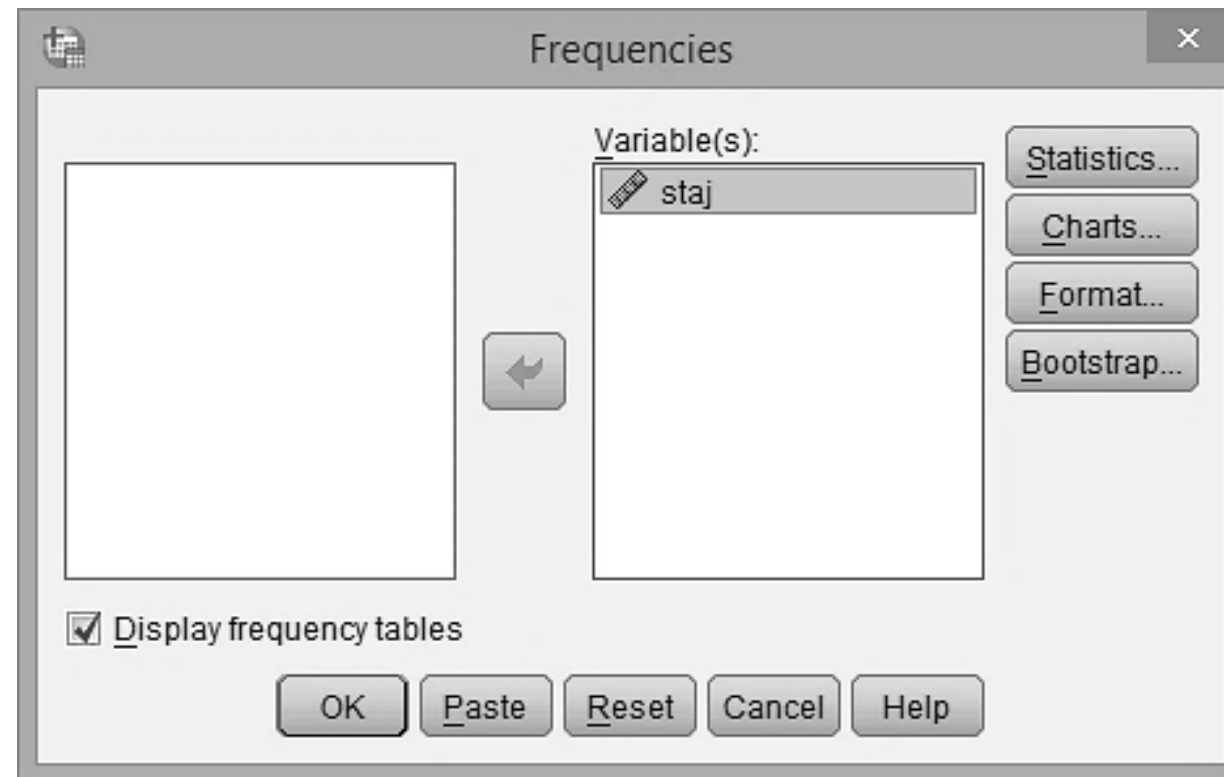
Броят на данните е $n = 60$. Избираме брой подинтервали $k = 6$ ($2^6 > 60$). Дължината на интервалите определяме по следният начин

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{41 - 7}{6} = 5,666 \approx 6, \text{ т.е. } h = 6.$$

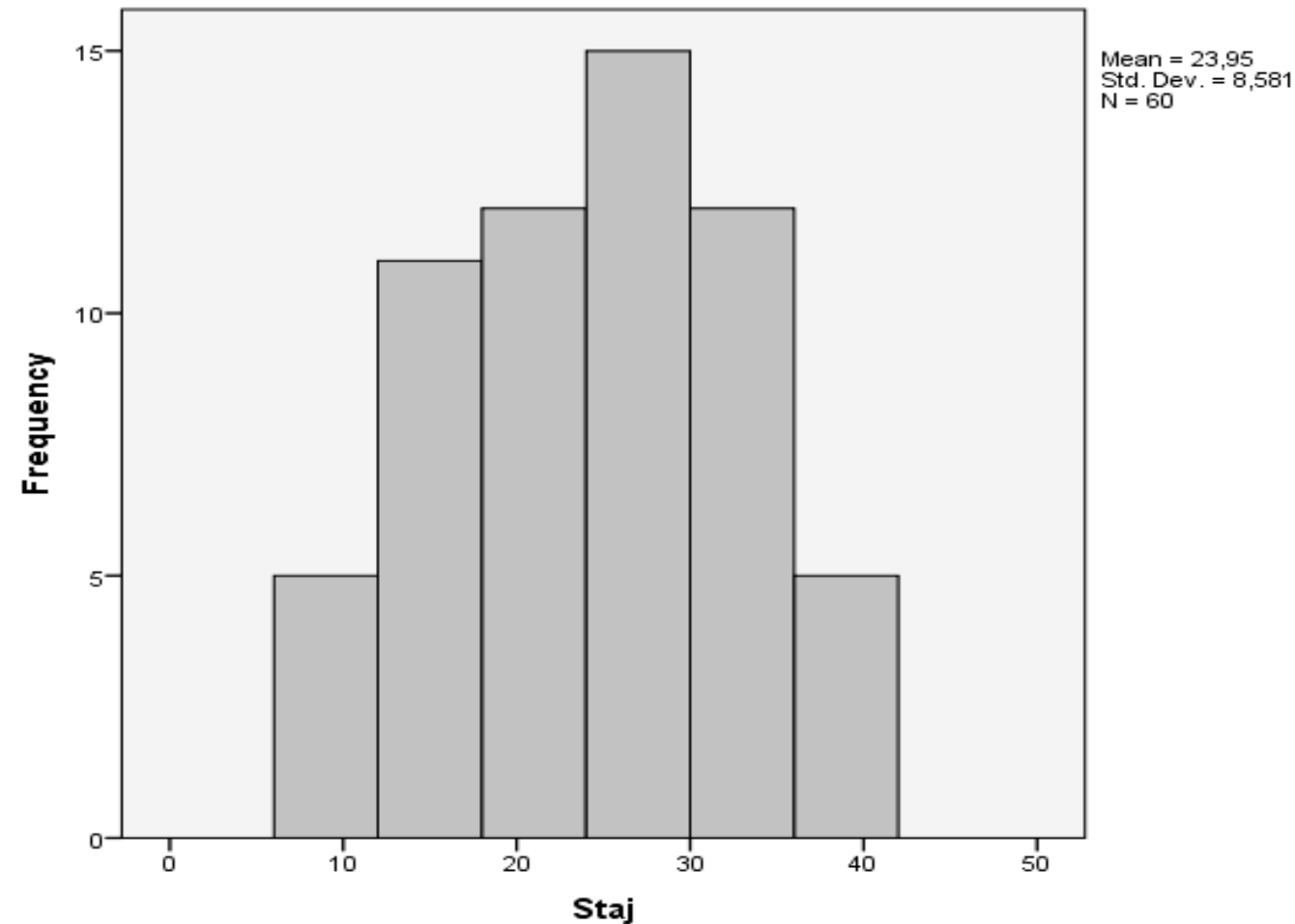
интервал	(6,12]	(12, 18]	(18, 24]	(24, 30]	(30, 36]	(36, 42]
m_i	9	15	21	27	33	39
f_i	5	11	12	15	12	5

Хистограма Групираният статистически ред се използва за построяване на хистограма на данните. Визуализацията представлява правоъгълници с еднаква ширина h и височина – честотата на данните. Видът на хистограмата се влияе съществено от избраната ширина на интервала.

- Хистограма в SPSS: *Graphs* → *Legacy Dialogs* → *Histogram*.



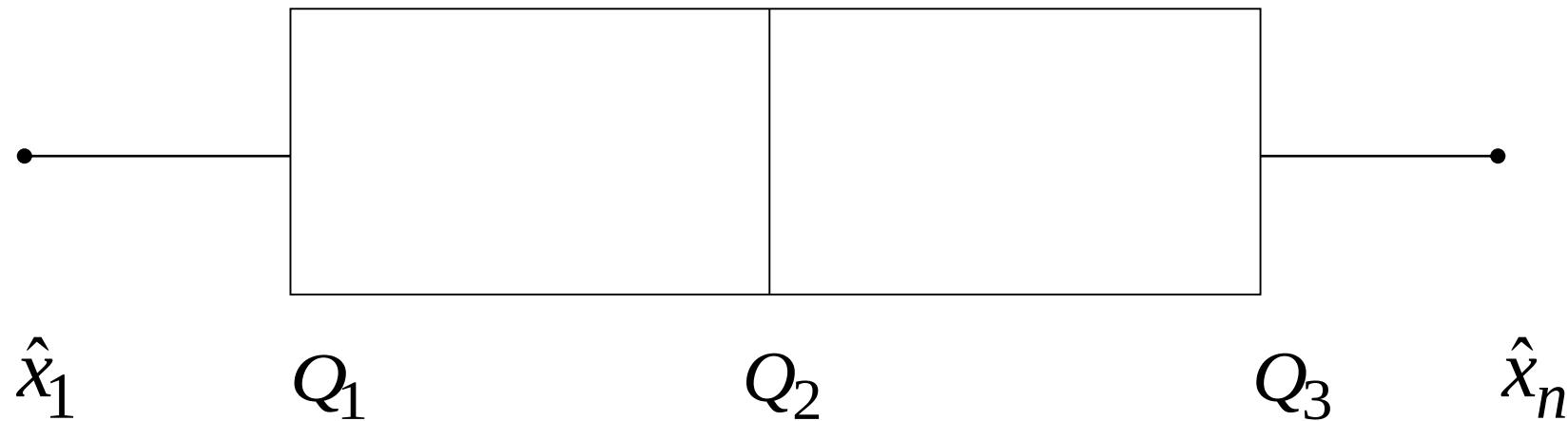
С двоен клик върху графиката на получената хистограма може да променяме дължините на интервалите или техния брой, както и да избираме други параметри – цвят, надписи и т.н.



Фиг. 9.1. Хистограма на данните от Пример 9.2.

Бокс-плот Квантил от ред p ($0 < p < 1$) се нарича числото x_p , за което $100.p\%$ от извадката са по-малки от него.

Най-често се пресмятат $x_{0,25}$, $x_{0,50}$, $x_{0,75}$ квантили, които се наричат съответно първи, втори и трети квантил на разпределението и се означават с Q_1 , Q_2 , Q_3 . Диаграма от вида на Фиг. 9.2 се нарича бокс-плот на данните.



Фиг. 9.2. Бокс-плот.

