

ЛЕКЦИЯ 2 ЛОГИЧЕСКИ ФУНКЦИИ

- ⌚ Логически съждения
- ⌚ Двоични (логически) функции
- ⌚ Функции на една променлива
- ⌚ Функции на две променливи
- ⌚ Пълни системи от функции
- ⌚ Приложение на логическите функции

ПРОГ_02

1/41

АРИСТОТЕЛЕВА ЛОГИКА

Думата **логика** има гръцки произход (от логос – дума, понятие, мисъл, разум).

В качеството си на философски термин се използва за **означаване на общите закономерности на света и мисленето**.

Тя се **оформя** като наука **в дълбока древност** благодарение на трудовете на Аристотел (384–322 г. пр. н. е.) – **аристотелева логика**.

Основен интерес в тази наука **са съжденията**.

ПРОГ_02

2/41

СЪЖДЕНИЯ

Изречение на естествен език, **съдържанието на което може да се оценява като вярно или невярно** (истина или лъжа), **се нарича съждение**.

Съдението е мисъл, която потвърждава или отрича, а **изречението е езиковата форма на тази мисъл**.

За съдържанието на едно изречение, което е съждение, **може да се поставя въпросът дали то е вярно или невярно**.

ПРОГ_02

3/41

ДВУЗНАЧНА ЛОГИКА

Логика, в която **този въпрос** за вярност има **само два** взаимно **изключващи** се **отговора (да и не)**, се нарича **двужначна логика**.

В двужначната логика **съдението не може да бъде едновременно както вярно, така и невярно**.

ПРОГ_02

4/41

ПРИМЕРИ ЗА СЪЖДЕНИЯ

- ❶ Две плюс две е равно на четири.
- ❷ Аз обичам информатиката, но нямам компютър.
- ❸ Днес е слънчево.
- ❹ А вие виждали ли сте някога картина на множество?
- ❺ Едно е по-голямо от две или две плюс две е равно на четири.

ПРОГ_02

5/41

НЕ СА СЪЖДЕНИЯ

Съдържанието на **едно въпросително изречение**, например, **не може да се оценява** като вярно или невярно.

По същия начин стои въпросът и с други изречения, които носят емоционален характер – **заповедни**, **подбудителни** и прочие.

Такива изречения НЕ СА съждения.

ПРОГ_02

6/41

СА СЪЖДЕНИЯ

Не е необходимо да знаем дали едно изречение е вярно или невярно!

Важното е, че дадено изречение или е вярно или не е вярно.

В изречението „**Не сме сами във Вселената**“ се съдържа твърдение, за верността на което (поне в момента) не може да се произнесем

ТО обаче Е СЪЖДЕНИЕ!

ПРОГ_02

7/41

ВИДОВЕ СЪЖДЕНИЯ

Съжденията биват **два вида**:

- ❶ **Прости** (елементарни) – формулират се с помощта на прости изречения и **не могат да се разделят на самостоятелни компоненти** – съждения [❶, ❸]. 
- ❷ **Съставни** (сложни) – формулират се с помощта на сложни изречения и са **композиция на други** [❷, ❺]. 

ПРОГ_02

8/41

ЛОГИЧЕСКИ ОТНОШЕНИЯ

Логическите отношения **служат**
за композиране на съставни съждения
като свързват простите, от които
се изграждат съставните. 

Логически отношения са съюзите,
частиците и други.

Примери: НЕ, И, ИЛИ, ИЛИ ... ИЛИ...,
НИТО ... НИТО ..., АКО ... ТО ..., $HO (=I)$, ...

ПРОГ_02

9/41

СЪЖДИТЕЛНО СМЯТАНЕ

За да се отговори на въпроса дали едно сложно
съждение е истина, или лъжа, е **достатъчно**
да се знае **каква е верността** (истинността)
на съставлящите го по-прости съждения **и какъв**
смисъл се влага в свързващите ги **отношения**.

