

ЛЕКЦИЯ 2

ЛОГИЧЕСКИ ФУНКЦИИ

-  **Логически съждения**
-  **Двоични (логически) функции**
-  **Функции на една променлива**
-  **Функции на две променливи**
-  **Пълни системи от функции**
-  **Приложение на логическите функции**

ПРОГ_02

1/41

АРИСТОТЕЛЕВА ЛОГИКА

Думата **логика** има гръцки произход (от логос – дума, понятие, мисъл, разум).

В качеството си на философски термин се използва за **означаване на общите закономерности на света и мисленето**.

Тя се **оформя** като наука **в дълбока древност** благодарение на трудовете на Аристотел (384–322 г. пр. н. е.) – **аристотелева логика**.

Основен интерес в тази наука **са съжденията**.

ПРОГ_02

2/41

СЪЖДЕНИЯ

Изречение на естествен език, **съдържанието** на което може да се **оценява** като **вярно** или **невярно** (истина или лъжа), **се нарича съждение.**

Съждението е **мисъл**, която **потвърждава** или **отрича**, а **изречението** е **езиковата форма** на тази мисъл.

За съдържанието на едно **изречение**, което е съждение, **може да се поставя въпросът** **дали то е вярно или невярно.**

ПРОГ_02

3/41

ДВУЗНАЧНА ЛОГИКА

Логика, в която **този въпрос** за вярност има **само два** взаимно **изключващи** се **отговора** (**да** и **не**), се нарича **двузначна логика.**

В двузначната логика **съждението** **не може да бъде едновременно** както **вярно**, така и **невярно.**

ПРОГ_02

4/41

ПРИМЕРИ ЗА СЪЖДЕНИЯ

- ❶ Две плюс две е равно на четири.
- ❷ Аз обичам информатиката, но нямам компютър.
- ❸ Днес е слънчево.
- ❹ А вие виждали ли сте някога картина на множество?
- ❺ Едно е по-голямо от две или две плюс две е равно на четири.

ПРОГ_02

5/41

НЕ СА СЪЖДЕНИЯ

Съдържанието на **едно въпросително изречение**, например, **не може да се оценява** като вярно или невярно.

По същия начин стои въпросът и с други изречения, които носят емоционален характер – **заповедни**, **подбудителни** и прочие.

Такива изречения НЕ СА съждения.

ПРОГ_02

6/41

СА СЪЖДЕНИЯ

Не е необходимо да знаем дали едно изречение е вярно или невярно!

Важното е, че дадено изречение или е вярно или не е вярно.

В изречението „Не сме сами във Вселената“ се съдържа твърдение, за верността на което (поне в момента) не може да се произнесем

ТО обаче Е СЪЖДЕНИЕ!

ПРОГ_02

7/41

ВИДОВЕ СЪЖДЕНИЯ

Съжденията биват **два вида**:

- ❶ **Прости** (елементарни) – формулират се с помощта на прости изречения и **не могат да се разделят на самостоятелни компоненти** – съждения [❶, ❸]. 
- ❷ **Съставни** (сложни) – формулират се с помощта на сложни изречения и са **композиция на други** [❷, ❺]. 

ПРОГ_02

8/41

ЛОГИЧЕСКИ ОТНОШЕНИЯ

Логическите отношения **служат**
за композиране на съставни съждения
като свързват простите, от които
се изграждат съставните. 

Логически отношения са съюзите,
частиците и други.

Примери: НЕ, И, ИЛИ, ИЛИ ... ИЛИ...,
НИТО ... НИТО ..., АКО ... ТО ..., НО(=И), ...

ПРОГ_02

9/41

СЪЖДИТЕЛНО СМЯТАНЕ

За да се отговори на въпроса дали едно сложно
съждение е истина, или лъжа, е **достатъчно**
да се знае **каква е верността** (истинността)
на съставлящите го по-прости съждения **и какъв**
смисъл се влага в свързващите ги **отношения**.

Това, **как е изказано** съответното съждение,
не е така **важно** – **определящи са** чисто **формални**
правила за „изчисляване“ на верността на дадено
логическо съждение на базата на съставлящите го
съждения и отношения.