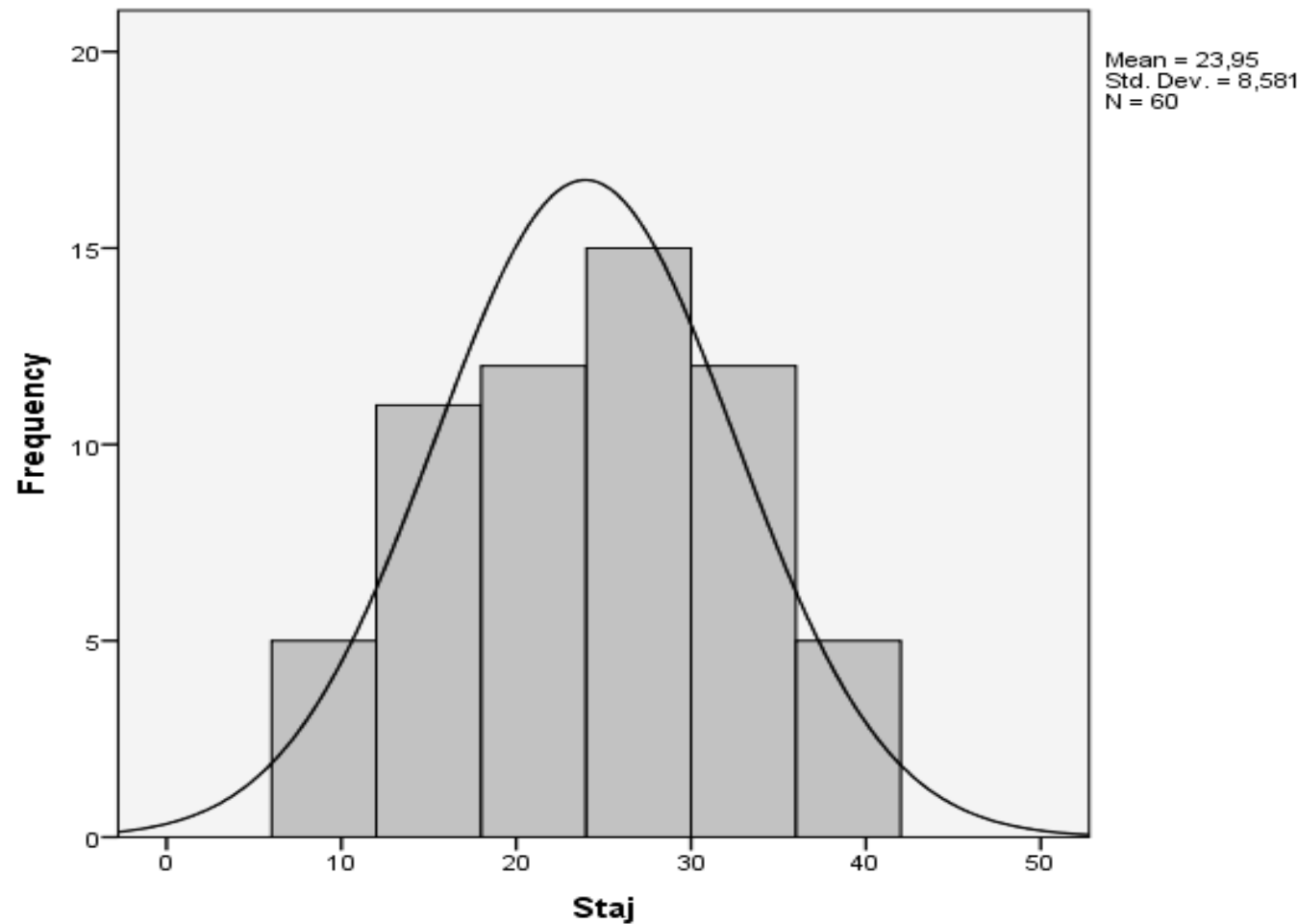
Нарича се още „кутия с мустаци“, на която дължината на „левия мустак“ е 25% от данните от началото на вариационния ред, а „десния мустак“ са последните 25 % от данните във вариационния ред.

- Получаване на бокс-плот в SPSS: *Graphs → Legacy Dialogs → Boxplot:*
☒ *Simple* ☐ *Summaries of separate variables → Define*

Графичните визуализации на данни обикновено служат за ориентир за това дали извадката е взета от нормално разпределена генерална съвкупност.

Хистограмата може да бъде сравнена с нормалната крива. Близостта до нормалната крива показва и бокс-плота на данните, когато е относително симетричен. С бокс-плота на данните може да се види и дали има данни, които значително се отклоняват от стойностите на извадката.

В SPSS, хистограмата може да се получи и от: *Analyze* → *Descriptive Statistics* → *Explore* → *Plots*: ☒ *Histogram*; ☒ *Normality plots with tests* → *Continue* → *OK*.



Фиг. 9.3. Хистограма на данните от Пример 9.2. с нормалната крива.

9.4. Точкови оценки

Предполагаме, че разглежданата като случайна величина променлива (числова характеристика) на генералната съвкупност е нормално разпределена със средно μ и стандартно отклонение σ .

$\bar{x}$ и s .

Извадково средно $\bar{x}$ (средно аритметично на извадката) е оценка на математическото очакване μ на генералната съвкупност (ГС) и се пресмята по следния начин:

- за вариационен ред $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$;
- за статистически ред: $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n}$
- за групиран статистически ред: $\bar{x} = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_k f_k}{n}$

Медиана на извадката (Md) е число, представляващо $0,5$ -тия квантил на извадката, т.е. 50% от данните в извадката са по-малки от нея и 50% са по-големи. Извадковата медиана е оценка на медианата на ГС.

Мода на извадката (Mo) е най-често срещаната стойност в извадката, т.е. тази стойност x_i , за която в честотната таблица съответната ѝ честота n_i е най-голяма.

Размах (ранг) на извадката е разликата между най-голямата и най-малката стойност във вариационния ред, т.е. $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Извадковата дисперсия (s^2) е оценка на дисперсията на ГС и се пресмята по следния начин:

- за вариационен ред:
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2;$$

- за статистически ред: $s^2 = \frac{1}{n_1 + \dots + n_k - 1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2$
- за групиран статистически ред: $s^2 = \frac{1}{f_1 + \dots + f_k - 1} \sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{x})^2$

Стандартното отклонение (s) на извадката е оценка на стандартното отклонение на ГС $s = \sqrt{s^2}$.

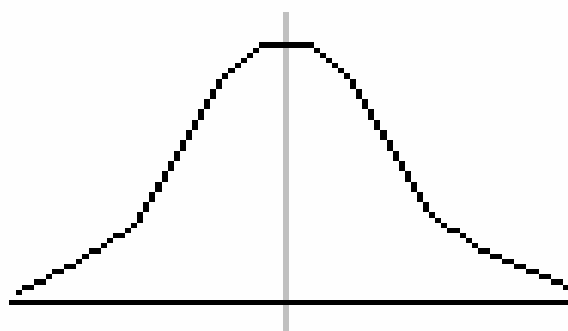
Извадков коефициент на асиметрия (Skewness, Sk) дава представа за симетричността на разпределението. Пресмята се по следния начин:

- за вариационен ред: $Sk = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$

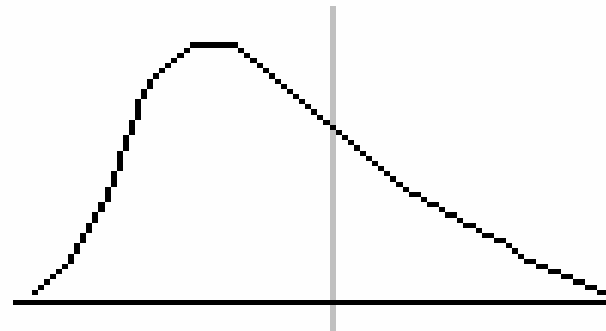
- за статистически ред: $Sk = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$

- за групиран статистически ред: $Sk = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$

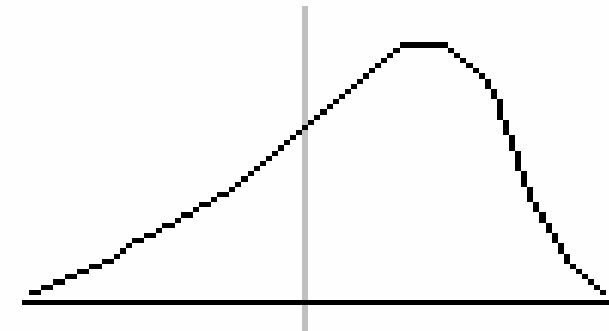
От знака на Sk се съди за симетричността на разпределението.



$Sk = 0$
симетрично



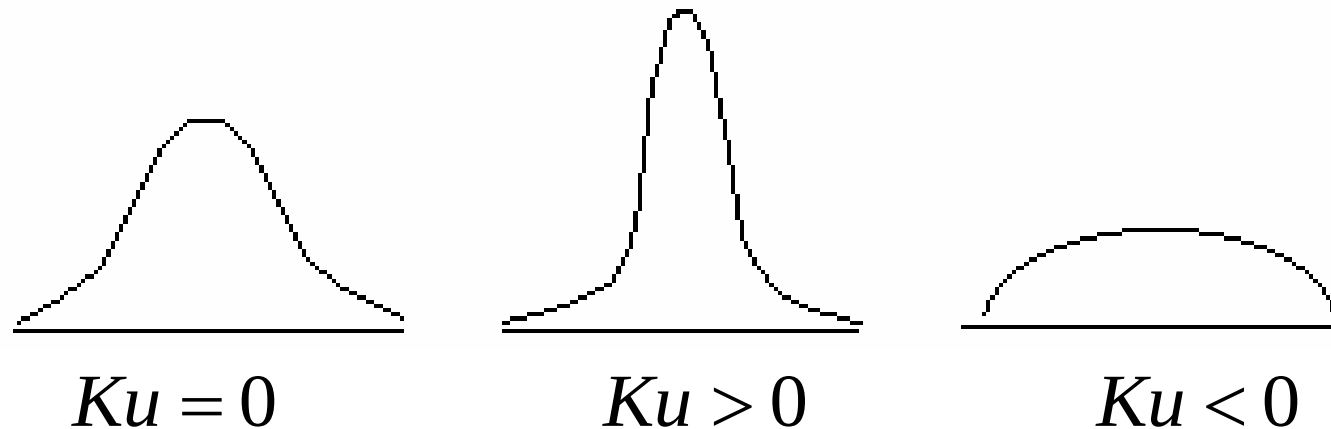
$Sk > 0$
дясно
асиметрично



$Sk < 0$
ляво
асиметрично

Извадков коефициент на ексцес (Kurtosis, Ku) – Ексцесът е мярка, която определя степента на издигнатост или сплеснатост на разпределението спрямо нормалната крива.

- За вариационен ред
$$Ku = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^4}{s^4} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$



Нормалното разпределение е симетрично, т.е. $Sk = 0$. Ексцесът на нормалното разпределение също е нула, $Ku = 0$.

Пример 9.4. Да се намерят числовите характеристики на данните от Пример 9.2.