Това, **как е изказано** съответното съждение,
не е така **важно** – **определящи са** чисто **формални**
правила за „изчисляване“ на верността на дадено
логическо съждение на базата на съставлящите го
съждения и отношения.

Съответната теория, определяща правилата
за изчисление, **се нарича съждително смятане**.

ПРОГ_02

10/41

МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА

Тя започва своето развитие от трудовете
на ирландския математик **Джордж Бул**
(1815-1864), който математизира
(формализира) съждителното смятане.
Нарича се още **булова алгебра**.

Съжденията се означават с букви: **a, b, P, ...**

Логическите отношения имат специални
знаци: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \dots$

За вярно и невярно ни трябва **2 знака**:

ВЯРНО: 1 (или **Истина, True, Високо, High, ...**)

НЕВЯРНО: 0 (или **Лъжа, False, Ниско, Low, ...**)

ПРОГ_02

11/41

ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Функционален подход: **съжденията са**
двоични променливи (с две стойности: 0 и 1).

Тогав **отношенията са функции** на такива
аргументи с подобен резултат.

Нека $D = \{0, 1\}$ и $D^n = \underbrace{D \times D \times \dots \times D}_n$
n пъти

Всяка функция $f: D^n \rightarrow D$ с дефиниционна
област D^n (за някое естествено число **n**)
и област на стойностите **D се нарича**
логическа (булева, двоична) **функция**
на n аргумента.

ПРОГ_02

12/41

ОПРЕДЕЛЯНЕ

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0
0	0	...	0	1
...	...	...	...	...
1	1	...	0	1
1	1	...	1	0

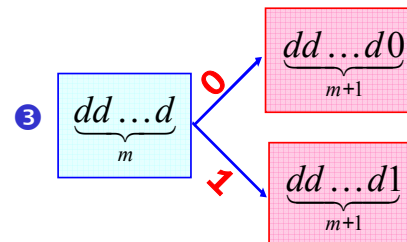
Таблица на истинност за $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

ПРОГ_02

13/41

ПРЕБРОЯВАНЕ РЕДИЦИ

- 1 Редици от 1 нула и единица – 2 бр.: 0 и 1.
- 2 Редици от m нули и единици – k бр.



- 4 Редици от $m+1$ нули и единици – $2k$ бр.
- 5 Редици от n нули и единици – 2^n бр.

ПРОГ_02

14/41

ПРЕБРОЯВАНЕ ФУНКЦИИ

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0
0	0	...	1	1
...	...	...	...	...
1	1	...	0	1
1	1	...	1	0

- 1 Броят на редовете е 2^n .
- 2 Последният стълб, определящ една функция, съдържа 2^n нули и единици.
- 3 Броят на различните функции е 2^{2^n} .

ПРОГ_02

15/41

ДОКАЗАТЕЛСТВО
НА РАВЕНСТВА

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	0	0
0	0	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...
1	1	...	0	1	1
1	1	...	1	0	0

ПРОГ_02

16/41

ФУНКЦИИ С 1 АРГУМЕНТ

① Брой: $2^{2^1} = 2^2 = 4$

② Таблицы на истинност:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
озн.	0	x	$\bar{x}$	1

③ Безинтересни функции: $f_0(x) = 0$,
 $f_3(x) = 1$ и $f_1(x) = x$

ПРОГ_02

17/41

ФУНКЦИЯ ОТРИЦАНИЕ

Таблица
на истинност:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

① Синоними: инверсия, логическо НЕ.

② Означаване: $\neg x$.

③ Свойства: $\neg(\neg x) = x$, $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$.

$$\bar{\bar{x}} = x \quad \bar{0} = 1 \quad \bar{1} = 0$$

ПРОГ_02

18/41

ФУНКЦИИ С 2 АРГУМЕНТА

① Брой: $2^{2^2} = 2^4 = 16$

② Таблицы на истинност:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
оз.	0			x		y					$\bar{y}$		$\bar{x}$				1

③ Шест познати функции: 0, 1, x , y , $\neg x$ и $\neg y$.