Съответната теория, определяща правилата
за изчисление, **се нарича съждително смятане**.

ПРОГ_02

10/41

МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА

Тя започва своето развитие от трудовете на ирландския математик **Джордж Бул** (1815-1864), който математизира (формализира) съждителното смятане. Нарича се още **булова алгебра**.

Съжденията се означават с букви: ***a, b, P, ...***

Логическите отношения имат специални знаци: **$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \dots$**

За вярно и невярно ни трябва **2 знака**:

ВЯРНО: 1 (или **Истина, True, Високо, High, ...**)

НЕВЯРНО: 0 (или **Лъжа, False, Ниско, Low, ...**)

ПРОГ_02

11/41

ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Функционален подход: **съжденията са двоични променливи** (с две стойности: 0 и 1).

Тогава **отношенията са функции** на такива аргументи с подобен резултат.

Нека **$D = \{0, 1\}$** и **$D^n = \underbrace{D \times D \times \dots \times D}_{n \text{ пъти}}$**

Всяка функция $f: D^n \rightarrow D$ с дефиниционна област **D^n** (за някое естествено число **n**) и област на стойностите **D** **се нарича логическа** (булева, двоична) **функция на n аргумента**.

ПРОГ_02

12/41

ОПРЕДЕЛЯНЕ

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0
0	0	...	0	1
...	...	...	...	...
1	1	...	0	1
1	1	...	1	0

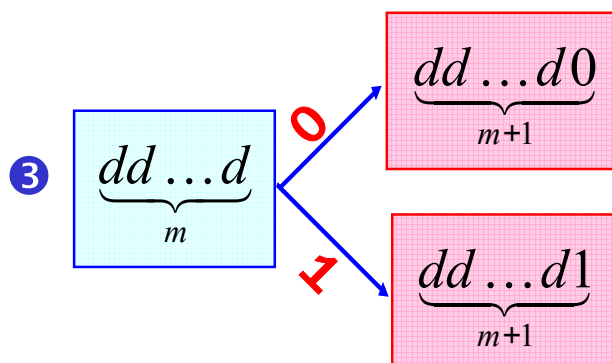
Таблица на истинност за $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

ПРОГ_02

13/41

ПРЕБРОЯВАНЕ РЕДИЦИ

- ① Редици от 1 нула и единица – 2 бр.: 0 и 1
- ② Редици от m нули и единици – k бр.



- ④ Редици от $m+1$ нули и единици – $2k$ бр.
- ⑤ Редици от n нули и единици – 2^n бр.

ПРОГ_02

14/41

ПРЕБРОЯВАНЕ ФУНКЦИИ

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0
0	0	...	1	1
...	...	...	...	...
1	1	...	0	1
1	1	...	1	0

- ① Броят на редовете е 2^n .
- ② Последният стълб, определящ една функция, съдържа 2^n нули и единици.
- ③ Броят на различните функции е 2^{2^n} .

ПРОГ_02

15/41

ДОКАЗАТЕЛСТВО НА РАВЕНСТВА

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0	0
0	0	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...
1	1	...	0	1	1
1	1	...	1	0	0

ПРОГ_02

16/41

ФУНКЦИИ С 1 АРГУМЕНТ

❶ Брой: $2^{2^1} = 2^2 = 4$

❷ Таблицы на истинност:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
ОЗН.	0	x	$\bar{x}$	1

❸ Безинтересни функции: $f_0(x) = 0$,
 $f_3(x) = 1$ и $f_1(x) = x$

ПРОГ_02

17/41

ФУНКЦИЯ ОТРИЦАНИЕ

Таблица
на истинност:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

❶ Синоними: инверсия, логическо НЕ.

❷ Означаване: $\neg x$.

❸ Свойства: $\neg(\neg x) = x$, $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$.

$$\overline{\bar{x}} = x \quad \overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$$

ПРОГ_02

18/41

ФУНКЦИИ С 2 АРГУМЕНТА

❶ Брой: $2^{2^2} = 2^4 = 16$

❷ Таблицы на истинност:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
оз.	0				x		y					$\bar{y}$		$\bar{x}$			1

❸ Шест познати функции: 0, 1, x, y, $\neg x$ и $\neg y$.