Размахът на извадката е $R = 17 - 7 = 10$. Извадковото средно:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n} = \frac{7.3 + 11.4 + 12.5 + 14.6 + 15.2 + 17.2}{22} = 12,41$$

Модата на данните е $Mo = 14$. Извадковата дисперсия пресмятаме по формулата за групирани статистически ред:

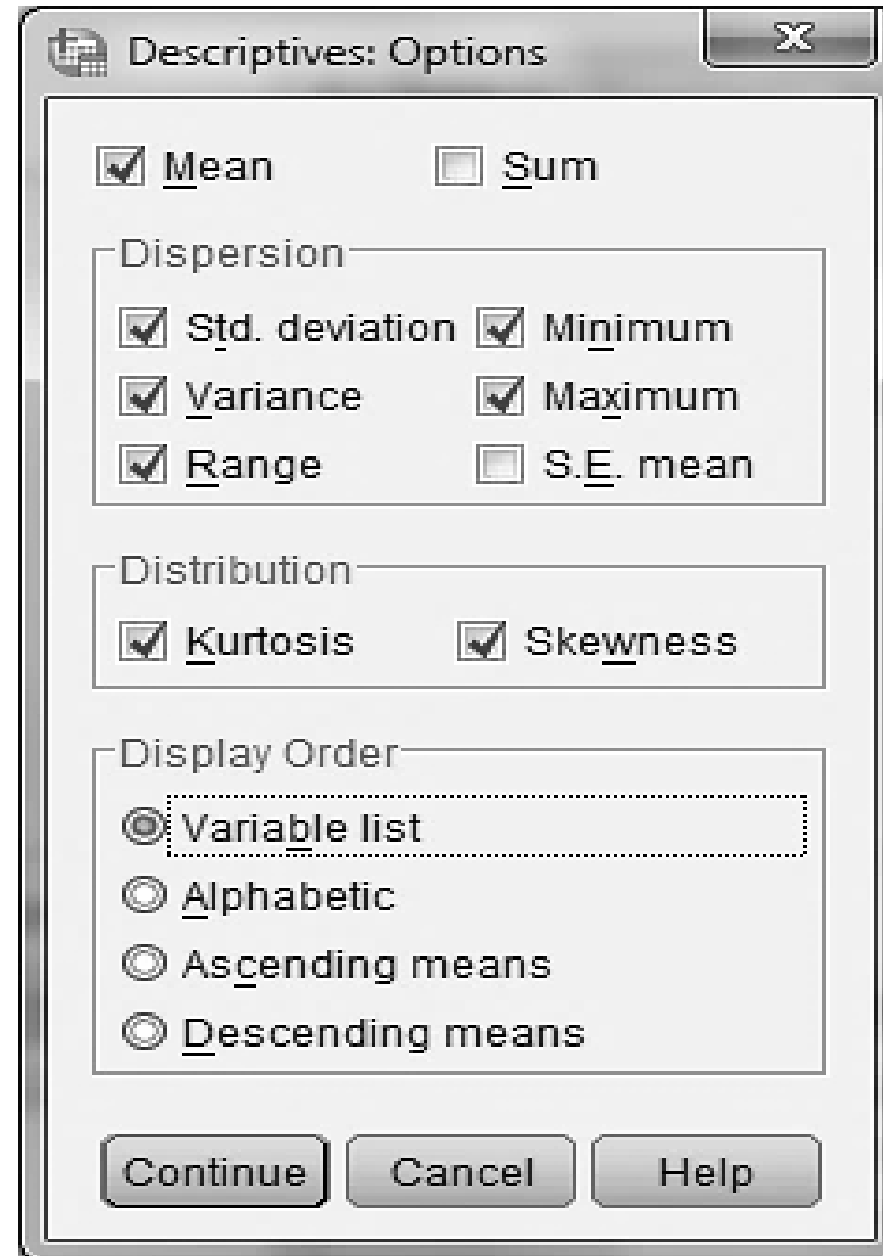
$$s^2 = \frac{1}{n_1 + \dots + n_k - 1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = 7,968.$$

За извадковото стандартно отклонение получаваме:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{7,97} = 2,823. Sk = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^3}{s^3} = -0,545, \text{ т.е.}$$

разпределението е ляво асиметрично, както се вижда и от Фиг. 9.2.

- В SPSS: *Analyze*
Descriptive Statistics
Descriptives → *Options*:



Резултатите са в следната таблица:

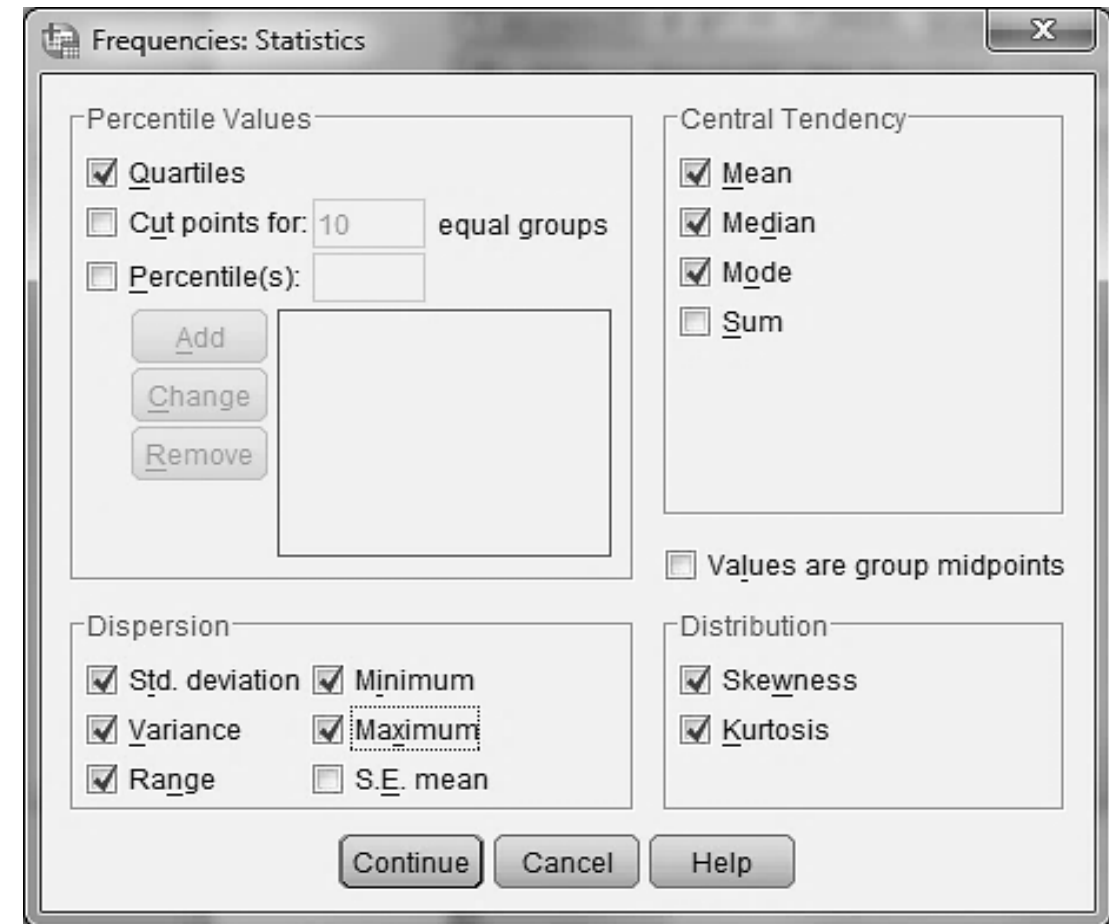
	N	Range	Mean	Std. Deviation
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic
staj	22	10	12,41	2,823
Valid N	22			

Variance	Skewness		Kurtosis
Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic
7,968	-,545	,491	,115

Обемът на извадката е $N = 22$, рангът е $R = 10$, извадкото средно (Mean) е $\bar{x} = 12,41$, извадковото стандартно отклонение (Std. Deviation) е $s = 2,823$, извадковата дисперсия (Variance) е $s^2 = 7,968$.

Извадковият коефициент на асиметрия (Skewness) е $Sk = -0,545$, т.е. разпределението е ляво асиметрично, извадковият коефициент на ексцес (Kurtosis) е $Ku = 0,115$.

В *SPSS* числовите характеристики на данните могат да бъдат получени и от други менюта, например: *Analyze* → *Descriptive Statistics* → *Frequencies* → *Statistics*. Тук сме отбелязали Quartiles, т.е. ще получим 0,25, 0,5 и 0,75 квантил на извадковите резултати, а именно: $Q_1 = 11$, $Q_2 = 12$, $Q_3 = 14$.



9.5. Интервални оценки

За неизвестните параметри μ и σ на генералната съвкупност в §9.4. показвахме как се пресмятат точковите оценки $\bar{x}$ и s . Те са приблизителни стойности на параметрите, които оценяват, но грешката на приближението е неизвестна.

Интервалната оценка представлява реален подинтервал от реалната права, който с достатъчно голяма надеждност съдържа истинската стойност на оценявания параметър.

Интервалът (L_1, L_2) се нарича $100.\gamma\%$ доверителен интервал за средното μ на генералната съвкупност, ако $P(L_1 < \mu < L_2) = \gamma$.

Стандартно доверителната вероятност е $\gamma = 0,95$. Но могат да се търсят доверителни интервали с $\gamma = 0,90$, $\gamma = 0,98$ и т.н.

Доверителен интервал за математическото очакване μ с доверителна вероятност γ по извадка с обем n се пресмята по следния начин:

- ако параметърът σ на ГС е известен, $100.\gamma\%$ ДИ за μ е интервалът:

$$\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$
 където $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ е $\frac{1+\gamma}{2}$ квантилът на стандартното нормално разпределение.

- ако параметърът σ на ГС е неизвестен, $100.\gamma\%$ ДИ за μ е интервалът:

$$\left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$
 където $t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ е $\frac{1+\gamma}{2}$ квантил на t -разпределението с $n-1$ степени на свобода (виж Приложение 3).

За всички извадки с фиксиран обем n съществува специфично t -разпределение, което е свързано с базовото понятие **степени на свобода**. Степените на свобода могат да се дефинират като броя на стойностите на случайна величина, които могат свободно да варират, без да се променя дадена обща характеристика. Така степените на свобода се определят като броя на измерванията в извадката минус броя на ограниченията, наложени на тях. В общия случай за извадка с обем n броят на степените на свобода е $n - 1$.

Пример 9.5. Направена е 33 дневна извадка за закъсненията (в мин.) на международния влак Истанбул – София, пристигащ на гара София. Да се намери 95% доверителен интервал за средното годишно закъснение: 10, 5, 3, 4, 3, 11, 5, 2, 11, 10, 5, 3, 1, 5, 5, 2, 9, 2, 13, 14, 14, 9, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 4, 3, 12, 7, 6.

Въвеждаме данните в SPSS и пресмятаме $\bar{x} = 6,24$ и $s = 3,83$. Търсим $\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$ квантила на t -разпределението на Стюдънт.

Може да го намерим от Приложение 3 или с *Wolfram Mathematica*: `Quantile[StudentTDistribution[32],0.975]`, получаваме $t_{0,975;32} = 2,036$.

