

Примери на почти контактни

В-метрични многообразия от някои специални класове

Манчо Христов Манев

Почти контактните многообразия с В-метрика са въведени в [1], като е дадена една класификация на основните 11 класа на тези многообразия. В същата работа са дадени три примера на многообразия от разглеждания вид.

В настоящата статия най-напред се дава геометрична характеристика на посочените примери в [1]. По-нататък се конструира примери на многообразия с размерност 5 от някои основни класове. За всички разглеждани примери се изучава тяхната конформна еквивалентност и се прави оценка на някои специални секционни кривини.

Нека $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е $(2n+1)$ -мерно почти контактно многообразие с В-метрика, т.е. (φ, ξ, η, g) е почти контактна структура [1] определена чрез тензорно поле φ от тип $(1,1)$, векторно поле ξ и 1-форма η , а g е метрика върху M , такава че:

$$\varphi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \quad \eta(\xi) = 1; \quad g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

където X, Y са произволни диференцируеми векторни полета върху M^{2n+1} . Непосредствено следва, че $\eta \circ \varphi = 0$, $\varphi \xi = 0$, $\eta(X) = g(X, \xi)$. Освен това ендоморфизма φ има ранг $2n$ [1].

Тензорното поле F от тип $(0,3)$ върху M^{2n+1} е определено чрез $F(X, Y, Z) = g((\nabla_X \varphi)Y, Z)$. С тензора F са асоциирани следните 1-форми:

$$\theta(x) = g^{ij}F(e_i, e_j, x), \quad \theta^*(x) = g^{ij}F(e_i, \varphi e_j, x), \quad \omega(x) = F(\xi, \xi, x),$$

където x е произволен вектор в допирателното пространство $T_p M^{2n+1}$ в точка $p \in M$, $\{e_i, \xi\}$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) е база на $T_p M^{2n+1}$, а (g^{ij}) е обратната матрица (g_{ij}) .

Една класификация на почти контактните многообразия с В-метрика по отношение на тензора F е дадена в [1], където са дефинирани основните класове $\mathcal{F}_i$ ($i=1, 2, \dots, 11$) на тези многообразия. Класовете определени чрез главните компоненти на F са $\mathcal{F}_i$ ($i=1, 4, 5, 11$). Тези класове са дефинирани чрез условията:

$$\mathcal{F}_1: F(X, Y, Z) = (1/2n)\{g(X, \varphi Y)\theta(\varphi Z) + g(X, \varphi Z)\theta(\varphi Y)$$

$$+ g(\varphi X, \varphi Y)\theta(\varphi^2 Z) + g(\varphi X, \varphi Z)\theta(\varphi^2 Y)\};$$

$$\mathcal{F}_4: F(X, Y, Z) = -\{\theta(\xi)/2n\}\{g(\varphi X, \varphi Y)\eta(Z) + g(\varphi X, \varphi Z)\eta(Y)\};$$

$$\mathcal{F}_5: F(X, Y, Z) = -\{\theta^*(\xi)/2n\}\{g(X, \varphi Y)\eta(Z) + g(X, \varphi Z)\eta(Y)\};$$

$$\mathcal{F}_{11}: F(X, Y, Z) = \eta(X)\{\eta(Y)\omega(Z) + \eta(Z)\omega(Y)\}.$$

Специалният клас $\mathcal{F}_0: F=0$ се съдържа във всеки от основните 11 класа.

В работите [3], [4] и [5] са изучени две основни групи от контактни кон-формни трансформации S и G . Групата G се състои от трансформации $f: f(\varphi, \xi, \eta, g) = (\bar{\varphi}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$, такива че

$$\bar{\varphi} = \varphi ; \quad \bar{\xi} = e^{-w} \xi ; \quad \bar{\eta} = e^w \eta ;$$

$$\bar{g} = e^{2u} \cos 2v \cdot g + e^{2u} \sin 2v \cdot g + (e^{2w} - e^{2u} \cos 2v - e^{2u} \sin 2v) \eta \otimes \eta, \quad (u, v, w \in \mathcal{FM}).$$

Групата C е подгрупа на G , така че $C = \{f \in G \mid w=0\}$.