ПРОГ_02

19/41

КОНЮНКЦИЯ: $f_1(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

❶ **Синоними:** логическо И,
логическо умножение.

❷ **Означаване:** $x \wedge y$, $x \& y$, $x y$, $x y$.

ПРОГ_02

20/41

СВОЙСТВА НА КОНЮНКЦИЯТА

- ① $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z$
(асоциативност).
- ② $x \wedge y = y \wedge x$ (комутативност).
- ③ $x \wedge 0 = 0$ (операции с 0).
- ④ $x \wedge 1 = x$ (операции с 1).
- ⑤ $x \wedge x = x$ (поглъщане).
- ⑥ $x \wedge \bar{x} = 0$ (операции с инверсия).

ПРОГ_02

21/41

ДИЗЮНКТЦИЯ: $f_7(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- ① **Синоними:** логическо (включващо) ИЛИ, логическо събиране.
- ② **Означаване:** $x \vee y$, $x + y$.

ПРОГ_02

22/41

СВОЙСТВА НА ДИЗЮНКЦИЯТА

$$\textcircled{1} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$$

$$\textcircled{2} x \vee y = y \vee x$$

$$\textcircled{3} x \vee 0 = x$$

$$\textcircled{4} x \vee 1 = 1$$

$$\textcircled{5} x \vee x = x$$

$$\textcircled{6} x \vee \bar{x} = 1$$

ПРОГ_02

23/41

ВРЪЗКА МЕЖДУ КОНЮНКЦИЯ И ДИЗЮНКЦИЯ

ДВЕ ДИСТРИБУТИВНОСТИ:

$$\textcircled{1} \text{ на конюнкцията над дизюнкцията} \\ (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

$$\textcircled{2} \text{ на дизюнкцията над конюнкцията} \\ (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad (x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$$

ПРОГ_02

24/41

ЗАКОНИ НА ДЕ МОРГАН (свързват трите функции)

Наречени са на името на английския математик **Август де Морган** (1806–1871), който първи е посочил тяхното значение и са следните:

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

ПРОГ_02

25/41

ДОКАЗАТЕЛСТВО

Първи закон на де Морган:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

ПРОГ_02

26/41

СУМА ПО МОДУЛ 2: $f_6(x,y)$

**Таблица
на истинност:**

$$[x \oplus y = x + y \pmod{2}]$$

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

① **Синоними:** неравнозначност,
антиеквивалентност,
изключващо лог. ИЛИ

② **Означаване:** $x \oplus y$.

ПРОГ_02

27/41

СВОЙСТВА НА СУМА ПО МОДУЛ 2

① $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$

② $x \oplus y = y \oplus x$

③ $x \oplus 0 = x$

④ $x \oplus 1 = \bar{x}$

⑤ $x \oplus x = 0$

⑥ $x \oplus \bar{x} = 1$

⑦ $x \oplus y = \bar{x}.y + x.\bar{y} = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$

ПРОГ_02

28/41

ЕКВИВАЛЕНТНОСТ: $f_9(x,y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \equiv y$	$x \oplus y$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

- ① **Синоним:** равнозначност.
- ② **Означаване:** $x \equiv y$, $x \sim y$
- ③ **Свойство:** $x \sim y = \overline{x \oplus y} = x.y + \bar{x}.\bar{y} = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$.

ПРОГ_02

29/41

СТРЕЛКА НА ПИРС: $f_8(x,y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \downarrow y$	$x \vee y$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

- ① **Синоними:** функция на Веб,
функция НЕ-ИЛИ (**nor**).
- ② **Означаване:** $x \downarrow y$.

ПРОГ_02

30/41

СВОЙСТВА НА СТРЕЛКАТА НА ПИРС

$$\textcircled{1} (x \downarrow y) \downarrow z \neq x \downarrow (y \downarrow z)$$

$$\textcircled{2} x \downarrow y = y \downarrow x$$

$$\textcircled{3} x \downarrow 0 = \bar{x}$$

$$\textcircled{4} x \downarrow 1 = 0$$

$$\textcircled{5} x \downarrow x = \bar{x}$$

$$\textcircled{6} x \downarrow \bar{x} = 0$$

$$\textcircled{7} x \downarrow y = \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \vee y}$$

ПРОГ_02

31/41

ЩРИХ НА ШЕФЕР: $f_{14}(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	x / y	$x \wedge y$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

① Синоними: черта (ф-я) на Шефер, функция НЕ-И (**nand**).