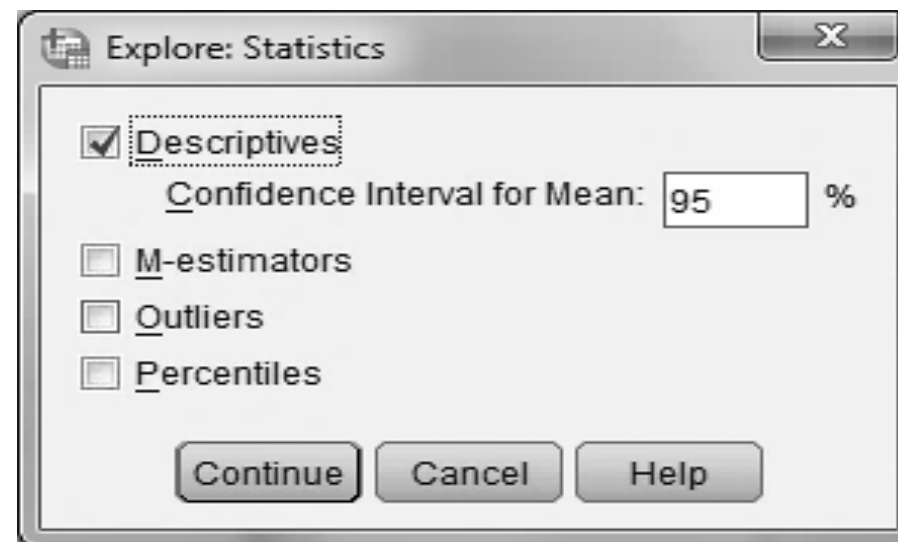
Пресмятаме

$$\bar{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,24 - 2,036 \frac{3,83}{\sqrt{33}} = 4,89$$

$$\bar{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,24 + 2,036 \frac{3,83}{\sqrt{33}} = 7,597.$$

Получаваме, че 95% ДИ за μ е интервалът (4,89; 7,597)

- В SPSS: *Analyze* → *Descriptive Statistics* → *Explore* → *Statistics:* ☒ *Descriptives*



Descriptives

	Statistic		
time	Mean	6,24	
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	4,89
		Upper Bound	7,60
	Std. Deviation	3,825	

Стандартно се търси 95% доверителен интервал.

Нека намерим 98% ДИ за средното закъснение на влака.

Пресмятаме $\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0,98}{2} = 0,99$ и $t_{0,975;32} = 2,448$

$$\bar{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,24 - 2,448 \frac{3,83}{\sqrt{33}} = 4,61$$

$$\bar{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 6,24 + 2,448 \frac{3,83}{\sqrt{33}} = 7,87.$$

Получаваме, че 98% ДИ за μ е интервалът (4,61; 7,87).

9.6. Корелационен анализ

Главната задача на статистическите анализи е установяване на количествени връзки от статистически характер между наблюдаваните величини.

Корелация е математически термин, с който в общ смисъл се означава мярка за стохастична (вероятностна, нефункционална) зависимост между случайни величини.

Високата корелация между две величини не предполага задължително наличие на причинно-следствена връзка между тях.

Например, измерванията в група градове на процента безработни и процента ученици в гимназиален клас могат да разкрият високи нива на корелация между двете величини, но това е отражение на броя на жителите във всеки град върху всяка от двете измервани величини и не означава зависимост между тях.

Корелационният анализ се прилага за установяване наличието на връзка между променливи величини и за измерване на силата и посоката на тази връзка.

Да разгледаме основния случай на две величини X и Y . Извадката трябва да включва едновременно наблюдения (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $\dots$, (x_n, y_n) , които обикновено се представят в таблица:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_n

В този случай казваме, че е дадено **съвместното разпределение** на X и Y . Ако съвместното разпределение на метричните величини X и Y е нормално, статистическата корелационна зависимост между тях, се изразява т.н. извадков коефициент на линейна корелация или още извадков **корелационен коефициент на Пирсън** и се означава с r .

Извадковият коефициент r се пресмята по формулата:

$$SSx = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}, \quad SSy = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}$$

$$SSxy = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n}.$$

$$r = \frac{SSxy}{\sqrt{SSx} \sqrt{SSy}} - \text{корелационен коефициент.} \quad (9.1)$$

Това, че взаимна връзка между X и Y в се изразява с едно единствено число се явява един от многото благоприятни факти, които правят статистическите модели сравнително лесни за прилагане в сложни ситуации.

Пресметнатият по формулата коефициент е точкова оценка за теоретичния (популационния) коефициент на корелация ρ .

Двете величини X и Y са статистически независими, когато са разпределени независимо, т.е. когато разпределението на едната не съдържа информация за разпределението на другата. Статистическата независимост означава, че по наблюденията над едната променлива не можем да правим заключения за поведението на другата променлива.

Статистическата независимост има взаимен характер. При нормално съвместно разпределение независимостта означава, че популационният коефициент на линейна корелация ρ е равен на нула.

Това, разбира се, не означава, че извадковият коефициент r ще бъде винаги равен на нула, понеже във всяка извадка винаги има елементи на случайност. Затова се прилагат тестове за проверка на хипотези. Ако обаче $\rho = 0$, то с нарастване обема на извадката стойностите на r ще се стремят към нула. Така ние изследваме зависимостта, отнесена към популациите, а данните от извадката служат за нейното оценяване.

Коефициентите на линейна корелация ρ и r представляват числа между -1 и 1 , като самите крайни стойности -1 и 1 на практика не се достигат. Линейният коефициент на корелация представлява индикатор за линейната статистическа зависимост между величините, която зависимост се характеризира с посока и сила. По тази причина корелационният коефициент се интерпретира по знак и абсолютна стойност. Знакът „+“ означава наличие на право пропорционална връзка – нарастването при едната променлива е свързано с нарастване при другата.

Знакът „–“ означава наличие на обратно пропорционална връзка – нарастването при едната променлива е свързано с намаляване при другата. Колкото е по-голяма абсолютната стойност на корелационния коефициент (максимална абсолютна стойност 1), толкова е по-силно изразена съответната връзка.

Корелационният коефициент се интерпретира в четири категории: слаб, среден, висок и много висок.

- $0,7 < |r| < 1$ – много висока корелация;
- $0,5 < |r| \leq 0,7$ – висока корелация;
- $0,3 < |r| \leq 0,5$ – средна корелация;
- $0,1 < |r| < 0,3$ – слаба корелация.

Линейните преобразования и на двете променливи (с положителни множители) не променят стойността на корелационния коефициент, което всъщност представлява неговото най-важно математическо свойство.

Пример 9.6. За производство на химически продукт са получени следните данни за зависимостта на изходния продукт Y (кг/ч) от температурата на реакция X ($^{\circ}\text{C}$). Да се изследва има ли статистическа зависимост между X и Y и да се оцени значимостта на извадковия корелационен коефициент с ниво на значимост $\alpha = 0,05$.

X	28	35	40	29	53	58	65	75
Y	5,3	20,7	21,7	9,2	55,4	64,3	79,1	101

Решение. Построяваме таблицата, изчисляваме сумите и заместяваме във формулите за r .

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	28	5,3	784	28,09	148,4
2	35	20,7	1225	428,49	724,5
3	40	21,7	1600,0	470,89	868,0
4	29	9,2	841	84,64	266,8
5	53	55,4	2809	3069,16	2936,2
6	58	64,3	3364	4134,49	3729,4
7	65	79,1	4225	6256,81	5141,5
8	75	101,0	5625	10201,00	7575,0
Сума	383	356,7	20473	24673,57	21389,8

По формули (9.1) пресмятаме:

$$SSx = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n} = 204473 - \frac{383.383}{8} = 2136,875$$

$$SSy = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n} = 24673,57 - \frac{356,7.356,7}{8} = 8769,20875$$

$$SSxy = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n} = 4312,7875$$

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_x} \sqrt{SS_y}} = \frac{4312,7875}{\sqrt{2136,875} \cdot \sqrt{8769,20875}} = 0,996$$

За получената стойност на извадковия корелационен коефициент $r = 0,996$ може да предположим, че между X и Y има силна корелационна зависимост, но само това не е достатъчно.

Проверка за значимост След определянето на корелационния коефициент r се прави проверка за неговата статистическа значимост. При предположение за нормално разпределени ГС: $X \in N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \in N(\mu_2, \sigma_2)$ се разглеждат хипотезите:

$H_0 : \rho = 0$, т.е. няма корелационна зависимост между X и Y ;

$H_1 : \rho \neq 0$, т.е. има корелационна зависимост между X и Y .

За проверката на тези хипотези се използва t -статистиката по разпределението на Стюдънт в следните стъпки:

1. Пресмята се величината $t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = 27,2876;$

2. По избрано ниво на значимост $\alpha = 0,05$ се намира $t_{\text{критично}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$

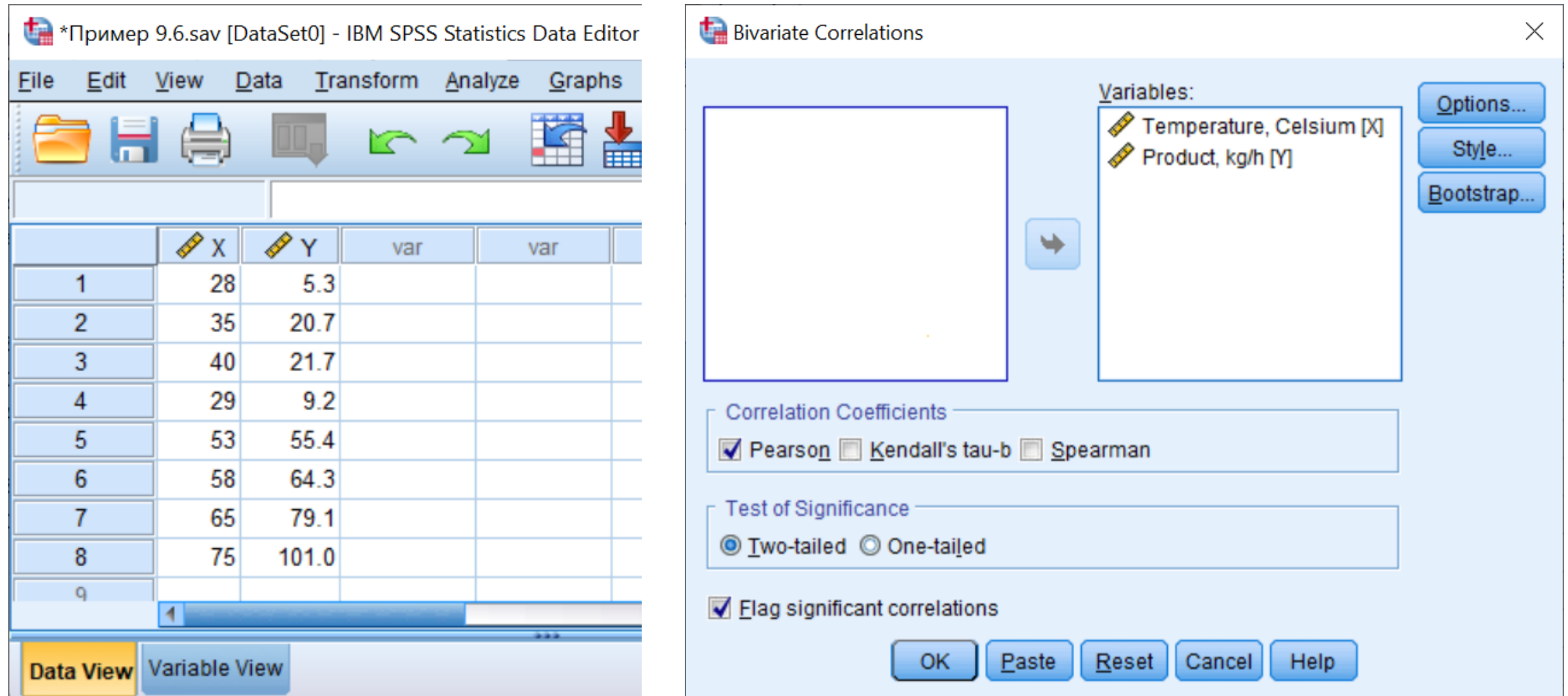
3. **Решаващо правило:** Ако $|t| > t_{кр.}$ се отхвърля основната хипотеза H_0 и се приема, че X и Y са корелационно зависими. Ако $|t| < t_{кр.}$, то се приема, че X и Y са корелационно независими.