Нека да изучим примерите на почти контактни многообразия с В-метрика, дадени в [1].

В първия от тях е разгледано векторното пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ над полето на реалните числа $\mathbb{R}$. Дефинирана е (φ, ξ, η, g) -структура върху $\mathbb{R}^{2n+1}$ и е показано, че $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е почти контактно В-метрично многообразие от класа $\mathcal{F}_0$.

В същата работа се разглежда $\mathbb{R}^{2n+2}$ като комплексно риманово многообразие с канонична комплексна структура J и В-метрика g [2]. Идентифицирайки точката p в $\mathbb{R}^{2n+2}$ с нейния радиус-вектор Z , се разглеждат две хиперповърхнини на $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Пример 1 [1]. Нека $S: g(Z, Z) = -1$ е време-подобна сфера на метриката g . Радиус-вектора Z е единичен нормален вектор на допирателното пространство $T_p S$ в $p \in S$. Върху хиперповърхнината S^{2n+1} е въведена (φ, ξ, η, g) -структура и е показано, че многообразието $(S^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е почти контактно В-метрично многообразие от класа $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$, където за основните 1-форми имаме

$$(1) \quad \frac{\theta(\xi)}{2n} = \cos t; \quad \frac{\theta^*(\xi)}{2n} = \sin t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Ще продължим изучаването на това многообразие. От (1), като отчетем $\eta(x) = \frac{1}{2 \cos t} dt(x)$, намираме за всяко $X \in X(S)$

$$(2) \quad X\theta(\xi) = -4n \sin t \cos t \eta(X), \quad X\theta^*(\xi) = 4n \cos^2 t \eta(X),$$

откъдето имаме

$$(3) \quad X\theta(\xi) = \xi\theta(\xi)\eta(X), \quad X\theta^*(\xi) = \xi\theta^*(\xi)\eta(X).$$

Равенства (3) са НДУ основните 1-форми θ и θ^* да бъдат затворени върху $\mathcal{F}_i$ -многообразие ($i=4,5$) и многообразието да принадлежи на специален подклас $\mathcal{F}_i^0$ ($i=4,5$) на класа от почти контактни В-метрични многообразия $\mathcal{F}_i$ ($i=4,5$) [3]. Следователно разглежданото многообразие $(S^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ е от директната сума на класовете $\mathcal{F}_4^0$ и $\mathcal{F}_5^0$.

Понеже $\mathbb{R}^{2n+2}$ е плоско, тензорът на кривина $\bar{R}$ за $\bar{\nabla}$ е нулев и тензорът на кривина R за ∇ има вида $R = -\pi_1$. Следователно секционната кривината

$$k(R)(x, y) = \frac{R(x, y, y, x)}{\pi_1(x, y, y, x)}$$

относно R на произволна неизродена площадка $\{x, y\}$ върху S е равна на -1 .

В [4] сме въвели чрез ∇ канонична свързаност D , т.е. линейната свързаност, относно която структурите φ , ξ , η и g са паралелни. Съответния тензор на кривина бележим с K . Връзката между K и R в случая на $\mathcal{F}_4^0 \oplus \mathcal{F}_5^0$ -многообразие е

$$K = R + \frac{\xi\theta(\xi)}{2n} \pi_5 + \frac{\theta^2(\xi)}{4n^2} (\pi_2 - \pi_4) + \frac{\xi\theta^*(\xi)}{2n} \pi_4 + \frac{\theta^{*2}(\xi)}{4n^2} \pi_1 \quad [4].$$

Като вземем предвид (1) и (2), получаваме

$$K = -\cos^2 t \{\pi_1 - \pi_2 - \pi_4\} - 2\sin t \cos t \pi_5,$$

откъдето за скаларните кривини имаме

$$\tau(K) = -4n(n-1)\cos^2 t, \quad \tau^*(K) = 4n\sin t \cos t.$$

Тъй като тензорът $\{\pi_1 - \pi_2 - \pi_4\}$ е келеров, а π_5 не е келеров [4], то тензорът на кривина K върху S не е келеров. Тогава не може да се конструира тензор на Бохнер за K , ако S е с размерност не по-малка от 7.