② Означаване: x / y .

ПРОГ_02

32/41

СВОЙСТВА НА ЦРИХА НА ШЕФЕР

$$\textcircled{1} (x / y) / z \neq x / (y / z)$$

$$\textcircled{2} x / y = y / x$$

$$\textcircled{3} x / 0 = 1$$

$$\textcircled{4} x / 1 = \bar{x}$$

$$\textcircled{5} x / x = \bar{x}$$

$$\textcircled{6} x / \bar{x} = 1$$

$$\textcircled{7} x / y = \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

ПРОГ_02

33/41

ИМПЛИКАЦИЯ: $f_{13}(x, y)$ и $f_{11}(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

$\textcircled{1}$ **Синоними:** следствие.

$\textcircled{2}$ **Означаване:** $x \rightarrow y$ _____

$\textcircled{3}$ **Свойство:** $x \rightarrow y = x \cdot \bar{y} = \bar{x} \vee y$.

ПРОГ_02

34/41

ЗАБРАНА: $f_2(x, y)$ и $f_4(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \Delta y$	$y \Delta x$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

① **Означаване:** $x \Delta y$.

② **Свойство:** $x \Delta y = \overline{x \rightarrow y} = x \cdot \bar{y} = \overline{\bar{x} \vee y}$.

ПРОГ_02

35/41

ПЪЛНА СИСТЕМА ОТ ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Съвкупност от **краен брой** двоични **функции**, чрез които може да се изрази **произволна двоична функция**, се нарича **функционално пълна система** от двоични функции.

ПРОГ_02

36/41

ТЕОРЕМА ЗА ПЪЛНОТА

Функциите **конюнкция, дизюнкция и отрицание** образуват функционално **пълна система**.

$$x^y = \begin{cases} \bar{x}, & \text{когато } y = 0 \\ x, & \text{когато } y = 1 \end{cases}$$

$0 = x \wedge \bar{x}$. Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$. Тогава

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=1} \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

ПРОГ_02

37/41

ДРУГИ ПЪЛНИ СИСТЕМИ

- ① Конюнкция и отрицание;
- ② Дизюнкция и отрицание;
- ③ Конюнкция, 1 и сума по модул 2;
- ④ Дизюнкция, 1 и сума по модул 2;
- ⑤ Стрелка на Пирс;
- ⑥ Шрих на Шефер.

$$\bar{x} = x \oplus 1 \qquad \bar{x} = x \downarrow x$$

$$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$$

ПРОГ_02

38/41

АРИТМЕТИКА И ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

- ❶ Отрицание: $\neg x = 1 - x$;
- ❷ Конюнкция: $x \& y = \min(x, y)$;
- ❸ Дизюнкция: $x + y = \max(x, y)$.

Обратно. Всяка аритметична операция между числа, записани в двоична ПБС, може да се опише чрез операции между техните двоични цифри. Тези операции са двоични функции, които могат да се изразят чрез функциите **И**, **ИЛИ** и **НЕ** или с друга пълна система.

ПРОГ_02

39/41

ЛОГИЧЕСКИ ВЕНТИЛИ

Физическите реализации на базовите функции на пълна система се наричат **ЛОГИЧЕСКИ ВЕНТИЛИ**.

НЕ се реализира с **1** транзистор, а **И** и **ИЛИ** – с **по три** транзистора.

Важно следствие от теоремата е, че **можем да реализираме произволна аритметична операция в двоична ПБС чрез логически вентили.**

ПРОГ_02

40/41

**БЛАГОДАРЯ ВИ
ЗА ВНИМАНИЕТО!**

**БЪДЕТЕ С МЕН И
В СЛЕДВАЩАТА ЛЕКЦИЯ,
КОЯТО ЩЕ НИ ОТВЕДЕ
В НЕВЕРОЯТНИЯ СВЯТ НА
АЛГОРИТМИТЕ**