За разглеждания от нас пример пресмятаме $t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = 27,3039.$

Пресмятаме $t_{\text{критично}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{0,975;6} = 2,447$.

Тъй като $t > t_{кр.}$, отхвърляме нулевата хипотеза $H_0 : \rho = 0$ и заключаваме, че съществува статистически значима корелационна зависимост между X и Y с ниво на значимост $\alpha = 0,05$.

- В SPSS въвеждаме данните и провеждаме корелационен анализ: *Analyze* → *Correlate* → *Bivariate*.
- В прозореца *Variables* се подават променливите *Temperature[X]* и *Product[Y]*.
- За количествени променливи в интервална скала обикновено се използва корелационният коефициент на Пиърсън (Pearson).



Фиг. 9.3. Работен прозорец на SPSS за корелационен анализ.

В резултат получаваме следната таблица, наречена корелационна матрица. Тя показва корелационните коефициенти на всеки две от подадените променливи. Затова матрицата има стойност единица по главния диагонал и е симетрична относно него. По тази причина разглеждаме коефициентите под или над главния диагонал.

Correlations

		Temp	Product
Temperature, Celsius	Pearson	1	,996**
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)		,000
	N	8	8
Product, kg/h	Pearson	,996**	1
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)	,000	
	N	8	8

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

За проверка на значимостта на корелационния коефициент най-важната информация, която трябва да се анализира е дадена в стойността Sig. (статистическа значимост), която е p -стойността на теста за проверка на нулевата хипотеза $H_0: \rho = 0$ - че няма корелационна зависимост между X и Y . Правило за приемане или отхвърляне на H_0 при ниво на значимост $\alpha = 0,05$: Ако $\text{Sig.} < \alpha$, извадковият корелационен коефициент r е статистически значим. Ако $\text{Sig.} \geq \alpha$, то извадковият корелационен коефициент r е статистически незначим.

За разглежданият пример $\text{Sig.} = 0,000 < 0,05$ и може да направим извода, че между изходния продукт Y (кг/ч) и температурата на реакция X ($^{\circ}\text{C}$) има силна статистически значима корелационна зависимост.

9.7. Линеен регресионен анализ

Този вид статистически анализ е предназначен да даде количествен израз на ефектите на дадена група метрични променливи $X_1, X_2, \dots, X_k$, които условно се наричат **независими** (independent) върху друга променлива Y , която условно се нарича **зависима** (dependent). Независимите променливи се наричат също **фактори** или **предиктори**.

Търсим функционална връзка от вида:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad (9.2)$$

която по статистически обоснован начин дава израз на ефектите на отделните независими променливи върху зависимата променлива Y . Уравнението (9.2) се нарича **уравнение на регресия** на Y .

Когато взаимното популационно разпределение на всичките променливи е нормално, може да се търси линейно регресионно уравнение (линеен регресионен модел):

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k, \quad (9.3)$$

където $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ са коефициенти на уравнението.

Тези коефициенти лесно се интерпретират по знак. Ако например $a_i > 0$, то нарастването на X_i води до нарастване на Y , ако $a_j < 0$, то нарастването на X_j води до намаляване на Y . По-големите по абсолютна стойност коефициенти са свързани с по-голяма промяна при зависимата променлива. В регресионния модел коефициентът a_i измерва степента на изменение на Y в зависимост от X_i , когато всички останали X -сове са фиксирани. Тези коефициенти, обаче могат да бъдат несъизмерими по величина (метър, кг, лв) и по тази причина е необходимо първо да стандартизираме независимите променливи.

Обикновено се използван стандартизиране (образмеряване) на данните чрез т. нар. z - трансформация

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{s_i}, \quad (9.4)$$

където $\bar{X}_i$ е средната извадкова стойност на независимата променлива, а s_i е стандартното отклонение. Възможни са и други начини за обезразмеряване. Регресионното уравнение добива вида

$$\frac{Y - \bar{Y}}{s_Y} = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \dots + \beta_k Z_k, \quad (9.5)$$

в което свободният коефициент е равен на нула, а коефициентите $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ се наричат стандартизирани коефициенти на регресия. Стандартизираните коефициенти се интерпретират по знак, както преди, но вече са съпоставими и по абсолютна стойност.

За всеки от коефициентите на регресия се пресмята значимост, като фактически се проверява нулева хипотеза, че съответният популационен коефициент е равен на нула.

При тези хипотези проверяващата статистика има разпределение на Стюдънт с $n - k - 1$ степени на свобода, където n е обемът на извадката.

Ако някой от коефициентите се получи с пренебрежима значимост, то съответната независима променлива може да бъде изключена от анализа без съществена загуба на информация.

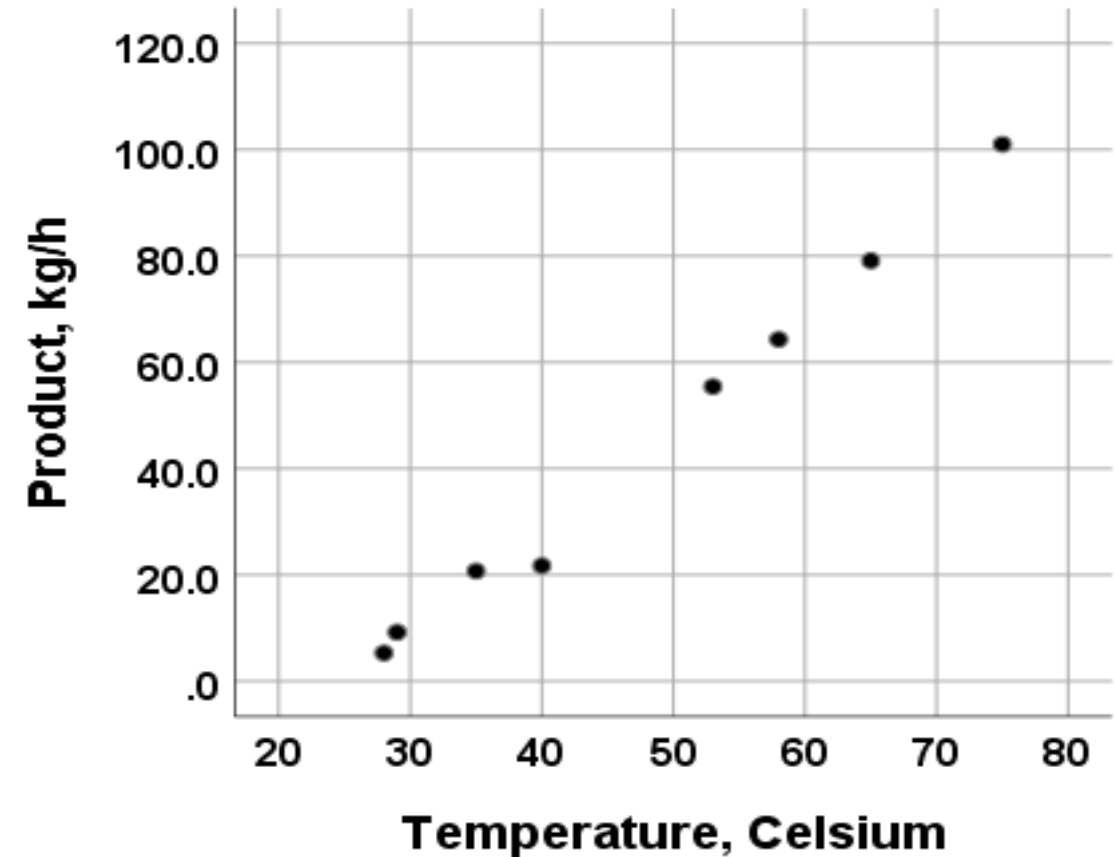
При установена значима корелационна зависимост, тя може да се търси явно като формула с различни методи за приближаване на функции. Един от най-използваните е методът на най-малките квадрати (МНМК).

Преди да се пристъпи към получаване и изследване на регресионното уравнение е добре да се визуализира облакът от данни.

Ще направим това за разглеждания Пример 9.6.

- Корелограма на зависимостта между X и Y с SPSS: *Graphs* → *Legacy Dialogs* → *Scatter/Dot* → *Simple Scatter* → *Define*.

От графиката виждаме че може да се търси линейна зависимост между изходния продукт (Y) и температурата на реакция (X).



