ЛЕКЦИЯ 2
ЛОГИЧЕСКИ ФУНКЦИИ

- Логически съждения
- Двоични (логически) функции
- Функции на една променлива
- Функции на две променливи
- Пълни системи от функции
- Приложение на логическите функции

АРИСТОТЕЛЕВА ЛОГИКА

Думата *логика* има гръцки произход (от логос – дума, понятие, мисъл, разум).

В качеството си на философски термин се използва за означаване на общите закономерности на света и мисленето.

Тя се оформя като наука в дълбока древност благодарение на трудовете на Аристотел (384–322 г. пр. н. е.) – аристотелева логика.

Основен интерес в тази наука *са съжденията*.

СЪЖДЕНИЯ

Изречение на естествен език, *съдържанието на което може да се оценява като* вярно *или* невярно (истина или лъжа), *се нарича съждение*.

Съждението е мисъл, която потвърждава или отрича, а изречението е езиковата форма на тази мисъл.

За съдържанието на едно изречение, което е съждение, може да се поставя *въпрос*ът *дали* то *е вярно или невярно*.

ДВУЗНАЧНА ЛОГИКА

Логика, в която *този въпрос* за вярност има *само два* взаимно *изключващи* се *отговора* (да и не), се нарича *двузначна логика*.

В двузначната логика *съждението не може да бъде едновременно* както *вярно*, така *и невярно*.

ПРИМЕРИ ЗА СЪЖДЕНИЯ

❶ Две плюс две е равно на четири.

❷ Аз обичам информатиката, но нямам компютър.

❸ Днес е слънчево.

❹ А вие виждали ли сте някога картина на множество?

❺ Едно е по-голямо от две или две плюс две е равно на четири.

НЕ СА СЪЖДЕНИЯ

Съдържанието на едно въпросително изречение, например, не може да се оценява като вярно или невярно.

По същия начин стои въпросът и с други изречения, които носят емоционален характер – заповедни, подбудителни и прочие.

Такива изречения НЕ СА съждения.

СА СЪЖДЕНИЯ

Не е необходимо да знаем дали едно изречение е вярно или невярно!

Важното е, че дадено изречение или е вярно или не е вярно.

В изречението „Не сме сами във Вселената“ се съдържа твърдение, за верността на което (поне в момента) не може да се произнесем.

ТО обаче Е СЪЖДЕНИЕ!

ВИДОВЕ СЪЖДЕНИЯ

Съжденията биват два вида:

❶ *Прости* (елементарни) – формулират се с помощта на прости изречения и *не могат да се разделят на* самостоятелни *компоненти* – съждения [❶, ❸].

❷ *Съставни* (сложни) – формулират се с помощта на сложни изречения и са *композиция на други* [❷, ❺].

Последна редакция 29 Януари 2012 г.

ЛОГИЧЕСКИ ОТНОШЕНИЯ

Логическите отношения служат за композиране на съставни съждения като свързват простите, от които се изграждат съставните.

Логически отношения са съюзите, частиците и други.

Примери: НЕ, И, ИЛИ, ИЛИ ... ИЛИ..., НИТО ... НИТО ..., АКО ... ТО ..., НО(=И), ...

ПРОГ_02 9/41

СЪЖДИТЕЛНО СМЯТАНЕ

За да се отговори на въпроса дали едно сложно съждение е истина, или лъжа, е достатъчно да се знае каква е верността (истинността) на съставящите го по-прости съждения и какъв смисъл се влага в свързващите ги отношения.

Това, как е изказано съответното съждение, не е така важно – определящи са чисто формални правила за „изчисляване“ на верността на дадено логическо съждение на базата на съставящите го съждения и отношения.

Съответната теория, определяща правилата за изчисление, се нарича съждително смятане.

ПРОГ_02 10/41

МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА

Тя започва своето развитие от трудовете на ирландския математик Джордж Бул (1815-1864), който математизира (формализира) съждителното смятане. Нарича се още булова алгебра.