Въпреки това K е кривиноподобен тензор [4], защото π_i ($i=1, \dots, 5$) са такива и следователно можем да търсим секционни кривини на неизродени площадки на S относно K . Непосредствено установяваме верността на следното

Твърдение 1. Нека S е $(2n+1)$ -мерна време-подобна сфера в $\mathbb{R}^{2n+2}$ относно метриката g , снабдена с почти контактна В-метрична структура (ϕ, ξ, η, g) . Тогава имаме:

1) всяка ϕ -холоморфна площадка има нулева секционна кривина относно K ;

2) всяка ортогонална на ξ напълно реална площадка има относно K точково постоянна отрицателна секционна кривина, тъй като $k(K)(\alpha) = -\cos^2 t$;

3) всяка ξ -площадка (съотв. неортогонална на ξ напълно реална площадка) има секционна кривина относно K , зависеща както от точката, така и от площадката.

Нека разгледаме тензор $\hat{K}$ от тип $(0,4)$, породен от каноничния тензор на кривина K и структурния тензор ϕ чрез

$$\hat{K}(x, y, z, w) = K(x, y, \phi z, \phi w).$$

Върху разглежданата сфера $(S^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ тензорът $\hat{K}$ се изразява по следния начин

$$(4) \quad \hat{K} = \cos^2 t \{\pi_1 - \pi_2 - \pi_4\}$$

и понеже $\{\pi_1 - \pi_2 - \pi_4\}$ е келеров тензор, то $\hat{K}$ е също келеров. Скаларните кривини на $\hat{K}$ са $\tau(\hat{K}) = 4n(n-1)\cos^2 t > 0$ и $\tau^*(\hat{K}) = 0$. Съгласно равенствата

$$\nu(\hat{K}) = \frac{\tau(\hat{K})}{4n(n-1)}, \quad \nu^*(\hat{K}) = \frac{\tau^*(\hat{K})}{4n(n-1)}$$

получаваме, че $\nu(\hat{K}) = \cos^2 t > 0$ и $\nu^*(\hat{K}) = 0$. Следователно разглежданата сфера е с точково постоянна положителна секционна кривина $\nu(\hat{K}) = \nu(\hat{K})(p)$ и абсолютно постоянна нулева секционна кривина $\nu^*(\hat{K})$ за неизродена напълно реална площадка ортогонална на ξ , които са единствените площадки с нетривиални секционни кривини относно келеровия тензор $\hat{K}$.

Известно е [4], че за келеров тензор при размерност на почти контактното В-метрично многообразие не по-малка от 7 може да се конструира тензор на Бохнер от ϕ -холоморфен тип по аналогичен начин на [2]. Тогава за $\hat{K}$ съществува

$$B(\hat{K}) = \hat{K} - \frac{1}{2n(n-2)} \{\psi_1 - \psi_2 - \psi_4\}(\rho(\hat{K})) \\ + \frac{1}{4(n-1)(n-2)} \{\tau(\hat{K})[\pi_1 - \pi_2 - \pi_4] - \tau^*(\hat{K})[\pi_3 + \pi_5]\}.$$

От (4) непосредствено се получава, че $B(\hat{K}) = 0$ върху S . Тогава, съгласно [4], $(S^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ ($\dim S \geq 9$) е контактно конформно еквивалентно

на многообразие от същия клас, така че контактно конформно съответният келеров тензор на $\hat{K}$ е нулев.

Пример 2 [1]. Хиперповърхнината M на R^{2n+2} е определена чрез

$$M: g(Z, JZ) = 0; g(Z, Z) = ch^2 t, t > 0.$$

Въведена е почти контактна В-метрична структура е показано, че $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е едно почти контактно В-метрично многообразие, което принадлежи на класа $\mathcal{F}_5$, като

$$(5) \quad \theta(\xi) = 0; \quad \frac{\theta^*(\xi)}{2n} = \frac{1}{cht}.$$

По-нататък ще проучим това многообразие по-подробно. От (5), съгласно $\eta(x) = sht \cdot dt(x)$, получаваме за всяко $X \in X(M)$