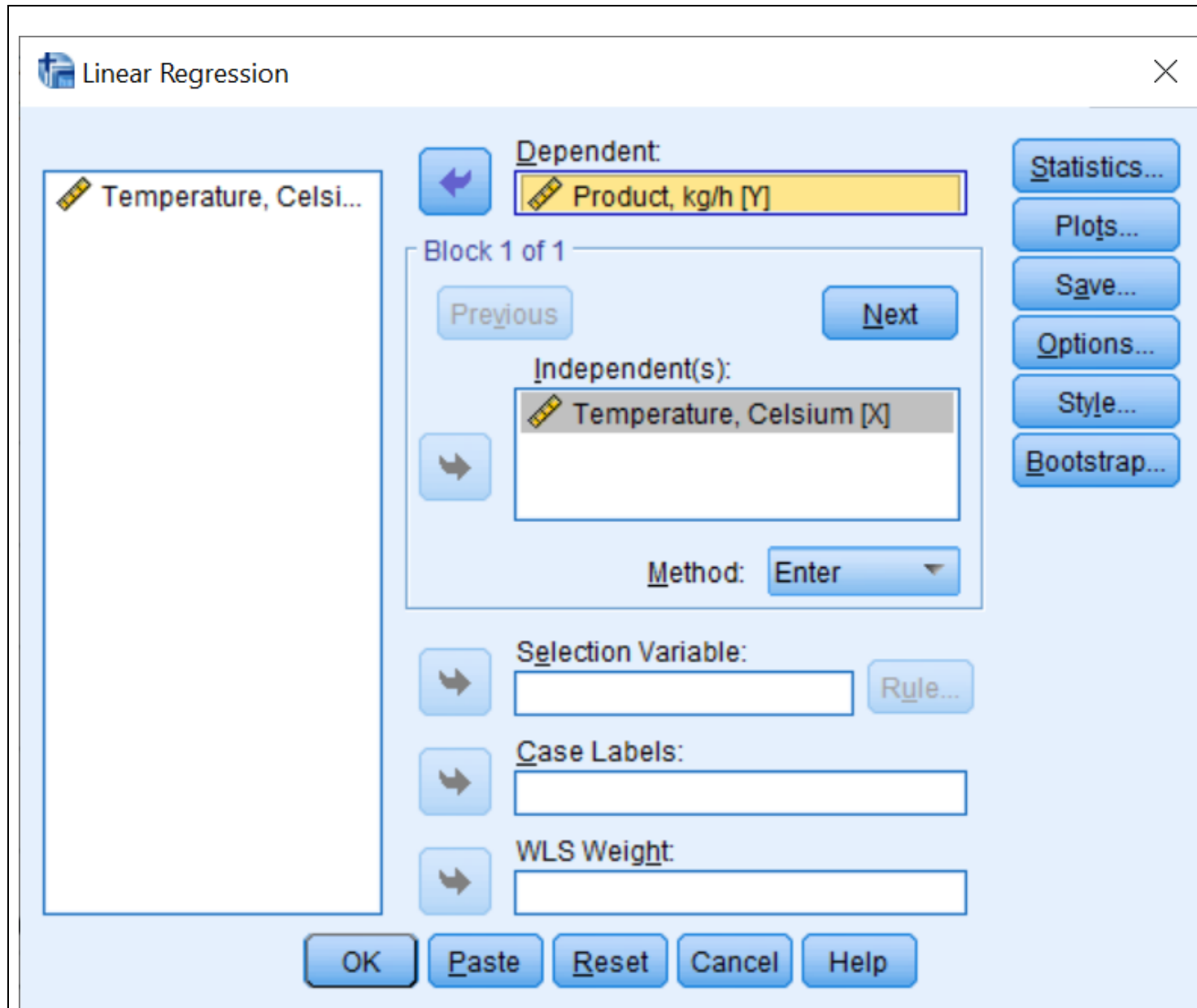
Линейна регресия Когато графиката на данните визуално наподобява линейна зависимост, приближаваща функция се търси като полином от първа степен във вида $\hat{Y}(x) = a_0 + a_1X$.

Коефициентите a_0 , a_1 се определят от единственото решение на системата линейни уравнения (вж. формула (2.11), за полином от първа степен на една променлива), а именно:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (9.6)$$

Получаваме $a_0 = -52,037$, $a_1 = 2,018$, т.е. уравнението на линейна регресия е $\hat{Y}(x) = -52,037 + 2,018 X$.

- В SPSS избираме: *Analyze* $\rightarrow$ *Regression* $\rightarrow$ *Linear*.
- В полето *Dependent* избираме зависимата променлива – изходен продукт Y , а в полето *Independent* – температурата на реакция.



Фиг. 9.4. Работен прозорец на SPSS за регресионен анализ.

Получаваме следните резултати в табличен вид.

В таблицата *Model Summary* отново виждаме коефициента на корелация $r = 0,996$ и неговият квадрат $r^2 = 0,993$. Коефициентът r^2 се нарича **коефициент на детерминация** и показва какъв процент от вариацията на Y може да бъде обяснен с вариацията на X , т.е. тук 99,3% от промените на Y може да кажем, че се обясняват, или зависят, от промените на X .

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	0,996 ^a	0,993	0,991	3,2875

a. Predictors: (Constant), Temperature

В следващата таблица *ANOVA* съществена е стойността на Sig. в последния стълб на таблицата. Тя показва значимостта на целия регресионен модел.

Ако $\text{Sig.} < \alpha$, $\alpha = 0,05$, полученият модел се приема за статистически значим. В противен случай е статистически незначим. При избрано ниво на значимост $\alpha = 0,05$ имаме $\text{Sig.} = 0,000 < 0,05$, което показва, че моделът е статистически значим.

ANOVA^a

Model	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	8704,363	1	8704,363	805,393	0,000 ^b
Residual	64,846	6	10,808		
Total	8769,209	7			

a. Dependent Variable: Product, kg/h

b. Predictors: (Constant), Temperature

Третата таблица *Coefficients* съдържа стойностите на коефициентите в регресионното уравнение, както и р-стойността на теста за тяхната значимост (Sig.).

Coefficients^a

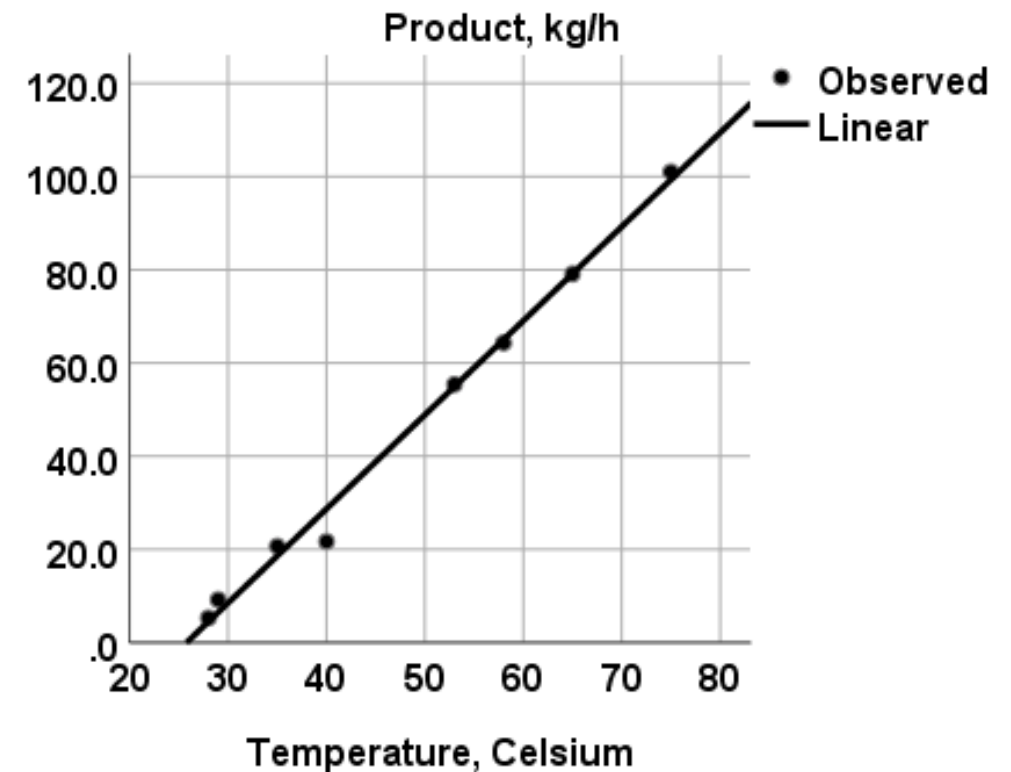
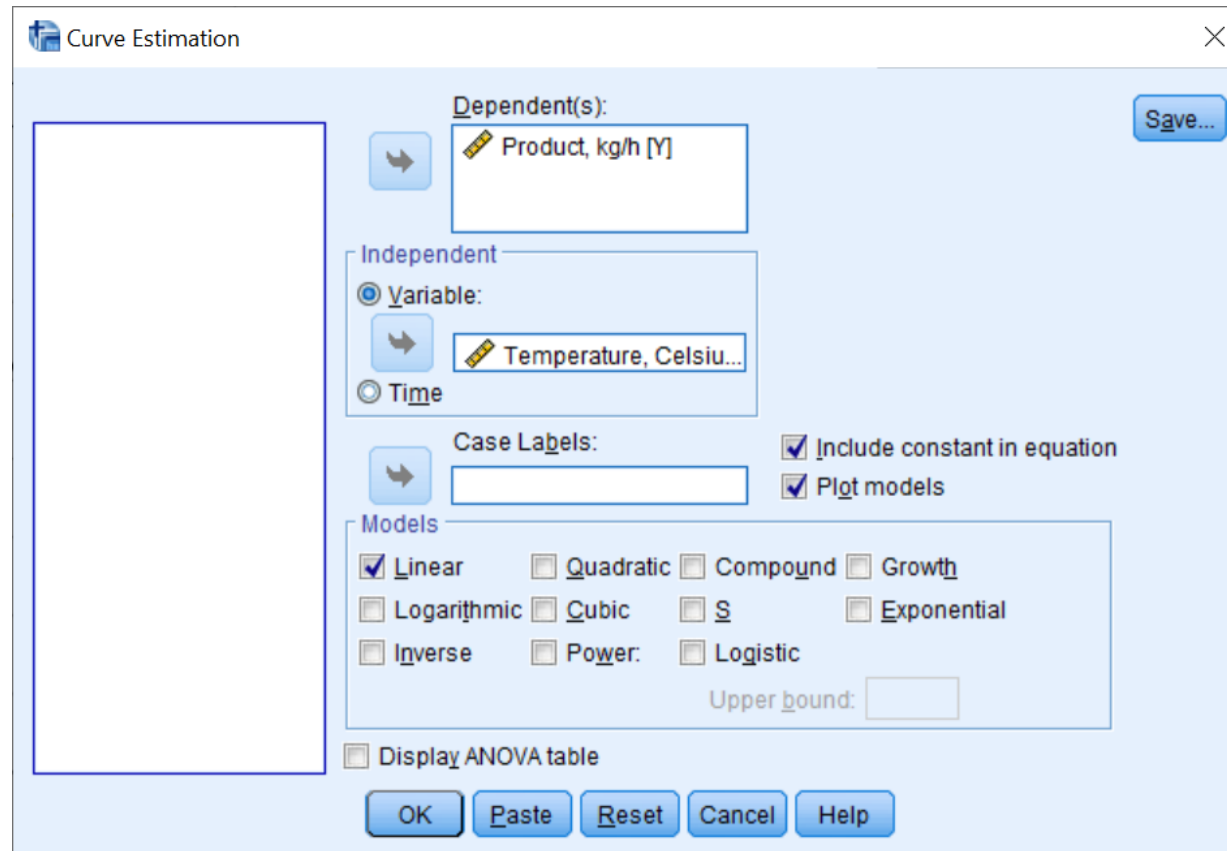
Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
(Constant)	-52,037	3,598		-14,464	0,000
Temperature	2,018	0,071	0,996	28,379	0,000

a. Dependent Variable: Product, kg/h

Регресионният коефициент $a_0 = -52,037$ (свободният член в регресионното уравнение) е означен като (Constant) и е статистически значим. Това се вижда от неговото равнище на значимост $\text{Sig.} = 0,000$, което е по-малко от $\alpha = 0,05$.