Съжденията се означават с букви: a, b, P, ...

Логическите отношения имат специални знаци: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, ...

За вярно и невярно ни трябват 2 знака:

ВЯРНО: 1 (или Истина, True, Високо, High, ...)

НЕВЯРНО: 0 (или Лъжа, False, Ниско, Low, ...)

ПРОГ_02 11/41

ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Функционален подход: съжденията са двоични променливи (с две стойности: 0 и 1).

Тогава отношенията са функции на такива аргументи с подобен резултат.

Нека $D = \{0,1\}$ и $D^n = \underbrace{D\times D\times\ldots\times D}_{n \text{ пъти}}$

Всяка функция $f: D^n \rightarrow D$ с дефиниционна област D^n (за някое естествено число n) и област на стойностите D се нарича логическа (булева, двоична) функция на n аргумента.

ПРОГ_02 12/41

ОПРЕДЕЛЯНЕ

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	...	0	0
0	0	...	0	1
...	...	...	...	...
1	1	...	0	1
1	1	...	1	0

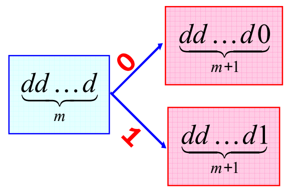
Таблица на истинност за $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

ПРОГ_02 13/41

ПРЕБРОЯВАНЕ РЕДИЦИ

❶ Редици от 1 нула и единица – 2 бр.: 0 и 1.

❷ Редици от m нули и единици – k бр.

❸ 

❹ Редици от $m+1$ нули и единици – $2k$ бр.

❺ Редици от n нули и единици – 2^n бр.

ПРОГ_02 14/41

ПРЕБРОЯВАНЕ ФУНКЦИИ

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	...	0	0
0	0	...	1	1
...	...	...	...	...
1	1	...	0	1
1	1	...	1	0

❶ Броят на редовете е 2^n.

❷ Последният стълб, определящ една функция, съдържа 2^n *нули и единици*.

❸ Броят на различните функции е 2^{2^n}.

ПРОГ_02 15/41

ДОКАЗАТЕЛСТВО НА РАВЕНСТВА

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	...	0	0	0
0	0	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...
1	1	...	0	1	1
1	1	...	1	0	0

ПРОГ_02 16/41

ФУНКЦИИ С 1 АРГУМЕНТ

❶ Брой: $2^{2^1} = 2^2 = 4$

❷ Таблици на истинност:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
озн.	0	x	$\overline{x}$	1

❸ Безинтересни функции: $f_0(x) = 0$, $f_3(x) = 1$ и $f_1(x) = x$

ПРОГ_02 17/41

ФУНКЦИЯ ОТРИЦАНИЕ

Таблица на истинност:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

❶ *Синоними*: инверсия, логическо НЕ.

❷ *Означаване*: ¬x.

❸ *Свойства*: ¬(¬x) = x, ¬0 = 1, ¬1 = 0.

$\overline{\overline{x}} = x \quad \overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$

ПРОГ_02 18/41

ФУНКЦИИ С 2 АРГУМЕНТА

❶ Брой: $2^{2^2} = 2^4 = 16$

❷ Таблици на истинност:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
оз.		0			x		y					$\overline{y}$		$\overline{x}$			1

❸ Шест познати функции: 0, 1, x, y, $\neg x$ и $\neg y$.

ПРОГ_02 19/41

КОНЮНКЦИЯ: $f_1(x,y)$

Таблица на истинност:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

❶ *Синоними*: логическо И, логическо умножение.

❷ *Означаване*: $x \wedge y$, $x \,\&\, y$, $x.y$, xy.

ПРОГ_02 20/41

СВОЙСТВА НА КОНЮНКЦИЯТА

❶ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z$ (асоциативност).