$$(6) \quad X\theta^*(\xi) = -2n \frac{1}{ch^2 t} \eta(X),$$

откъдето

$$(7) \quad X\theta^*(\xi) = \xi\theta^*(\xi) \eta(X),$$

т.е. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е едно $\mathcal{F}_5^0$ -многообразие [3]. От (13) получаваме

$$(8) \quad \frac{\xi\theta^*(\xi)}{2n} = -\frac{\theta^{*2}(\xi)}{4n^2}.$$

Тъй като R^{2n+2} е плоско, то тензорът на кривина R за ∇ има явен вид

$$(9) \quad R = -\frac{1}{ch^2 t} \pi_2.$$

В [4] сме дали зависимостта между R и тензора на кривина K относно каноничната свързаност D , която съгласно (8) и (9) приема вида

$$(10) \quad K = \frac{1}{ch^2 t} \{\pi_1 - \pi_2 - \pi_4\}.$$

Следователно K е келеров тензор, тъй като $\{\pi_1 - \pi_2 - \pi_4\}$ е такъв [4]. За скаларните кривини на K имаме

$$\tau(K) = 4n(n-1) \frac{1}{ch^2 t}, \quad \varepsilon(K) = 0$$

и съществените ненулеви секционни кривини са тези на напълно реалните площи ортогонални на ξ , които са точково постоянни $\nu(K) = \frac{1}{ch^2 t}$ и $\nu(K) = 0$.

Твърдение 2. Напълно реалните площи ортогонални на ξ на разглежданото $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ имат положителна точково постоянна секционна кривина ν и абсолютно постоянна нулева секционна кривина ν .

За келеревия тензор K при $\dim M \geq 7$ може да се конструира тензор на Бохнер от φ -холоморфен тип $B(K)$ съгласно [4]. От (10) непосредствено получаваме

Твърдение 3. Разглежданата хиперповърхнина M върху R^{2n+2} снабдена с (φ, ξ, η, g) -структура има нулев тензор на Бохнер за каноничния тензор на кривина K .

Съгласно [4] даваме геометрична интерпретация на анулирането на инвариантата $B(K)$.

Твърдение 4. Ако размерността на разглежданата като почти контактно В-метрично многообразие хиперповърхнина на $\mathbb{R}^{2n+2}$ е не по-малка от 9, то това многообразие е контактно конформно еквивалентно чрез трансформация от групата C_5^0 на многообразие от същия клас $\mathcal{F}_5^0$ с плоска канонична свързаност.

Нека разгледаме $\mathbb{R}^5 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) | x^i \in \mathbb{R}\}$ и (φ, ξ, η, g) -структура дефинирана по следния начин:

$$(11) \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{i+2}}; \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^{i+2}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (i=1,2); \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^5}\right) = 0;$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^5}; \quad \eta = dx^5; \quad g(z, z) = -\delta_{ij}\lambda^i\lambda^j + \delta_{ij}\mu^i\mu^j + \nu^2,$$

където $z = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^{i+2}} + \mu^i \frac{\partial}{\partial x^{i+2}} + \nu \frac{\partial}{\partial x^5}$, $(i=1,2)$; δ_{ij} ($i, j=1,2$) са символите на Кронекер.

Съгласно пример 1 в [1], $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, g)$ е почти контактно В-метрично многообразие от класа $\mathcal{F}_0$.

Известно е от [4] и [5], че всяко $\mathcal{F}_0$ -многообразие е контактно конформно еквивалентно на многообразие от класа $\mathcal{F}_i^0$ ($i=1,4,5,11$), като за съответните келерови тензори на кривина R и $\bar{K}$ имаме

$$(12) \quad \bar{K} = R - \psi_1(S) + \psi_2(S) + \psi_4(S),$$

където

$$(13) \quad S(y, z) = (\nabla_y \sigma)z - \sigma(y)\sigma(z) + \sigma(\varphi y)\sigma(\varphi z) - \frac{1}{2}\{\sigma(s)g(\varphi y, \varphi z) + \sigma(\varphi s)g(y, \varphi z)\},$$

като $\sigma = g(s, \cdot)$ се специализира съответно: $\sigma = \frac{1}{2}(du + dv \cdot \varphi)$ за $i=1$, $\sigma = dv \cdot \varphi$ за $i=4$, $\sigma = -du \cdot \varphi^2$ за $i=5$, $\sigma = du$ за $i=11$.