Регресионният коефициент пред факторната променлива е $a_1 = 2,018$. Той е статистически значим, тъй като неговото равнище на значимост $\text{Sig.} = 0,000$ и е по-малко от $\alpha = 0,05$.

- Намерената регресионна линия може да се изобрази с SPSS:
Analyze → *Regression* → *Curve Estimation*



Фиг. 9.5. Визуализиране на данните и регресионния модел.

9.8. Приложение на регресионния модел за предсказване

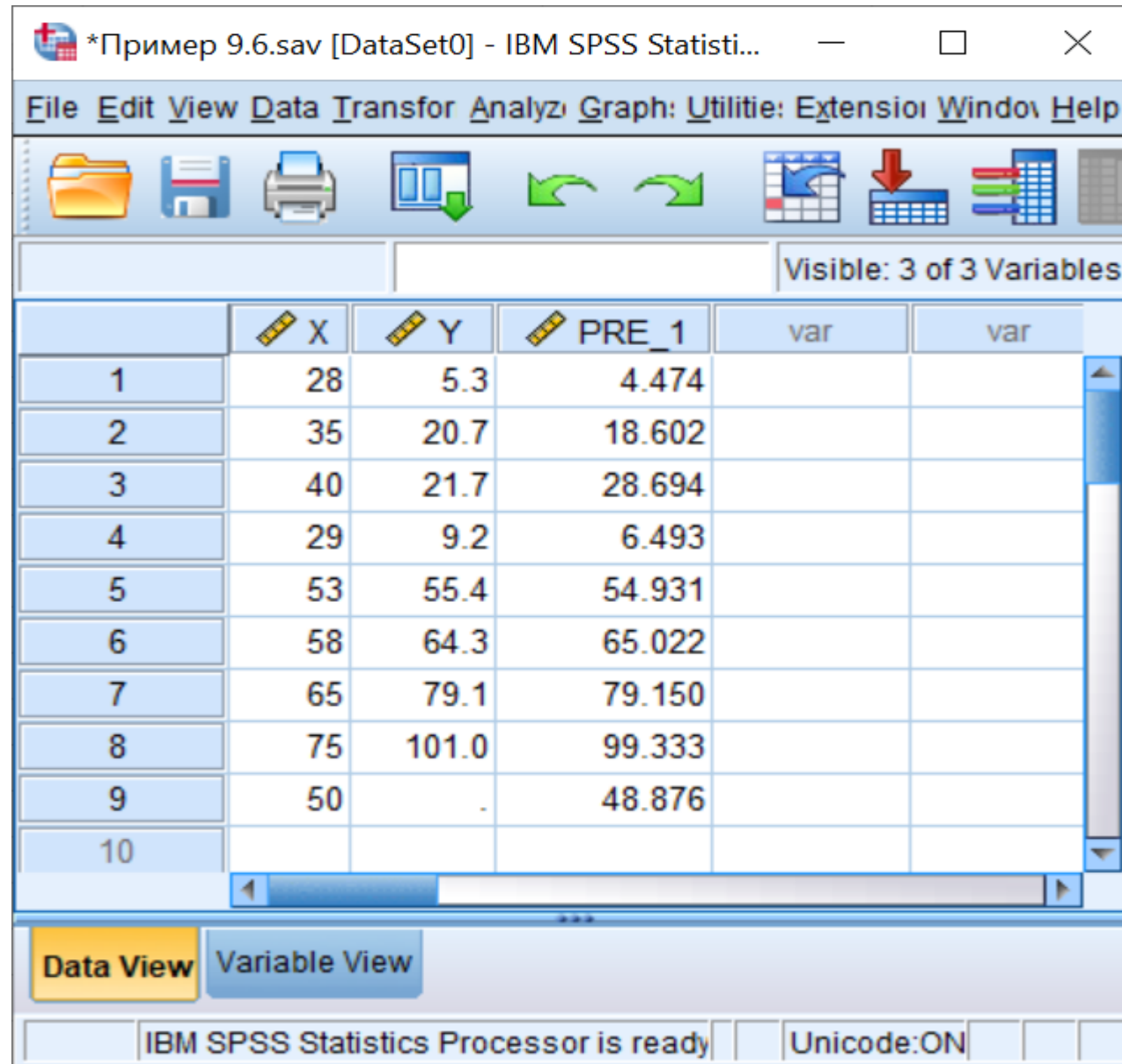
Полученият регресионен модел може да служи за предсказване на стойностите на Y при стойности на X , които не присъстват в началните данни. Например при $X = 50^{\circ}\text{C}$ изходният продукт Y ще бъде приблизително

$$\hat{Y}(x) = -52,037 + 2,018.50 = 48,863 \text{ kg/h.}$$

С помощта на SPSS предсказването се автоматизира, **като добавим стойностите на предикторите** към базата данни и повторим анализа, като в менюто Save Predicted values отбележим Unstandardized:

Analyze → Regression → Linear → Save → Predicted values → Unstandardized

В БД се появява нова колона с предсказаните от модела стойности (вж. Фиг. 9.6).



Visible: 3 of 3 Variables

	X	Y	PRE_1	var	var
1	28	5.3	4.474		
2	35	20.7	18.602		
3	40	21.7	28.694		
4	29	9.2	6.493		
5	53	55.4	54.931		
6	58	64.3	65.022		
7	65	79.1	79.150		
8	75	101.0	99.333		
9	50	.	48.876		
10					

Data View Variable View

IBM SPSS Statistics Processor is ready Unicode:ON

Фиг. 9.6. Предсказване на експеримента от регресионния модел.

Прилагането на линеен регресионен анализ и извеждането на заключения от получените модели изисква допълнителни процедури за статистическа валидация на резултатите. Тук се включват както проверките за изпълнение на условията за приложимост като нормално разпределение на променливите, линейна връзка на предикторите със зависимата променлива, независимост на извадката и пр., така и пост анализ на грешките (резидиумите) на модела, провеждане на кросвалидация и др. (виж приложената литература).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Варианти на изпитни тестове

Вариант 1

Име и факултетен номер на студента:

Параметри: $p = \dots\dots\dots$, $q = \dots\dots\dots$

Задача 1. (15 т.) С точност $\varepsilon = 10^{-4}$ да се намери приближен реален корен на уравнението $\sin(x + p) + px^3 - 3q = 0$ по метода на Нютон (на допирателните).

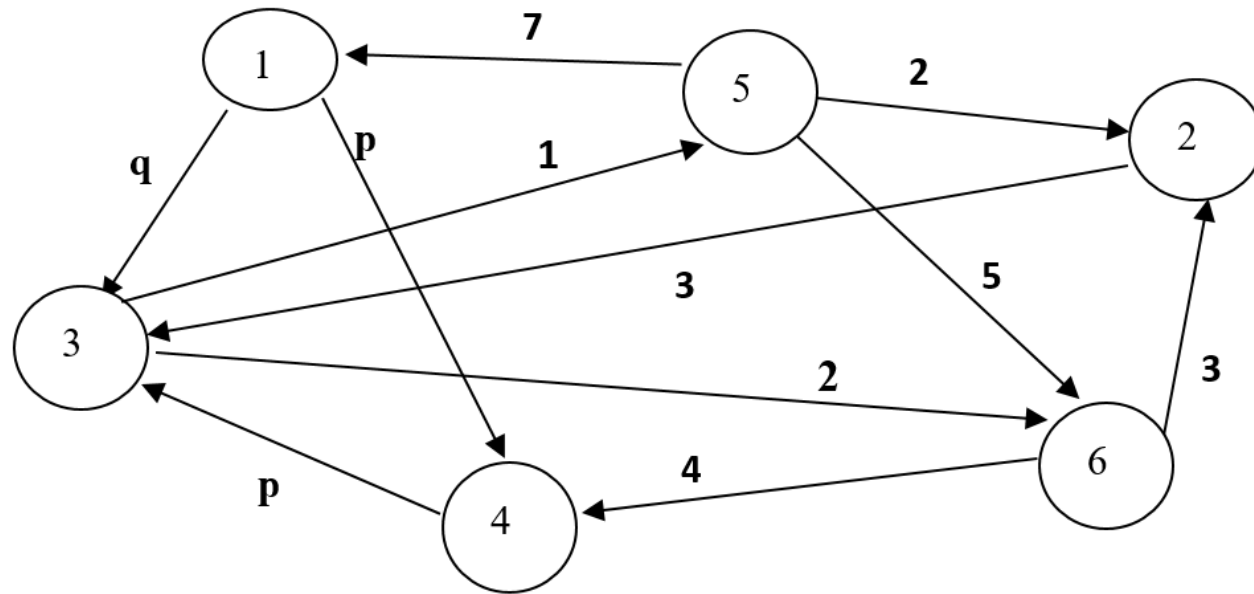
- а) Определете подходящ интервал $[a, b]$, в който е локализиран коренът:
 $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$;
- б) Проверете условията за прилагане на метода на Нютон, като запишете знаците на първата и втората производна в интервала $[a, b]$;
- в) Определете началното приближение $x_0 = ?$;
- г) Определете приближения корен със зададената точност и запишете резултатите от първите 3 итерации и крайния резултат в таблица (значения и грешки).

Задача 2. (15 т.) Решете транспортната задача за минимум:

$$C = \begin{pmatrix} q & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix}, \quad a = (30, 20, 30 + 10p), \quad b = (20, 30, 20 + 10q).$$

Задача 3. (10 т.) По метода на Форд-Белман намерете минималното разстояние от върха 1 до всички върхове на мрежата, в зависимост от указаните цени на преходите.

- Напишете матрицата на разстоянията от графа;
- Запишете таблицата с пресметнатите разстояния по алгоритъма.



Задача 4. (10 т.) Дадени са две извадки X и Y със следните данни от маркетингово проучване. Нанесете данните в SPSS и ги запишете във файл `fakult_nomer.sav`. Намерете и запишете указаното в таблицата.

X = “Възраст на анкетирания“:

25	26	36	20	27	34	23	22	24	30	31	31	25	22	40	26	35	38	25	28
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Y = “Мнение за смартфона“ (от 1 „никак не харесвам“, до 9 „много харесвам“):

3	5	8	4	2	6	5	p	4	5	5	6	5	q	9	p	6	9	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

а) Обемът на извадката е:	n=
б) Средната стойност на променливата X е:	
в) Медианата на X е:	
г) Начертайте честотната таблица (хистограма) на X	
д) Пресметнете корелационния коефициент между X, Y и преценете значимостта му.	

Минимален праг за успешно полагане на изпита е 10 точки. Успех!