ПРОГ_02

19/41

КОНЮНКЦИЯ: $f_1(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

① Синоними: логическо И,
логическо умножение.

② Означаване: $x \wedge y$, $x \& y$, $x \cdot y$, xy .

ПРОГ_02

20/41

СВОЙСТВА НА КОНЮНКЦИЯТА

- ① $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z$
(асоциативност).
- ② $x \wedge y = y \wedge x$ (комутативност).
- ③ $x \wedge 0 = 0$ (операции с 0).
- ④ $x \wedge 1 = x$ (операции с 1).
- ⑤ $x \wedge x = x$ (поглъщане).
- ⑥ $x \wedge \bar{x} = 0$ (операции с инверсия).

ПРОГ_02

21/41

ДИЗЮНКЦИЯ: $f_7(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- ① **Синоними:** логическо (включващо) ИЛИ, логическо събиране.
- ② **Означаване:** $x \vee y$, $x + y$.

ПРОГ_02

22/41

СВОЙСТВА НА ДИЗЮНКЦИЯТА

- ① $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$
- ② $x \vee y = y \vee x$
- ③ $x \vee 0 = x$
- ④ $x \vee 1 = 1$
- ⑤ $x \vee x = x$
- ⑥ $x \vee \bar{x} = 1$

ПРОГ_02

23/41

ВРЪЗКА МЕЖДУ КОНЮНКЦИЯ И ДИЗЮНКЦИЯ

ДВЕ ДИСТРИБУТИВНОСТИ:

- ① на конюнкцията над дизюнкцията
 $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$
- ② на дизюнкцията над конюнкцията
 $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ $(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$

ПРОГ_02

24/41

ЗАКОНИ НА ДЕ МОРГАН (свързват трите функции)

Наречени са на името на английския математик **Август де Морган** (1806–1871), който първи е посочил тяхното значение и са следните:

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

ПРОГ_02

25/41

ДОКАЗАТЕЛСТВО

Първи закон на де Морган:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

ПРОГ_02

26/41

СУМА ПО МОДУЛ 2: $f_6(x, y)$

**Таблица
на истинност:**

$$[x \oplus y = x + y \pmod{2}]$$

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

❶ **Синоними:** неравнозначност,
антиеквивалентност,
изключващо лог. ИЛИ

❷ **Означаване:** $x \oplus y$.

ПРОГ_02

27/41

СВОЙСТВА НА СУМА ПО МОДУЛ 2

- ❶ $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$
- ❷ $x \oplus y = y \oplus x$
- ❸ $x \oplus 0 = x$
- ❹ $x \oplus 1 = \bar{x}$
- ❺ $x \oplus x = 0$
- ❻ $x \oplus \bar{x} = 1$
- ❼ $x \oplus y = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$

ПРОГ_02

28/41

ЕКВИВАЛЕНТНОСТ: $f_9(x,y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \equiv y$	$x \oplus y$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

① **Синоним:** равнозначност.

② **Означаване:** $x \equiv y$, $x \sim y$.

③ **Свойство:** $x \sim y = x \oplus y = x.y + \bar{x}.\bar{y} = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$.

ПРОГ_02

29/41

СТРЕЛКА НА ПИРС: $f_8(x,y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \downarrow y$	$x \vee y$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

① **Синоними:** функция на Веб,
функция НЕ-ИЛИ (**nor**).

② **Означаване:** $x \downarrow y$.

ПРОГ_02

30/41

СВОЙСТВА НА СТРЕЛКАТА НА ПИРС

① $(x \downarrow y) \downarrow z \neq x \downarrow (y \downarrow z)$

② $x \downarrow y = y \downarrow x$

③ $x \downarrow 0 = \bar{x}$

④ $x \downarrow 1 = 0$

⑤ $x \downarrow x = \bar{x}$

⑥ $x \downarrow \bar{x} = 0$

⑦ $x \downarrow y = \bar{x}.\bar{y} = \overline{x \vee y}$

ПРОГ_02

31/41

ЩРИХ НА ШЕФЕР: $f_{14}(x,y)$

Таблица
на истинност:

x	y	x / y	$x \wedge y$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

① **Синоними:** черта (ф-я) на Шефер,
функция НЕ-И (**nand**).