Поставяме си задачата да намерим контактно конформна трансформация, за която $S=0$.

В случая $i=4$ търсената трансформация s от групата C_4^0 се определя от функциите u и v над $\mathbb{R}^5$, удовлетворяващи условията

$$du = dv \cdot \varphi; \quad d(du \cdot \varphi) = 0.$$

От условието $S=0$ и тъй като $\mathbb{R}^5$ е плоско, получаваме следната система ЧДУ за функцията $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^5)$

$$(14) \quad u_{ij} = u_i u_j - \varphi_i^k u_k \varphi_j^l u_l + \frac{1}{2}\{(u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2\}g_{ij} + \{u_1 u_3 + u_2 u_4\}\varphi_j^k g_{ik}$$

относно локална φ -база $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ ($i, j=1, \dots, 5$), като $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$.

От φ -плүрихармоничността на u и (11) следва, че

$$u_5 = 0, \quad u_{14} = u_{23}, \quad u_{22} = -u_{44}, \quad u_{11} = -u_{33}, \quad u_{12} = -u_{34}.$$

Съгласно последните равенства, системата (21) приема вида

$$(15) \quad \begin{aligned} u_{11} &= -u_{22} = -u_{33} = u_{44} = \frac{1}{2}\{(u_1)^2 - (u_2)^2 - (u_3)^2 + (u_4)^2\} \\ u_{12} &= -u_{34} = u_1 u_2 - u_3 u_4 \\ u_{14} &= u_{23} = u_1 u_4 + u_2 u_3 \\ u_{13} &= 3u_1 u_3 + u_2 u_4 \\ u_{24} &= 3u_2 u_4 + u_1 u_3. \end{aligned}$$

Непосредствено установяваме, че еквивалентните условия смесените частни производни от трети ред да не зависят от реда на диференциране, са

$$(16) \quad (u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2 = 0, \quad u_1 u_3 + u_2 u_4 = 0,$$

т.е. вектора $\text{grad} u$ да бъде колинеарен на изотропно направление относно двете метрики g и $\bar{g}$.

Нулевото решение на (16) води до $u = \text{const}$ и $c \in C_0$, което не е допустимо в случая. Ненулевите решения на (16) са две:

$$(17) \quad u_1 = \pm u_4, \quad u_2 = \mp u_3.$$

Извършвайки полаганията (17) в системата (15), получаваме и в двата случая системата

$$(18) \quad u_{11} = -u_{22} = (u_1)^2 - (u_2)^2, \quad u_{12} = 2u_1 u_2.$$

Полагаме $y = \lambda e^{-u}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогава от (18) имаме нова система

$$y_{11} = y_{22} = \frac{1}{y} \{ (y_1)^2 + (y_2)^2 \}, \quad y_{12} = 0.$$

Решението λ е $y = \sqrt{\frac{(2ax^1 + b_1)^2 + (2ax^2 + b_2)^2}{4a}}$, $a, b_1, b_2 - \text{const}$, $a \neq 0$. Следователно съгласно субституцията решението на (18) е

$$u = \ln \sqrt{\frac{4a\lambda}{(2ax^1 + b_1)^2 + (2ax^2 + b_2)^2}},$$

където $a\lambda > 0$, $2ax^i + b_i \neq 0$, $(i=1,2)$. Тогава, отчитайки (17), имаме

$$(19) \quad u = \ln \sqrt{\frac{4a\lambda}{[2a(x^1 \pm x^4) + b_1]^2 + [2a(x^2 \mp x^3) + b_2]^2}},$$

където $a\lambda > 0$, $2a(x^1 \pm x^4) + b_1 \neq 0$, $2a(x^2 \mp x^3) + b_2 \neq 0$.