Вариант 2

Име и факултетен номер на студента:

Параметри: $p = \dots\dots$, $q = \dots\dots$

Задача 1. (15 т.) С точност $\varepsilon = 10^{-4}$ да се намери приближен реален корен на уравнението $px^3 - 3x - \cos(x + q) = 0$ по метода на хордите.

- а) Определете подходящ интервал $[a, b]$, в който е локализиран коренът:
 $a = \dots\dots$, $b = \dots\dots$;
- б) Проверете условията за прилагане на метода на хордите, като запишете знаците на първата и втората производна в интервала $[a, b]$;
- в) Определете началното приближение $x_0 = ?$;
- г) Определете приближения корен със зададената точност и запишете резултатите от първите 3 итерации и крайния резултат в таблица (значения и грешки).

Задача 2. (15 т.) Решете транспортната задача за минимум:

$$C = \begin{pmatrix} q & p & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = (30, 20, 30 + 10p), \quad b = (40, 30, 20 + 10q, 20)$$

Задача 3. (10 т.) Фирма планира да открие четири нови работни места в три от своите офиси. Ефективността от откриването на нови работни места е дадена в таблицата. С методите на динамичното оптимиране определете разпределението на работните места с най-голяма обща ефективност.

	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
I офис	0	8	11+p	9	8
II офис	0	10	12	20-p	11
III офис	0	6	5+p+q	5	6

Задача 4. (10 т.) Решете задачата на линейното оптимиране за минимум:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\left| \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2p \\ x_1 - x_2 \geq 2q \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq p + q \end{array} \right.$$

$$x_{1,2,3} \geq 0$$

Минимален праг за успешно полагане на изпита е 10 точки. Успех!

Вариант 3

Име и факултетен номер на студента:

Параметри: $p = \dots\dots\dots$, $q = \dots\dots\dots$

Задача 1. (15 т.) С метода на проста итерация: (а) решете приближено системата линейни алгебрични уравнения с 3 итерации и нулево начално приближение; (б) Покажете с оценка на някоя норма, дали методът е сходящ или разходящ.

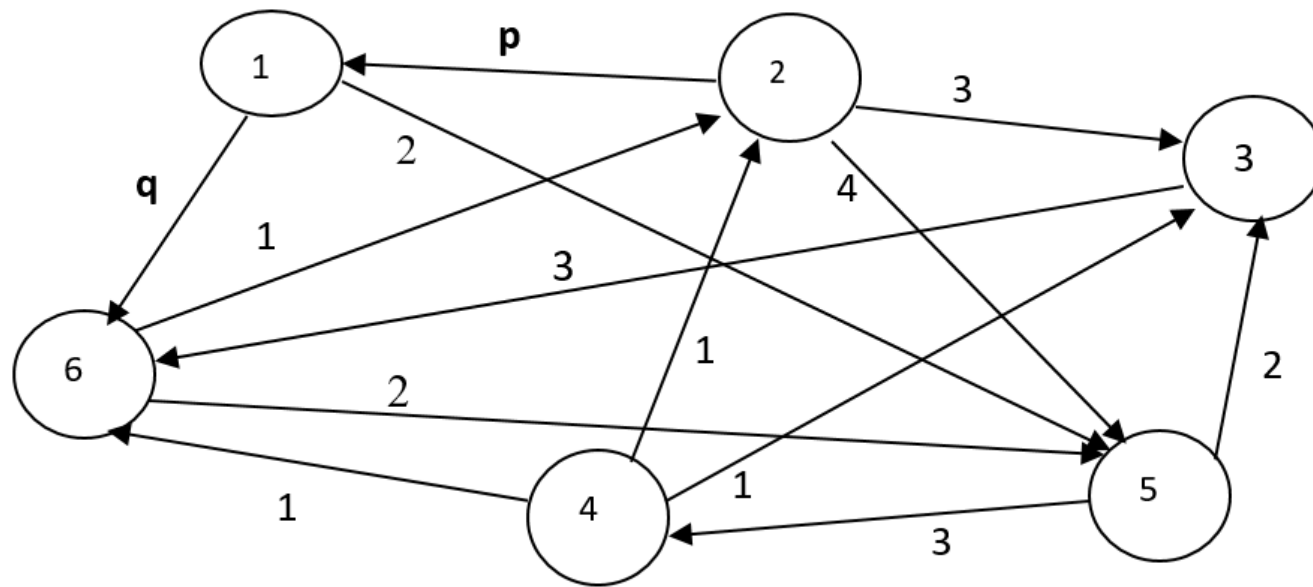
$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + (p+7)x_2 - 3x_3 = p \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 = q \end{cases}$$

Задача 2. (15 т.) Решете транспортната задача за минимум:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & p & 3 & p & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & q & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = (20, 50, 30+10p), \quad b = (30, 25, 20+10p, 25, 20).$$

Задача 3. (10 т.) По метода на Дийкстра намерете минималното разстояние от върха 1 до всички върхове на мрежата, в зависимост от указаните цени на преходите.

- Напишете матрицата на разстоянията от графа;
- Запишете таблицата с пресметнатите разстояния по алгоритъма на Дийкстра.



Задача 4. (10 т.) Дадени са две извадки X и Y със следните данни от маркетингово проучване. Нанесете данните в SPSS и ги запишете във файл `fakult_nomer.sav`. Извършете анализите и попълнете отговорите си в таблицата.

Забележка. Ако някой параметър (р или q) е по-голям от 7, заместете със 7.

X = “Възраст на анкетирания“:

25	33	38	20	27	36	23	22	24	22	31	27	25	22	40	26	35	38	25	28
22	33	32	21	25	25	33	38	20	27										

Y = “Нагласа за закупуване на нов продукт“ (от 1 „Нямам никакво намерение.“, до 7 „Готов съм да го закупя.“):

4	5	7	4	4	7	p	q	p	q	5	4	5	5	7	4	6	7	5	5
6	5	4	5	6	5	4	3	4	5										

а) Обем на извадката.	n=
б) Средната стойност и медиана на променливата Y.	
в) Коефициенти на асиметрия и ексцес на Y.	
г) Корелационен коефициент между X, Y и неговата значимост.	

д) Постройте линейна регресия и запишете уравнението, със значимост на регресионните коефициенти и на целия анализ.	
е) С увеличаване на възрастта на анкетираните нараства ли степента на готовност за закупуване на продукта или не и защо според модела?	

Минимален праг за успешно полагане на изпита е 10 точки. Успех!

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Таблицы на стандартното нормално

разпределение $N(0,1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991

Стандартно нормално разпределение $N(0,1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214

z	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,1	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361

z	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,5	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Квантили на симетричното t – разпределение на Стюдент

$k \setminus q$	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975
1	0,32492	1,00000	3,07768	6,31375	12,70615
2	0,28867	0,81650	1,88562	2,91999	4,30266
3	0,27667	0,76489	1,63775	2,35336	3,18245
4	0,27072	0,74070	1,53321	2,13185	2,77645
5	0,26718	0,72669	1,47588	2,01505	2,57058
6	0,26483	0,71756	1,43976	1,94318	2,44691
7	0,26317	0,71114	1,41492	1,89458	2,36462
8	0,26192	0,70639	1,39682	1,85955	2,30601
9	0,26096	0,70272	1,38303	1,83311	2,26216
10	0,26018	0,69981	1,37218	1,81246	2,22814
11	0,25956	0,69744	1,36343	1,79588	2,20099

$k \setminus q$	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975
12	0,25903	0,69548	1,35622	1,78229	2,17881
13	0,25859	0,69383	1,35017	1,77093	2,16037
14	0,25821	0,69242	1,34503	1,76131	2,14479
15	0,25788	0,69120	1,34061	1,75305	2,13145
16	0,25760	0,69013	1,33676	1,74588	2,11990
17	0,25735	0,68919	1,33338	1,73961	2,10982
18	0,25712	0,68836	1,33039	1,73406	2,10092
19	0,25692	0,68762	1,32773	1,72913	2,09302
20	0,25674	0,68695	1,32534	1,72472	2,08596
21	0,25658	0,68635	1,32319	1,72074	2,07961
22	0,25643	0,68581	1,32124	1,71714	2,07388
23	0,25630	0,68531	1,31946	1,71387	2,06865
24	0,25617	0,68485	1,31784	1,71088	2,06390
25	0,25606	0,68443	1,31635	1,70814	2,05954

$k \setminus q$	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975
26	0,25595	0,68404	1,31497	1,70562	2,05553
27	0,25586	0,68369	1,31370	1,70329	2,05183
28	0,25577	0,68335	1,31253	1,70113	2,04841
29	0,25568	0,68304	1,31143	1,69913	2,04523
30	0,25561	0,68276	1,31042	1,69726	2,04227
31	0,25553	0,68249	1,30946	1,69552	2,03951
32	0,25546	0,68223	1,30857	1,69389	2,03693
33	0,25540	0,68200	1,30774	1,69236	2,03452
34	0,25534	0,68177	1,30695	1,69092	2,03224
35	0,25528	0,68156	1,30621	1,68957	2,03011
40	0,25504	0,68067	1,30308	1,68385	2,02107
45	0,25485	0,67998	1,30065	1,67943	2,01410
50	0,25470	0,67943	1,29871	1,67591	2,00856
55	0,25458	0,67898	1,29713	1,67303	2,00404

Литература

- [1] Бояджиев Д., Гочева С., Макрелов И., Попова Л., *Ръководство по числени методи – част 1*, Издания: 2003, 2006, 2010.
- [2] Гочева-Илиева, С. Г., *Компютърни числени методи*, Унив. изд. "Паисий Хилендарски", 2013, 291 стр., електронно издание, ISBN 978-954-423-848-3, <http://www.fmi-plovdiv.org/gocheva/KChM-lekcii.pdf>
- [3] Гочева-Илиева С., *Въведение в система Mathematica*, ЕксПрес, Габрово, 2009.
- [4] Lipski W., *Kombinatoryka dla programistów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1989. (Липский В., *Комбинаторика для программистов*, Мир, М., 1988).
- [5] *IBM SPSS Statistics 24 Brief Guide*, IBM Corporation, ftp://public.dhe.ibm.com/software/analytics/spss/documentation/statistics/24.0/en/client/Manuals/IBM_SPSS_Statistics_Brief_Guide.pdf

- [6] Field, A., *Discovering statistics using IBM SPSS statistics*, 5th ed., London: Sage Publications, 2017.
- [7] Zwick U., All Pairs Shortest Paths using Bridging Sets and Rectangular Matrix Multiplication, *Journal of the ACM*, Vol. 49, No. 3, May 2002, pp. 289–317, https://www.cadmo.ethz.ch/education/lectures/FS18/SAADS/papers/JACM02_APSP_Using_Bridging_Sets.pdf
- [8] Cran T.M., More algorithms for all-pairs shortest paths in weighted graphs, 2009, <http://tmc.web.engr.illinois.edu/moreapsp.pdf>
- [9] www.fmi-plovdiv.org/evlm – сайт с материали
- [10] www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg, числени методи
- [11] <http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/numanmenu/index.htm>, решени
примери с *Wolfram Mathematica*