❷ $x \wedge y = y \wedge x$ (комутативност).

❸ $x \wedge 0 = 0$ (операции с 0).

❹ $x \wedge 1 = x$ (операции с 1).

❺ $x \wedge x = x$ (поглъщане).

❻ $x \wedge \overline{x} = 0$ (операции с инверсия).

ПРОГ_02 21/41

ДИЗЮНКЦИЯ: $f_7(x,y)$

Таблица на истинност:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

❶ *Синоними*: логическо (включващо) ИЛИ, логическо събиране.

❷ *Означаване*: $x \vee y$, $x + y$.

ПРОГ_02 22/41

СВОЙСТВА НА ДИЗЮНКЦИЯТА

❶ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$

❷ $x \vee y = y \vee x$

❸ $x \vee 0 = x$

❹ $x \vee 1 = 1$

❺ $x \vee x = x$

❻ $x \vee \overline{x} = 1$

ПРОГ_02 23/41

ВРЪЗКА МЕЖДУ КОНЮНКЦИЯ И ДИЗЮНКЦИЯ

ДВЕ ДИСТРИБУТИВНОСТИ:

❶ на конюнкцията над дизюнкцията

$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \qquad (x+y).z = (x.z)+(y.z)$

❷ на дизюнкцията над конюнкцията

$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \qquad (x.y)+z = (x+z).(y+z)$

ПРОГ_02 24/41

ЗАКОНИ НА ДЕ МОРГАН (свързват трите функции)

Наречени са на името на английския математик Август де Морган (1806–1871), който първи е посочил тяхното значение и са следните:

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

ПРОГ_02 25/41

ДОКАЗАТЕЛСТВО

Първи закон на де Морган:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

ПРОГ_02 26/41

СУМА ПО МОДУЛ 2: $f_6(x,y)$

Таблица на истинност:

[$x \oplus y = x + y \pmod 2$]

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

❶ *Синоними*: неравнозначност, антиеквивалентност, изключващо лог. ИЛИ.

❷ *Означаване*: $x \oplus y$.

ПРОГ_02 27/41

СВОЙСТВА НА СУМА ПО МОДУЛ 2

❶ $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$

❷ $x \oplus y = y \oplus x$

❸ $x \oplus 0 = x$

❹ $x \oplus 1 = \overline{x}$

❺ $x \oplus x = 0$

❻ $x \oplus \overline{x} = 1$

❼ $x \oplus y = \overline{x}.y + x.\overline{y} = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$

ПРОГ_02 28/41

ЕКВИВАЛЕНТНОСТ: $f_9(x,y)$

Таблица на истинност:

x	y	$x \equiv y$	$x \oplus y$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

❶ *Синоним*: равнозначност.

❷ *Означаване*: $x \equiv y$, $x \sim y$.

❸ *Свойство*: $x \sim y = \overline{x \oplus y} = x.y + \overline{x}.\overline{y} = (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$.

ПРОГ_02 29/41

СТРЕЛКА НА ПИРС: $f_8(x,y)$

Таблица на истинност:

x	y	$x \downarrow y$	$x \vee y$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

❶ *Синоними*: функция на Веб, функция НЕ-ИЛИ (nor).

❷ *Означаване*: $x \downarrow y$.

ПРОГ_02 30/41

СВОЙСТВА НА СТРЕЛКАТА НА ПИРС

❶ $(x \downarrow y) \downarrow z \neq x \downarrow (y \downarrow z)$

❷ $x \downarrow y = y \downarrow x$

❸ $x \downarrow 0 = \overline{x}$

❹ $x \downarrow 1 = 0$

❺ $x \downarrow x = \overline{x}$

❻ $x \downarrow \overline{x} = 0$

❼ $x \downarrow y = \overline{x}.\overline{y} = \overline{x \vee y}$

ПРОГ_02 31/41

ЩРИХ НА ШЕФЕР: $f_{14}(x,y)$

Таблица на истинност:

x	y	x / y	$x \wedge y$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

❶ *Синоними*: черта (ф-я) на Шефер, функция НЕ-И (nand).