Сега трябва да определим функцията $v \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^5)$ такава, че $dv \cdot \varphi = du$. Следователно

$$(20) \quad v_1 = -u_3, \quad v_2 = -u_4, \quad v_3 = u_1, \quad v_4 = u_2.$$

Интегрираме системата (20), като използваме (19). Получаваме

$$(21) \quad v = \pm \arctg \frac{2a(x^1 \pm x^4) + b_1}{2a(x^2 \mp x^3) + b_2} + f(x^5),$$

където $dv(\xi) = f'(x^5) \neq 0$, тъй като $c \notin C_0$.

Ако положим $f(x^5) = \arctg x^5$, то за функцията v имаме

$$(22) \quad v = \pm \arctg \frac{[2a(x^1 \pm x^4) + b_1] \pm [2a(x^2 \mp x^3) + b_2] x^5}{[2a(x^2 \mp x^3) + b_2] \mp [2a(x^1 \pm x^4) + b_1] x^5}.$$

Контактно конформната трансформация $c \in C_4^0$, определена чрез двойката функции (u, v) , изразени в (19) и (22), съгласно [4], преобразува $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, g)$ в $\mathcal{F}_4^0$ -многообразие $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ с плоска канонична свързаност. Тъй като основните 1-форми на трансформираното многообразие са $\theta = 2ndu \cdot \varphi$ и $\theta^* = 2ndu$, то

$$(23) \quad \theta = 4 \frac{dx^5}{1+(x^5)^2}; \quad \theta^* = 0; \quad \frac{\xi \theta(\xi)}{2n} = -2x^5 \frac{\theta^2(\xi)}{4n^2} \quad (n=2).$$

От (12), отчитайки (23) и $K=0$, получаваме явно изразяване на R

$$R = \frac{1}{[1+(x^5)^2]^2} \{ 2x^5 \pi_5 - \pi_2 + \pi_4 \},$$

откъдето скаларните кривини относно R са:

$$\tau(R) = \frac{4}{[1+(x^5)^2]^2}, \quad \tau^*(R) = -\frac{8x^5}{[1+(x^5)^2]^2}.$$

Очевидно R не е келеров тензор, но можем да търсим секционни кривини на неизродени площадки относно него, като тензор на кривина.

Твърдение 5. Нека $(R^5, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ е контактно конформно съответното $\mathcal{F}_4^0$ -многообразие. Тогава имаме:

1) Ако α е φ -холоморфна площадка, то секционната $\mathbb{F}$ кривина $k(R)(\alpha)$ е точково постоянна и отрицателна, тъй като

$$k(R)(\alpha) = -\frac{1}{[1+(x^5)^2]^2};$$

2) Ако α е ортогонална на ξ напълно реална площадка, то секционната $\mathbb{F}$ кривина е нулева.

3) Ако α е ξ -площадка (съотв. неортогонална на ξ напълно реална площадка), то α има секционна кривина относно K , зависеща както от точката, така и от площадката.

В случая $i=5$ по аналогичен начин се намират функции

$$u = \mp \arctg \frac{[2a(x^1 \pm x^4) + b_1] \pm [2a(x^2 \mp x^3) + b_2]x^5}{[2a(x^2 \mp x^3) + b_2] \mp [2a(x^1 \pm x^4) + b_1]x^5},$$

$$v = \ln \sqrt{\frac{4a\lambda}{[2a(x^1 \pm x^4) + b_1]^2 + [2a(x^2 \mp x^3) + b_2]^2}},$$

които определят трансформация $c \in C_5^0$, пораждаща $\mathcal{F}_5^0$ -многообразие с плоска канонична свързаност. Тогава за тензора на кривина R върху това многообразие имаме

$$R = \frac{1}{[1+(x^5)^2]^2} \{2x^5 \pi_4 - \pi_1\}, \quad \tau(R) = \frac{4(2x^5 - 5)}{[1+(x^5)^2]^2}, \quad \tau^*(R) = 0.$$

Очевидно R не е келеров тензор. Ще определим секционните кривини относно R на някои специални видове неизродени площадки на допирателното пространство на $\mathcal{F}_5^0$ -многообразието.