② **Означаване:** x / y .

ПРОГ_02

32/41

СВОЙСТВА НА ШРИХА НА ШЕФЕР

- ① $(x / y) / z \neq x / (y / z)$
- ② $x / y = y / x$
- ③ $x / 0 = 1$
- ④ $x / 1 = \bar{x}$
- ⑤ $x / x = \bar{x}$
- ⑥ $x / \bar{x} = 1$
- ⑦ $x / y = \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

ПРОГ_02

33/41

ИМПЛИКАЦИЯ: $f_{13}(x, y)$ и $f_{11}(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

- ① **Синоними:** следствие.
- ② **Означаване:** $x \rightarrow y$.
- ③ **Свойство:** $x \rightarrow y = x \cdot \bar{y} = \bar{x} \vee y$.

ПРОГ_02

34/41

ЗАБРАНА: $f_2(x, y)$ и $f_4(x, y)$

Таблица
на истинност:

x	y	$x \Delta y$	$y \Delta x$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

- ① **Означаване:** $x \Delta y$.
- ② **Свойство:** $x \Delta y = x \rightarrow y = x \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$.

ПРОГ_02

35/41

ПЪЛНА СИСТЕМА ОТ ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Съвкупност от **краен брой** двоични **функции**, чрез които може да се изрази **произволна двоична функция**, се нарича **функционално пълна система** от двоични функции.

ПРОГ_02

36/41

ТЕОРЕМА ЗА ПЪЛНОТА

Функциите **конюнкция**, **дизюнкция** и **отрицание** образуват функционално **пълна система**.

$$x^y = \begin{cases} \bar{x}, & \text{когато } y = 0 \\ x, & \text{когато } y = 1 \end{cases}$$

$0 = x \wedge \bar{x}$. Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$. Тогава

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=1} \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

ПРОГ_02

37/41

ДРУГИ ПЪЛНИ СИСТЕМИ

- ❶ Конюнкция и отрицание;
- ❷ Дизюнкция и отрицание;
- ❸ Конюнкция, 1 и сума по модул 2;
- ❹ Дизюнкция, 1 и сума по модул 2;
- ❺ Стрелка на Пирс;
- ❻ Щрих на Шефер.

$$\bar{x} = x \oplus 1 \quad \bar{x} = x \downarrow x$$

$$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$$

ПРОГ_02

38/41

АРИТМЕТИКА И ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

- ❶ Отрицание: $\neg x = 1 - x$;
- ❷ Конюнкция: $x \& y = \min(x, y)$;
- ❸ Дизюнкция: $x + y = \max(x, y)$.

Обратно. Всяка аритметична операция между числа, записани в двоична ПБС, може да се опише чрез операции между техните двоични цифри. Тези операции са двоични функции, които могат да се изразят чрез функциите **И**, **ИЛИ** и **НЕ** или с друга пълна система.

ПРОГ_02

39/41

ЛОГИЧЕСКИ ВЕНТИЛИ

Физическите реализации на базовите функции на пълна система се наричат **логически вентили**.

НЕ се реализира с **1** транзистор, а **И** и **ИЛИ** – с **по три** транзистора.

Важно следствие от теоремата е, че **можем да реализираме произволна аритметична операция** в двоична ПБС **чрез логически вентили**.

ПРОГ_02

40/41

**БЛАГОДАРЯ ВИ
ЗА ВНИМАНИЕТО!**

**БЪДЕТЕ С МЕН И
В СЛЕДВАЩАТА ЛЕКЦИЯ,
КОЯТО ЩЕ НИ ОТВЕДЕ
В НЕВЕРОЯТНИЯ СВЯТ НА
АЛГОРИТМИТЕ**