❷ *Означаване*: x / y.

ПРОГ_02 32/41

СВОЙСТВА НА ЩРИХА НА ШЕФЕР

❶ $(x / y) / z \neq x / (y / z)$

❷ $x / y = y / x$

❸ $x / 0 = 1$

❹ $x / 1 = \overline{x}$

❺ $x / x = \overline{x}$

❻ $x / \overline{x} = 1$

❼ $x / y = \overline{x.y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

ПРОГ_02 33/41

ИМПЛИКАЦИЯ: $f_{13}(x,y)$ и $f_{11}(x,y)$

Таблица на истинност:

x	y	$x \to y$	$y \to x$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

❶ *Синоними*: следствие.

❷ *Означаване*: $x \to y$.

❸ *Свойство*: $x \to y = \overline{x.\overline{y}} = \overline{x} \vee y$.

ПРОГ_02 34/41

ЗАБРАНА: $f_2(x,y)$ и $f_4(x,y)$

Таблица на истинност:

x	y	$x \Delta y$	$y \Delta x$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

❶ *Означаване*: $x \Delta y$.

❷ *Свойство*: $x\Delta y = \overline{x \to y} = x.\overline{y} = \overline{\overline{x} \vee y}$.

ПРОГ_02 35/41

ПЪЛНА СИСТЕМА ОТ ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Съвкупност от *краен брой* двоични *функции*, чрез които може да се изрази *произволна двоична функция*, се нарича **функционално пълна система** от двоични функции.

ПРОГ_02 36/41

ТЕОРЕМА ЗА ПЪЛНОТА

Функциите *конюнкция, дизюнкция и отрицание* образуват функционално **пълна система**.

$$x^y = \begin{cases} \overline{x}, \text{ когато } y = 0 \\ x, \text{ когато } y = 1 \end{cases}$$

$0 = x \wedge \overline{x}$. Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$. Тогава

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1} \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

ПРОГ_02 37/41

ДРУГИ ПЪЛНИ СИСТЕМИ

❶ Конюнкция и отрицание;

❷ Дизюнкция и отрицание;

❸ Конюнкция, 1 и сума по модул 2;

❹ Дизюнкция, 1 и сума по модул 2;

❺ Стрелка на Пирс;

❻ Щрих на Шефер.

$\overline{x} = x \oplus 1 \qquad \overline{x} = x \downarrow x$

$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

ПРОГ_02 38/41

АРИТМЕТИКА И ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

❶ Отрицание: $\neg x = 1 - x$;

❷ Конюнкция: $x \;\&\; y = \min(x, y)$;

❸ Дизюнкция: $x + y = \max(x, y)$.

Обратно. Всяка аритметична операция между числа, записани в двоична ПБС, може да се опише чрез операции между техните двоични цифри. Тези операции са двоични функции, които могат да се изразят чрез функциите *И*, *ИЛИ* и *НЕ* или с друга пълна система.

ПРОГ_02 39/41

ЛОГИЧЕСКИ ВЕНТИЛИ

Физическите реализации на базовите функции на пълна система се наричат **логически вентили**.

НЕ се реализира с **1** транзистор, а **И** и **ИЛИ** – с **по три** транзистора.

Важно следствие от теоремата е, че **можем да реализираме произволна аритметична операция** в двоична ПБС *чрез логически вентили*.

ПРОГ_02 40/41

БЛАГОДАРЯ ВИ
ЗА ВНИМАНИЕТО!

БЪДЕТЕ С МЕН И
В СЛЕДВАЩАТА ЛЕКЦИЯ,
КОЯТО ЩЕ НИ ОТВЕДЕ
В НЕВЕРОЯТНИЯ СВЯТ НА
АЛГОРИТМИТЕ