Твърдение 6. Нека $(R^5, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ е контактно конформно съответното $\mathcal{F}_5^0$ -многообразие. Тогава имаме:

1) Ако α е ξ -площадка, то секционната $\mathbb{F}$ кривина относно R е точково постоянна, тъй като

$$k(R)(\alpha) = \frac{2x^5 - 1}{[1+(x^5)^2]^2};$$

2) Ако α е φ -холоморфна площадка или напълно реална площадка ортогонална на ξ , то секционната $\mathbb{F}$ кривина относно R е точково постоянна и отрицателна, тъй като

$$k(R)(\alpha) = -\frac{1}{[1+(x^5)^2]^2};$$

3) Ако α е напълно реална площадка неортогонална на ξ , то секционната $\mathbb{F}$ кривина относно R , зависещи както от точката, така и от площадката.

В случая $i=1$ намираме u като φ -плорихармонична функция анулираща S от (13) при $v = \text{const}$. Получената система ЧДУ за u е аналогична на (15) и решението $\mathbb{F}$ е

$$(24) \quad u = \ln \frac{4a\lambda}{[2a(x^1 \pm x^4) + b_1]^2 + [2a(x^2 \mp x^3) + b_2]^2},$$

където $a\lambda > 0$, $2a(x^1 \pm x^4) + b_1 \neq 0$, $2a(x^2 \mp x^3) + b_2 \neq 0$.

Забележка. Използваната функция u в пример 2 на [3] се получава от (24) при $a = \lambda = \frac{1}{2}$, $b_1 = b_2 = 0$.

Функцията u от (24) заедно с константата v определят контактно конформна трансформация s от групата $C_I^0 \subset C_I^0$, която съгласно [4] преобразува $(R^5, \varphi, \xi, \eta, g)$ в многообразие $(R^5, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ от класа $\mathcal{F}_I^0$, за което каноничната свързаност е плоска. Тогава полученото $\mathcal{F}_I^0$ -многообразие има явно изразен тензор на кривина $R = -\{\psi_1 + \psi_2 - \psi_4\}(du \otimes du)$. Тензорът R не е келеров, тъй като

$$R(x, y, \varphi z, \varphi w) = -R(x, y, z, w) - 2\{\psi_1 + \psi_2 - \psi_4\}(du \otimes du)(x, y, z, w) = R(x, y, z, w).$$

Твърдение 7. Нека $(R^5, \varphi, \xi, \eta, \bar{g})$ е контактно конформно съответното $\mathcal{F}_I^0$ -многообразие. Тогава имаме:

- 1) Секционната кривина относно R на всяка ξ -площадка е нулева;
- 2) Секционните кривини относно R на всяка φ -холоморфна площадка или напълно реална площадка зависят както от точката, така и от площадката.

За случая $i=11$ използваме функцията u от (19), защото анулира (13); функцията v е определена чрез (21) при $f(x^5) = \text{const}$ (която можем да изберем нула), за да бъде (u, v) φ -холоморфна двойка функции. В [6] са дадени условията, на които трябва да отговаря функция $w \in \mathcal{H}(R^5)$, за да може заедно с φ -холоморфна двойка (u, v) да определят трансформация от групата G_{11}^0 . Чрез тази трансформация от $\mathcal{F}_0$ -многообразие се поражда $\mathcal{F}_{11}^0$ -многообразие.

Литература

- [1] G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev. Almost contact manifolds with B-metric. *Math. Balk.*, 7, 1993, 3-4.
- [2] G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova. B-connections and their conformal invariants on conformally Kaehler manifolds with B-metric. *Publ. de L'Inst. Math.*, 42(56), 1987, 107-121.
- [3] M. Manev, K. Gribachev. Contactly conformal transformations of almost contact manifolds with B-metric. *Serdica*, 19, 1993, 287-299.
- [4] M. Manev, K. Gribachev. Conformally invariant tensors on almost contact manifolds with B-metric. *Serdica*, 20, 1994, 133-147.
- [5] M. Manev. Contactly conformal transformations of general type of almost contact manifolds with B-metric. Applications. *Math. Balk.* (to appear)
- [6] M. Manev. Examples of almost contact manifolds with B-metric, derived from almost complex manifolds with B-metric. *Univ. Plovdiv, Trav. Scient.-Math.* (to appear)

Факултет по математика и информатика,
ПУ „Паусий Хилендарски“,
ул. „Цар Асен“ 24,
4000 Пловдив